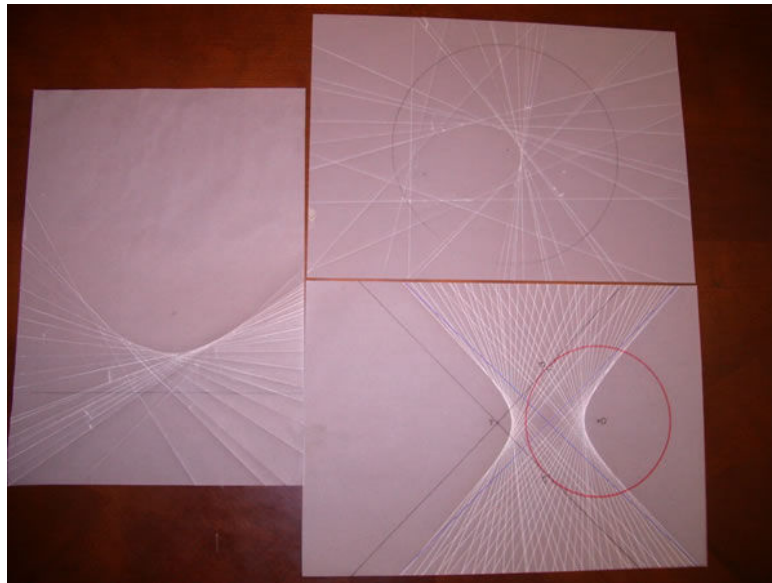


## TÍTOL: CÒNIQUES DOBLEGANT PAPER

<b>CLASSIFICACIÓ:</b>	C	MD SCMD	4 ESO 1 BAT	A L / G3 / T40	OQ	0
-----------------------	---	------------	----------------	----------------	----	---

**DESCRIPCIÓ DEL MATERIAL:** Per a cada grup de tres alumnes: tres fulls de paper vegetal, un compàs, un regle i un escaire.

### IMATGE:



**CONTINGUTS:** Concepte de cònica, el·lipse, paràbola i hipèrbola. Focus, directriu, excentricitat, rectes tangents a una corba i envolupant d'una família de rectes.

**PROPOSTA D'APLICACIÓ DIDÀCTICA:** Hi ha tres blocs d'activitats: la generació de les còniques, l'estudi posterior de les seves propietats i la construcció amb eines TIC. Cada equip de tres alumnes disposa de tres full de paper vegetal de manera que cada alumne/a s'encarregarà de treballar sobre un full i obtindrà una figura diferent:

- En un dels fulls dibuixarem una circumferència (força gran), assenyalarem el centre  $C$  i marcarem un altre punt qualsevol  $P$  a l'interior de la circumferència però diferent del centre (pot prendre's on es vulgui però el resultat final serà més bonic si s'escull de forma que sigui més proper a la circumferència que al centre). Doblegarem el paper de manera que el punt  $P$  se situï sobre la circumferència i marcarem ben fort el séc (podem passar-hi un objecte dur per tal que quedi més ben marcat). Tornarem a obrir el paper, el doblegarem de nou per situar el punt  $P$  sobre un altre punt de la circumferència i marcarem el plec ben fort. Anirem repetint aquesta operació superposant el punt  $P$  sobre molts punts de la circumferència. Quan hi ha diversos plecs fets, de vegades, pot costar una mica dominar el paper però, a poc a poc, es va veient que no és difícil. Cal tenir cura d'anar resseguint força bé tota la circumferència ja

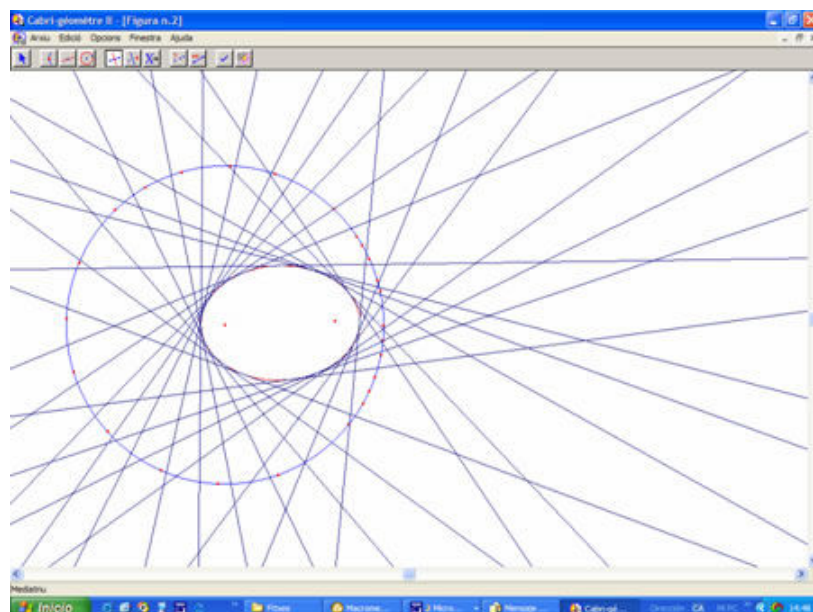
que si tan sols superposem P als punts d'una zona de la circumferència obtindrem famílies de plecs incompletes que no acabaran de marcar bé la figura. Serà bonic observar que, de mica en mica, s'anirà perfilant una el·lipse que tindrà per tangents les rectes representades pels plecs. Es tracta de l'anomenada envolupant de la família de rectes. Els focus d'aquesta el·lipse seran el centre C de la circumferència i el punt P escollit. Segons el punt P estigui més a prop de C o de la circumferència obtindrem el·lipses amb diferents excentricitats.

- En un altre full traçarem una recta (millor perpendicular al costat llarg del full i una mica descentrada de manera que el full quedarà dividit en dues parts diferents) i escollirem un punt P fora d'aquesta recta (millor en la part més gran del full i força centrat). Doblegarem el paper de manera que el punt P se situï sobre la recta i marcarem ben fort el séc (podem passar-hi un objecte dur per tal que quedi més ben marcat). Tornarem a obrir el paper, el doblegarem de nou per situar el punt P sobre un altre punt de la recta i marcarem el plec ben fort. Anirem repetint aquesta operació superposant el punt P sobre molts punts de la recta. Quan hi ha diversos plecs fets, de vegades, pot costar una mica dominar el paper però, a poc a poc, es va veient que no és difícil. Cal tenir cura d'anar resseguint força bé tota la recta ja que si tan sols superposem P als punts d'una zona de la recta obtindrem famílies de plecs incompletes que no acabaran de marcar bé la figura. Serà bonic observar que, de mica en mica, s'anirà perfilant una paràbola que tindrà per tangents les rectes representades pels plecs. Es tracta de l'envolupant de la família de rectes. El focus d'aquesta paràbola serà el punt P escollit i la directriu la recta traçada.
- En el tercer full dibuixarem una circumferència (no massa gran i lleugerament descentrada en el full), assenyalem el centre C i marcarem un altre punt qualsevol P a l'exterior de la circumferència (millor en la part de full on queda més espai). Doblegarem el paper de manera que el punt P se situï sobre la circumferència i marcarem ben fort el plec. Tornarem a obrir el paper, el doblegarem de nou per situar el punt P sobre un altre punt de la circumferència i marcarem el séc ben fort. Anirem repetint aquesta operació superposant el punt P sobre molts punts de la circumferència. Quan hi ha diversos plecs fets, de vegades, pot costar una mica dominar el paper però, a poc a poc, es va veient que no és difícil. Cal tenir cura d'anar resseguint força bé tota la circumferència ja que si tan sols superposem P als punts d'una zona obtindrem famílies de plecs incompletes que no acabaran de marcar bé la figura. Serà bonic observar que, de mica en mica, s'anirà perfilant una hipèrbola que tindrà per tangents les rectes representades pels plecs. Es tracta de l'envolupant de la família de rectes. Els focus d'aquesta hipèrbola seran el centre C de la circumferència i el punt P escollit. Segons el punt P estigui més o menys a prop de C obtindrem hipèrboles amb diferents excentricitats.

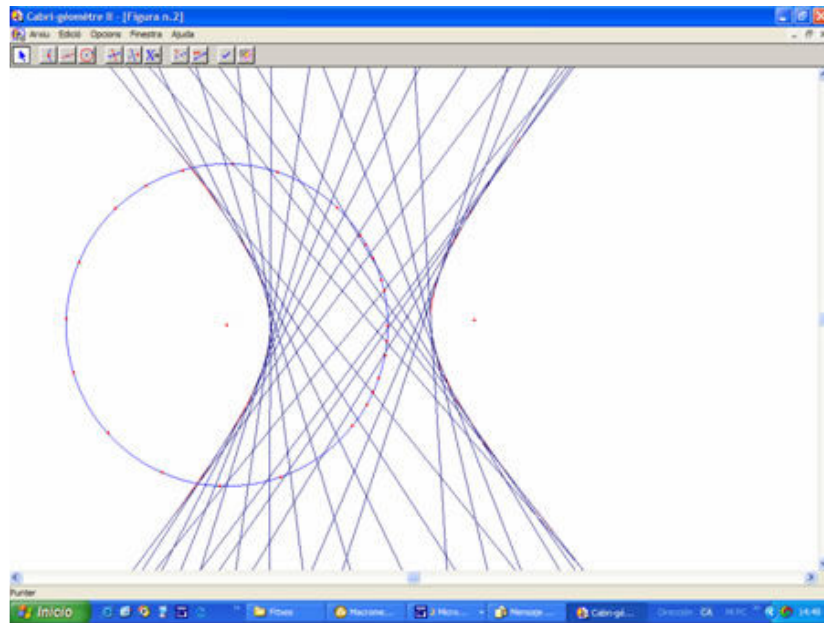
D'aquesta manera cada membre de l'equip haurà obtingut una cònica diferent i, en conjunt, tindran una el·lipse, una paràbola i una hipèrbola. Es demanarà que tothom, amb un llapis i molta cura, ressegueixi suaument el perfil de la cònica obtinguda. Així acabem el primer bloc d'activitats més constructiu i passem a un segon bloc d'activitats on cada equip treballarà conjuntament:

- Prendrem el primer dels fulls i ens preguntarem si estem segurs/es que aquella corba és, tal com hem dit, una el·lipse. No podem donar una resposta rigorosa però podem fer una certa comprovació: marcarem quatre punts sobre la corba i observarem que la suma de distàncies des de cada punt als dos focus és constant. Podem fer aquesta operació tan sols amb l'ajut d'un compàs i sense necessitat de prendre mesures: dibuixem en el mateix full un segment suficientment llarg i hi marquem un punt-origen, situem una punta del compàs en un dels punts marcats sobre l'el·lipse i l'obrim fins que l'altra punta estigui sobre un dels focus, traslladem aquesta distància sobre el segment a partir de l'origen, novament amb el compàs prenem la distància des del mateix punt a l'altre focus i la traslladem sobre el segment a continuació de l'anterior de manera que les dues longituds quedin sumades; en fer això per a cadascun dels punts seleccionats sobre l'el·lipse s'obindrà la mateixa longitud total.
- En el segon full comprovarem que la corba obtinguda és una paràbola observant (per a una mostra de punts) la igualtat de distàncies al focus i a la directriu. Per a mesurar aquesta última distància pot resultar còmode emprar l'escaire malgrat que es pot fer tan sols amb regle i compàs.
- En el tercer full comprovarem que la corba obtinguda es tracta efectivament d'una hipèrbola seleccionant diversos punts i observant que la diferència de distàncies als focus és constant. També pot fer-se amb el compàs però en lloc de situar les distàncies de manera consecutiva, les superposarem a partir d'un extrem comú de manera que es vegi clara la diferència que resultarà constant.

Un dels encants d'aquesta activitat és que, un cop feta doblgant paper, podem reproduir-la mitjançant un programa de construcció geomètrica com el Cabri-Géomètre: construïm la circumferència i un punt P en el seu interior, prenem un punt Q sobre la circumferència i tracem la mediatriu del segment que uneix P i Q (observem que aquesta mediatriu és el séc que fèiem abans en el paper). En moure el punt sobre la circumferència anirem obtenint tots els "plecs" i, si emprem la comanda "Lloc geomètric", ens donarà l'el·lipse. Vegi's la figura següent.



Ara bé el més bonic: en moure el punt P dins de la circumferència observarem com canvia l'excentricitat de l'el·lipse i, si el portem fora de la circumferència veurem com l'el·lipse passa a ser una hipèrbola. Vegi's la figura següent.



De manera anàloga, amb una recta i un punt, podem construir una paràbola.

Les figures que s'obtenen, tant sobre paper com en suport TIC, difícilment no recorden unes construccions-quadres que es fan amb agulles i fils i que representen còniques com a envolupants de les seves tangents que són trams de fil.

S'adjunta un guió dels dos primers blocs d'activitats. Per claredat les tasques que, en la present fitxa, es consideren simultànies, en el guió es van plantejant successivament de manera que primer es tracta l'el·lipse, després la hipèrbola i finalment la paràbola.

S'adjunta el fragment de vídeo V17 que mostra una aplicació d'aquest recurs i també la proposta de guió G14.

**CONNEXIONS:** Educació visual i plàstica, eines TIC de representació.

**ALTRES COMENTARIS:** Es tracta d'una activitat simple, sorprenent, dinàmica i molt instructiva però requereix un cert temps. És important que es doni prou temps per tal que es puguin fer molts plec i les formes quedin clares. Convé fer-ho amb molta cura ja que un plec mal fet no es pot esborrar i fa malbé la imatge conjunta. Per tal que les superposicions ressegueixin força bé totes les parts de la circumferència i de la recta (respectivament) pot ser convenient assenyalar un conjunt de punts, més o menys equidistribuïts, sobre els quals anirem fent coincidir el punt P. En lloc d'emprar paper

vegetal poden emprar-se fulls de paper normal però hi ha dos inconvenients: els plecs no es veuen tan bé (en el paper vegetal els plecs queden blancs) i costa més d'assegurar la superposició ja que és menys translúcid. En fer aquesta activitat l'alumnat ha de conèixer ja les definicions de les còniques com a llocs geomètrics i els seus elements (focus, directriu de la paràbola, rectes tangents...). La demostració rigorosa d'aquests resultats no és gens immediata i s'ha de fer a través de la integració d'unes equacions diferencials que es dedueixen a partir d'un procés analític poc trivial o bé, aplicant el teorema de Steiner dual. No s'observa cap risc especial en l'ús d'aquest recurs.