TÍTOL: GEOMETRIA AMB BOMBOLLES DE SABÓ

CLASSIFICACIÓ:	GP GE	MD DAVM	ESO BAT	L / G / T30	CP	0

DESCRIPCIÓ DEL MATERIAL: Partirem de diversos elements:

- El líquid format per aigua (50%), sabó (40%) i glicerina (10%). Convé ajustar una mica les proporcions per tempteig. Cal que l'atuell que emprem per contenir el líquid permeti que s'hi puguin submergir còmodament les estructures que farem servir. El líquid es pot reutilitzar, per tant ens caldrà disposar d'un petit dipòsit i d'un embut.

- Estructures planes formades per dos rectangles de plàstic transparent units per claus que els mantenen paral·lels i que estan situats de manera que formen determinades figures geomètriques (triangle, rectangle, hexàgon…).

- Estructures polièdriques. Poden ser de filferro, de coure, amb palletes de beure. Hi ha un producte de plàstic anomenat *Zoma System* que és molt útil per fer aquestes figures (vegi's la fitxa F68). És bo que no sobrepassin els 10-12 cm de diàmetre.

- Segons l'experiència que vulguem fer usarem altres elements: retroprojector i pantalla, palletes de beure, trossos de fil, sectors circulars de 120º retallats sobre transparències de colors, corda, raquetes de tennis, gots, pols de talc...

IMATGE: En la següent fotografia es mostren, sobre la taula, molts dels materials que fem servir en aquestes activitats.

CONTINGUTS: Les activitats que presentem en aquesta fitxa permeten tractar diferents nivells de continguts: des de conceptes molt concrets de geometria (arestes, cares, vèrtexs, distàncies, angles díedres, angles tríedres...) fins a idees més generals o avançades (figura reglada, curvatura, idea d'optimització o minimització, unicitat o no de solucions...). Amb aquestes activitats també podem posar de manifest la dinàmica conjectura –experimentació- modificació de la conjectura i el poder modelitzador de la matemàtica.

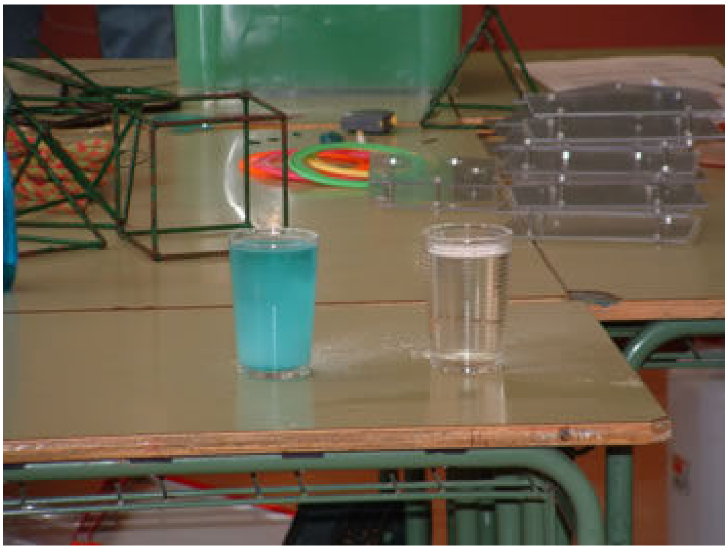
PROPOSTA D'APLICACIÓ DIDÀCTICA: A continuació descrivim amb una mica de detall algunes de les activitats que podem desenvolupar. Les agrupem en quatre apartats: les que fan referència al fonament físic, les que fan referència a la geometria plana, les que fan referència a la geometria de l'espai i les de caire més lúdic.

Fonament físic

Els líquids presenten una tendència a reduir la superfície exterior que mostren ja que la mínima superfície correspon al menor valor possible de l'energia potencial deguda a la tensió superficial. Així doncs, si un volum de líquid es deixa lliure a l'aire prendrà una forma tal que tingui la mínima superfície exterior possible compatible amb el seu volum. Tanmateix les gotes dels líquids són esfèriques per què, per a un volum donat, l'esfera és la figura que presenta menor superfície exterior.

El sabó té l'efecte de disminuir la tensió superficial dels líquids i de permetre la seva laminació en superfícies minimals (mínims relatius). És a dir, de menor àrea que qualsevol altra superfície propera que pugui inscriure's en la mateixa estructura. Poden haver-hi vàries solucions minimals i podrem saltar d'una a l'altra comunicant energia, és a dir, moviment. Podem posar de manifest aquesta tendència dels líquids mitjançant un petit però vistós experiment en el qual es tensa un fil unit a una estructura de filferro com mostra la fotografia següent:

Donat que la tensió superficial dóna consistència a "la pell del líquid", un altre experiment per veure l'efecte que el sabó fa sobre la tensió superficial és el següent. Prenem dos gots d'aigua i en un hi afegim sabó (cal remenar suaument per què no quedi a baix). Després tirem pols de talc sobre un got i l'altre de manera abundant. Observarem que, tal com es veu a la fotografia següent, en el got que no hi ha sabó, el talc sura, mentre que, en el got amb sabó, el talc s'enfonsa per què la tensió superficial no el pot aguantar.



Per efecte de la tensió superficial les superfícies que formarà l'aigua amb sabó sempre seran mínimes. Observem que hem passat d'una idea física a una idea matemàtica. En les activitats que es descriuen a continuació aprofitarem aquesta propietat per tal de produir figures tridimensionals amb pel·lícules sabonoses, treballar, a partir d'elles, conceptes de geometria i, sobretot, deixar-nos fascinar per la seva bellesa.

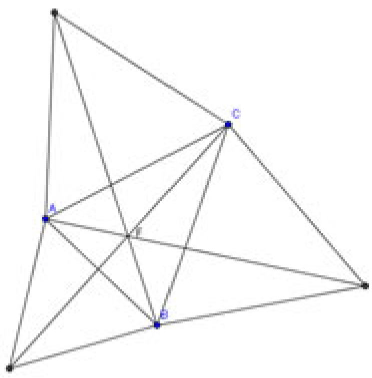
<u>Activitats proposades en dues dimensions</u>

Punt de Fermat

Treballarem amb una estructura formada per dues plaques planes i transparents unides per tres claus metàl·lics que formen un triangle acutangle. Primerament farem una conjectura sobre la figura que obtindrem, després farem l'experiment i projectarem el resultat amb el projector de transparències. Era correcta la conjectura que havíem formulat? Per què?

Observem que el que en l'estructura són parets de líquid, en projectar-la són segments de manera que la propietat que s'ha comentat de superfície total mínima, en la imatge projectada, passa a ser de longitud total mínima. Presentarem el punt de Fermat d'un triangle com aquell punt del pla tal que la suma de distàncies als tres vèrtexs és mínima i el visualitzarem en el resultat obtingut (vegi's la fotografia següent). Observarem també que els angles lliures entre les superfícies de sabó són tots de 120º (podem superposar-hi sectors de 120º retallats sobre transparències de colors).

Indicarem el mètode de construcció del punt de Fermat d'un triangle acutangle amb regla i compàs: sobre cada costat del triangle original construïm triangles equilàters i unim el vèrtex exterior de cadascun d'aquests triangles amb el vèrtex oposat d'aquell. Els tres segments es tallaran en el punt de Fermat. Vegi's l'esquema següent:



Com a aplicació es proposarà un triangle acutangle a l'atzar i un equip d'alumnes calcularà el seu punt de Fermat amb regla i compàs i el passarà sobre una transparència i un altre equip construirà una estructura amb plaques planes. Finalment comprovarem que el resultat que dóna el sabó sobre l'estructura real coincideix amb l'obtingut amb regla i compàs. Un bonic exemple d'aplicació pràctica d'un procediment matemàtic.

També pot fer-se una simulació del punt de Fermat estirant una corda que passa pels vèrtexs d'un triangle.

Problema de Steiner per a quatre punts

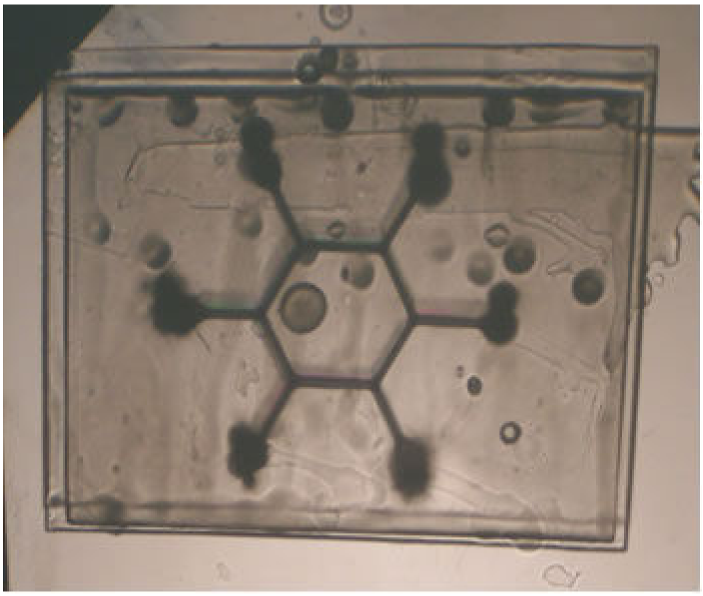
Ara treballarem amb una estructura formada per dues plaques planes i transparents unides per quatre claus metàl·lics que formen un rectangle. De nou farem una conjectura sobre el resultat que obtindrem (normalment l'alumnat pensa en les diagonals) i probablement el sabó ens tornarà a sorprendre Vegi's la fotografia següent. Per què passa això? Serà interessant mesurar les dues diagonals i la figura que ens dóna per comprovar que efectivament la "solució del sabó" minimitza la longitud total de la xarxa que uneixen els quatre punts donats.

Comprovarem també que, un cop més els angles són de 120º i, si volem, podem fer una simulació mitjançant una estructura de fusta amb cordes. Vegi's la fotografia següent:

Hexàgon regular

Treballarem amb una estructura formada per dues plaques planes i transparents unides per sis claus metàl·lics situats en els vèrtexs d'un hexàgon regular (els angles interiors ja són de 120º!). Què passarà? En aquest cas obtindrem el contorn menys un dels costats.

Si completem el costat que li falta a l'hexàgon i hi posem una bombolla a dins fins a obtenir un cercle a l'exterior observarem que l'àrea del cercle exterior és igual a l'àrea de l'hexàgon original més l'àrea del cercle interior format per la bombolla. En treure la bombolla interior recuperarem la forma hexagonal. Si absorbim aire obtindrem una imatge molt bonica com la que es mostra en la fotografia:

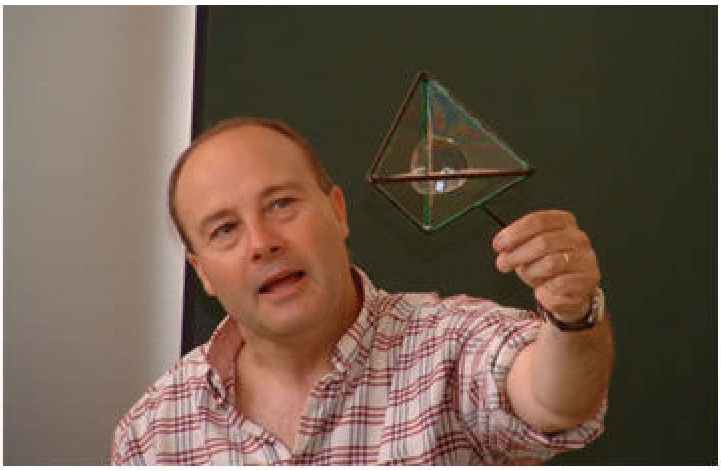


És interessant observar que tots els angles són de 120º i que la longitud total dels segments es manté constant en variar la mida de l'hexàgon interior.

Activitats proposades en tres dimensions

Tetràedre

Ara submergirem una estructura en forma de tetràedre i obtindrem sis làmines planes i triangulars que es tallen en quatre arestes que convergeixen en el baricentre del tetràedre, si és regular. L'angle díedre entre les cares és de 120º i l'angle entre les arestes que convergeixen en el baricentre és de 109º 28'. Si tallem alguna de les làmines obtindrem un bonic paraboloide hiperbòlic. Resulta interessant col·locar una bombolla sobre el baricentre i bufar amb l'ajut d'una palleta: apareix una figura tetraèdrica amb les cares lleugerament corbades sostinguda per sis làmines planes. Vegi's la fotografia següent.



Cub

En el cas d'una estructura cúbica apareixerà una làmina plana i quadrada en el centre sostinguda per dotze làmines planes en forma de trapezi. La simetria del cub ens permet observar que hi haurà tres solucions minimals que tindran la làmina central amb orientacions diferents. Passarem d'una a l'altra movent l'estructura!

Bufant amb una palleta en el pla central obtindrem un cub sostingut per les dotze làmines líquides.

Podrem trencar cares fins deixar les làmines de sabó inscrites tan sols en una estructura poligonal tridimensional tancada. Dóna una bonica superfície que soluciona, en un cas particular, l'anomenat problema de Plateau.

Prisma recte de base triangular

En aquest cas podrem observar els angles díedres que es formen en les cares laterals i els angles tríedres que es formen en les bases. Sempre els angles entre les cares són de 120º.

Octàedre

En aquest cas poden obtenir-se diferents formes (segons la qualitat del líquid, el moviment d'extracció...). Sovint, per passar d'una configuració a una altra, convindrà bufar o moure l'estructura. Totes les figures que s'obtenen són molt maques però resulta especialment fascinant una rosa dels vents tridimensional d'extraordinària bellesa. És bonic pensar que darrera aquestes formes tan harmonioses hi ha la condició que la superfície total sigui la mínima que passa per les 12 arestes de l'octàedre. Vegi's la fotografia següent.

Cercles i altres figures

Resulta molt interessant col·locar un fil fi, lligat formant un cercle, sobre la pel·lícula de sabó que queda suspesa en una anella. En principi el fil queda arrugat però, en trencar la part interna de la pel·lícula, el fil es tensa formant un cercle buit perfecte suspès a la làmina de sabó.

Amb una anella podrem formar bombolles esfèriques i amb dues anelles podrem generar figures com un cilindre o una catenoide.

<u>Activitats de caire més lúdic</u>

En aquest apartat podrien incloure-s'hi moltes activitats ja que les bombolles de sabó ofereixen un atractiu lúdic indiscutible: des de representar un rellotge de sorra fins a construir un molinet de bombolles que pot girar. Amb raquetes de tennis (sense cordes) podrem fer bombolles ben grans.

S'adjunta el fragment de vídeo V15 que mostra una aplicació d'aquest recurs.

CONNEXIONS: Són moltes. A continuació en citem algunes:

- En el camp de la física i de la química: idea de tensió superficial.

- En el camp de les ciències naturals: alguns insectes es mouen per sobre l'aigua gràcies a la tensió superficial, per exemple, els sabaters (*Gerris najas)*. Podem imaginar-nos les conseqüències de la pol·lució dels rius i els estanys per detergents.

- En el camp de l'arquitectura hem d'assenyalar construccions que utilitzen superfícies mínimes. És el cas de la coberta de l'Estadi Olímpic de Munic (1972) que està formada per 5 unitats de superfícies mínimes amb 8 punts de suport, 135 m de llum màxima, 55 m d'altura màxima, 2 punts de suspensió amb tres tensors que surten de cadascun i 29 punts d'ancoratge.

- En el camp de l'educació visual i plàstica i de l'art: les figures que es formen són realment de molta bellesa, representació plana de figures, creació de noves formes.

- Les estructures planes i tridimensionals poden construir-se en col·laboració amb l'àrea de tecnologia.

ALTRES COMENTARIS: L'estudi del comportament de les bombolles de sabó fou iniciat pel físic belga Joseph A. F. Plateau (1801-1883). Els matemàtics Richard Courant i Herbert Robbins van dedicar a la geometria de les bombolles de sabó quasi un capítol del seu famós llibre *"¿Qué es la Matemática?"* (1941). Des de la perspectiva didàctica hem de citar el llibre "*Ciencia Recreativa*" del professor Josep Estalella, publicat a principis del segle passat on ja descriu experiències amb bombolles de sabó per portar a l'escola. En el camp de la divulgació científica cal assenyalar que aquestes activitats estan presents en diversos museus de la Ciència: Cosmocaixa de Barcelona, Cosmocaixa de Madrid, la Villette de París, Atractor de Lisboa...

Acabarem aquesta fitxa fent algunes observacions que ens poden ser útils a l'hora de portar aquestes activitats a classe:

1. Els materials no són difícils de construir. Cal una mica de cura en preparar la mescla però això també pot incorporar-se a la dinàmica de la sessió.

2. Es tracta d'un conjunt d'activitats molt polivalent en dos sentits:

    - Pot realitzar-se a diferents nivells - del parvulari a la universitat - per què es presta a lectures diverses. En cada nivell podem tractar aspectes específics: les formes, el vocabulari matemàtic, els angles, les distàncies, les posicions relatives entre plans i rectes, les simetries, les representacions gràfiques, l'optimització, etc.

    - Pot tractar-se des de diverses matèries: matemàtiques, ciències experimentals, tecnologia, educació visual i plàstica, etc. En l'apartat de connexions ja ho hem fet observar.

3. L'enorme contingut lúdic d'aquestes activitats els atorga un especial efecte motivador però ens obliga a certes consideracions metodològiques:

    - Convé incorporar-les en un marc de treball científic tot evitant que l'alumne les contempli com a mers espectacles.

- Convé realitzar-les en vàries sessions de duració limitada tenint en compte que, passat un temps, l'activitat "explotarà" i caldrà permetre cert marge de joc lliure. En el quadre inicial hem estimat una durada de 30 minuts però dependrà de les activitats concretes que vulguem desenvolupar, dels grups, del grau d'interactivitat que establim...

- En determinats nivells por ser interessant que l'alumnat tingui un qüestionari o hagi d'elaborar un petit informe que el faci reflexionar sobre allò que ha observat i que el convidi a explicar-ho.

4. Convé tenir sempre en compte que, en aquest tipus d'activitats, hi convergeixen dos aspectes:

    - La constatació de les possibilitats que ofereix la Matemàtica per explicar, descriure i predir fenòmens naturals. És un bon àmbit per tal que el nostre alumnat s'apropi al poder modelitzador de les matemàtiques i comprengui millor les paraules de Galileu: "*El llibre de la naturalesa està escrit amb els caràcters de la geometria*".

    - Els components recreatius, lúdics, divertits... que ofereixen un gran efecte motivador. Es tracta de deixar-se seduir per l'encant d'aquestes figures, posar-hi creativitat, inventar-ne de noves i explorar, amb imaginació, l'immens camp de possibilitats que ofereixen.

Les fotografies que apareixen en aquesta fitxa han estat preses pel professor Rafael Torelló. No s'observa cap risc especial en aquestes activitats sempre que, en bufar o extreure bombolles, es tingui cura de no ingerir el líquid.