ESTUDI EXPERIMENTAL

D’UN TIR PARABÒLIC

Cristina Vázquez Pelegrí

2n Batxillerat

L’Anunciata – Dominiques

Novembre 2001

INTRODUCCIÓ

Quantes vegades hem seguit visualment el recorregut de la pilota xutada pel porter en un partit de futbol? En quantes ocasions hem observat un salt d'esquí amb l'ànsia de veure com acaba? En aquestes i moltes altres situacions relacionades amb l'àmbit esportiu podem observar que un cos o partícula descriu una trajectòria parabòlica.

La física és un món llunyà? Només fa falta una mínima atenció per comprendre que la física, aquesta històrica ciència, ens envolta i, conseqüentment, contínuament convivim amb ella.

Probablement Galileu o Newton, durant la seva vida van tirar algun objecte enlaire de manera que descrivís una trajectòria parabòlica. Ara, tot i que es mantenen els fonaments, la física també ha pogut palpar l'evolució del temps. Aquests avenços són els que, a nosaltres estudiants, ens permeten fer un exhaustiu estudi del tir parabòlic que descriu una pilota de bàsquet.

Així doncs, aquesta companya anomenada física engloba el nostre món, un món que evoluciona fins al punt que allò que tradicionalment s'ha definit com a "problema" passi a convertir-se en un interrogant que aspirem a respondre amb tots els nostres recursos i coneixements.

PLANTEJAMENT DEL PROBLEMA

A partir del llançament d'una pilota per part d'un jugador de bàsquet, tenim com a objectiu arribar a respondre els següents aspectes relacionats amb aquest tipus de moviment..

Problema 1: Quina és l'equació del moviment amb la qual es desplaça el mòbil?

Problema 2: Quin és l'angle respecte l'horitzontal amb què es produeix el tir?

Problema 3: Amb quina velocitat inicial és llançada la pilota?

Problema 4: Sota quina acceleració de la gravetat està sotmès el cos al llarg del recorregut?

Problema 5: Quin és l'abast horitzontal màxim que assoleix la pilota?

- Quant de temps triga en fer-ho?

Problema 6: A quina alçada màxima arriba el mòbil durant el recorregut?

- Quin espai ha recorregut fins a aquest moment?

Problema 7: Quin és el radi de curvatura en el punt més alt de la trajectòria?

Problema 8: Quina és l'equació de la trajectòria que descriu la pilota des del moment en que la tirem fins que és encistellada?

METODOLOGIA

3.1 CONEIXEMENTS PREVIS

Abans d'iniciar-nos en l'estudi del tir parabòlic, considero imprescindible fer una breu anotació referent als diferents conceptes teòrics relacionats amb aquest tipus de moviment.

A quin camp de la Mecànica pertany el tir parabòlic?

Dins del món de la física trobem la *Mecànica,* considerada com la branca d'aquesta ciència que estudia el canvi de lloc, el desplaçament o el moviment locatiu tant dels cossos com dels corpuscles microfísics.

El gran grup de la mecànica inclou la *cinemàtica* i la *dinàmica*; mentre que la segona té per objecte el procés físic pel qual dos o més mòbils es modifiquen mútuament el moviment (interacció mecànica) mitjançant un camp, la cinemàtica comprèn les relacions geomètriques i cronomètriques en els moviments.

Així doncs, podem determinar que el tir parabòlic està inclòs dins la Cinemàtica.

CINEMÀTICA → Part de la mecànica que estudia els moviments sense tenir en compte les causes que els originen (forces, masses), sinó que més aviat en descriu la geometria. És una construcció purament descriptiva i també rep el nom de *geometria del moviment.*

3.1.1. MAGNITUDS DEL MOVIMENT EN DUES DIMENSIONS

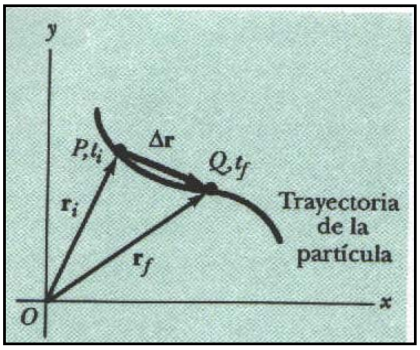
El moviment en dues dimensions, a diferència del d'una dimensió que transcorre sobre una recta, es mou en el pla.

Així doncs inicialment, de manera breu, exposarem les principals magnituds d'aquest tipus de moviment.

- Vector de posició

Per tal de determinar en quin punt del pla xy es troba el cos en qualsevol moment, fem ús d'aquest vector que va des de l'origen fins el punt P en el qual es troba en el t_n.

En la figura 1, s'observa el canvi que ha experimentat la partícula al llarg de dos instants de temps.



En el temps t_i la partícula es troba en el punt P, i en l'instant posterior t_f la partícula es troba al a Q. Quan la partícula es mou de P a Q en l'interval de temps $\Delta t = t_f - t_i$, el vector de posició canvia d'$\mathbf{r}_i$ a $\mathbf{r}_f$. Aquesta variació suposa l'aparició d'un nou concepte que s'exposa a continuació.

- Vector desplaçament

Basant-nos en que el desplaçament d'una partícula és la diferència entre la seva posició final i la seva posició inicial, podem definir el *vector desplaçament* d'una partícula com la diferència entre el seu vector de posició final i el seu vector de posició inicial: $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$.

A partir de la *figura 1* podem afirmar que la magnitud del vector desplaçament és menor que la distància recorreguda al llarg de la trajectòria corba.

Una partícula que es mou en el pla xy es localitza amb el vector de posició **r** dibuixat des de l'origen de la partícula. El desplaçament de la partícula quan es mou de P a Q en l'interval de temps $\Delta t = t_f - t_i$ és igual al vector $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$.

- Velocitat mitjana

Definim la *velocitat mitjana* de la partícula durant l'interval de temps Δt com la raó entre el desplaçament i l'interval de temps:

$$\bar{\mathbf{v}} \equiv \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Donat que el desplaçament és una quantitat vectorial i l'interval de temps és una quantitat escalar, podem concloure que la velocitat mitjan és una quantitat vectorial dirigida al llarg de Δr.

El seu valor és proporcional al desplaçament, el qual, depèn només dels vector de posició inicial i final i no de la trajectòria seguia entre aquests dos punts; així doncs, si una partícula comença el seu moviment en algun punt i torna a ell per qualsevol trajectòria, la seva velocitat mitjana és zero.

- Velocitat instantània

Si observem la **Figura 2**, podem apreciar que en tan bon punt els intervals de temps sobre el s que observem el moviment es tornen més i més petits la direcció de desplaçament tendeix a la de la línia tangent a la trajectòria en el punt P.

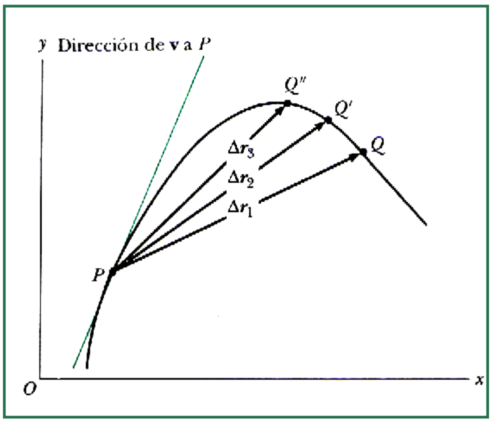


Figura 2. Quan una partícula es mou entre 2 punts i el punt final de la trajectòria es mou de Q a Q' i a Q", els desplaçaments i els corresponents intervals de temps es tornen més i més petits. Quan el punt final s'aproxima a P, Δt tendeix a zero i la direcció de Δ**r** s'apropa a la de la línia tangent a la corba en P.

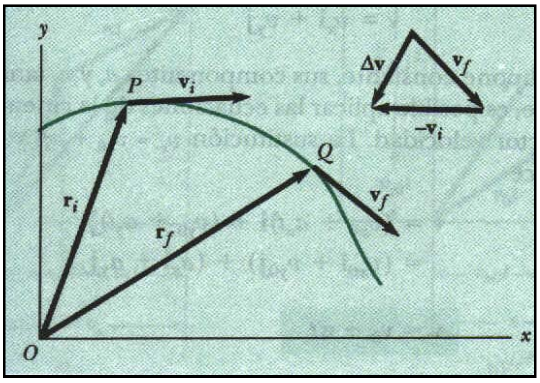
La *velocitat instantània*, v, es defineix com el límit de la velocitat mitjana quan Δt tendeix a zero:

$$\mathbf{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

A partir d'aquesta expressió matemàtica també la podem dir que és igual a la derivada del vector de posició respecte del temps. La direcció de v en qualsevol punt en una trajectòria de la partícula està al llarg de la línia que és tangent a la trajectòria en aquest punt i en la direcció del moviment.

- Acceleració mitjana

En base a la **Figura 3** que es mostra a continuació, podem observar que a mesura que una partícula es mou d'un punt a un altre al llarg de la trajectòria, **v** canvia de $\mathbf{v}_i$ a $\mathbf{v}_f$.



Definim *acceleració mitjana* d'una partícula quan es desplaça de P a Q com la raó de canvi del vector de velocitat instantània, Δ**v**, en el temps transcorregut, Δt:

$$\bar{\mathbf{a}} \equiv \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

A partir d'aquesta fórmula, tal com succeïa amb la *velocitat instantània*, podem definir l'*acceleració instantània* com la derivada del vector velocitat respecte al temps.

↳ Ara, un cop hem analitzat les principals magnituds presents en tot moviment bidimensional, ja podem centrar-nos en una de les principals variants que aquest presenta: **El tir parabòlic**

3.1.2. EL TIR PARABÒLIC

El tir parabòlic, o també anomenat *moviment de projectils*, de manera general podem determinar que és el que descriu una pilota de bàsquet (o qualsevol objecte tirat a l'aire). El cos es mou en una trajectòria corba quan es llança amb un cert angle respecte de la superfície de la Terra.

Aq3uest tipus de moviment pot ser fàcilment estudiat si tenim en compte els dos punts següents:

1. L'acceleració de caiguda lliure, *g,* és constant en tot l'interval de moviment i està dirigida cap avall (aproximació raonable sempre que l'interval de moviment sigui petit comparat amb el radi de la Terra.).
2. L'efecte de la resistència de l'aire pot ignorar-se (generalment aquesta aproximació no es justifica.)

Amb aquestes dues suposicions, trobem que la corba que descriu el projectil és sempre una paràbola.

Abans de definir les magnituds referents a aquest moviment, cal destacar que en el cas de la **Figura 4** i en la majoria dels casos, s'elegeix un sistema de referència en el que la direcció *y* sigui vertical i positiva cap dalt, de manera que $a_y = -g$, i $a_x = 0$ perquè en aquest eix es descriu un moviment rectilini.

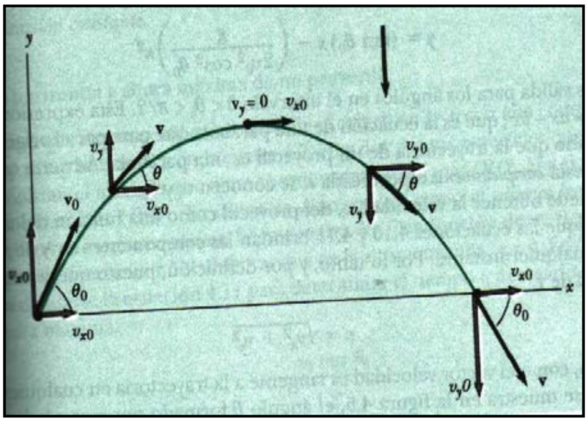


Figura 4: Trajectòria parabòlica que parteix de l'origen amb $\mathbf{v}_0$. El vector velocitat **v** canvia en el temps en magnitud i dimensió., a causa de l'acceleració en direcció *y* negativa. El component *x* de la velocitat és constant ja que no hi ha acceleració al llarg de la direcció horitzontal. A més, el component *y* de la **v** és zero en el punt més alt de la trajectòria.

Basant-nos en que v_o forma un angle θ_o amb l'horitzontal podem establir les següents definicions del sinus i el cosinus:

$$\text{Cos } \theta_o = v_{xo} / v_o$$

$$\text{Sin } \theta_o = v_{yo} / v_o$$

De manera que les components inicials d'x i y de la velocitat són:

$$V_{xo} = v_o \cos \theta_o$$

$$V_{yo} = v_o \sin \theta_o$$

Així doncs, podem obtenir les següents expressions referents a la velocitat vertical i horitzontal, així com de la posició horitzontal i vertical:

$$v_x = v_{x0} = v_0 \cos \theta_0 = \text{constante}$$

$$v_y = v_{y0} - gt = v_0 \text{ sen } \theta_0 - gt$$

$$x = v_{x0} t = (v_0 \cos \theta_0)\ t$$

$$y = v_{y0} t - \tfrac{1}{2} g t^2 = (v_0 \text{ sen } \theta_0)\, t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

Figura 5

Amb la combinació d'aquestes expressions dues a dues, podem treure el vector velocitat i el vector de posició:

- **r** = $[(v_o \cos\theta)\ t]$ **i** + $[y_o + (v_o \sin\theta)t - gt^2)]$ **j**
- **v** = $(v_o \cos\theta)$ **i** + $[(v_o \sin\theta) - gt]$ **j**

Tornant a fer al·lusió a la *figura 5*, si en l'expressió d'x aïllem el temps i el substituïm en la d'y, obtenim *l'equació de la trajectòria:*

$$y = (\tan\theta_0)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)x^2$$

Tal com podem observar es tracta d'una equació parabòlica, de manera que es reafirma que la trajectòria que descriu un projectil és una paràbola.

D'altra banda, si volem conèixer la magnitud de **v**, a partir de la component x i y d'aquesta, obtenim aquesta expressió:

$$V = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}$$

De la mateixa manera, com el vector velocitat és tangent a la trajectòria en qualsevol instant, l'angle θ format amb *v* amb la horitzontal, es pot obtenir:

$$\text{Tan}\ \theta = v_y / v_x$$

A partir d'aquests anteriors estudis podem concloure amb què el moviment de projectils és la superposició de dos moviments:

- moviment a velocitat constant en la direcció inicial
- el moviment d'una partícula que cau lliurement en la direcció vertical sota acceleració constant.

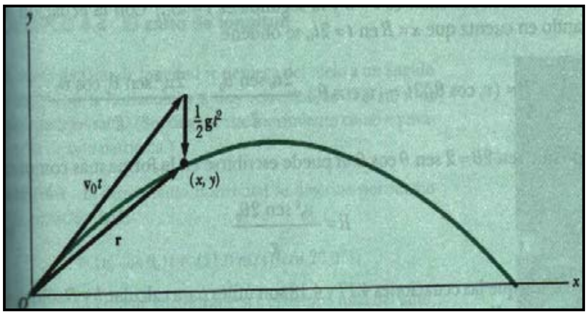
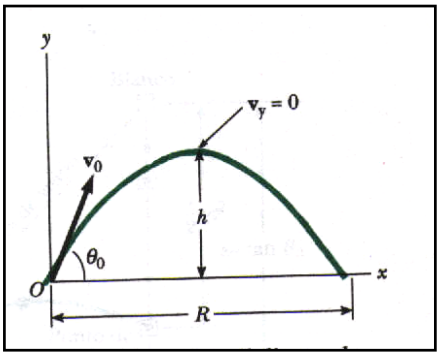


Figura 5: Vector desplaçament **r** d'un projectil amb velocitat inicial en l'origen de $\mathbf{v_o}$. El vector v_0t seria el desplaçament d'un projectil si no hi hagués gravetat, i el vector 🗁 $\mathbf{g}t^2$ és el seu desplaçament vertical degut a la seva acceleració gravitacional cap baix.

- **Abast horitzontal i alçada màxima**

Abans de formular qualsevol tipus de definició relacionada amb aquests dos punts, s'adjunta la **Figura 7** en la qual s'observa la trajectòria del mòbil des del moment que és llançada fins que arriba a terra.



Així doncs, suposem que un projectil es llança des de l'origen t = 0 amb una component v_y positiva, tal com es mostra en la figura. Hi ha dos punts especials que és interessant analitzar: es tracta del màxim que té coordenades cartesianes (R/2, h) i el punt que té coordenades (R, 0). La distància R es coneix com *l'abast horitzontal* del projectil i h és *l'altura màxima.*

Per determinar *h* cal tenir en compte que en l'alçada màxima v_y= 0. En conseqüència podem utilitzar l'equació d'v_y per determinar el temps t_1 necessari per arribar a l'alçada màxima:

$$t_1 = \frac{v_0 \text{ sen } \theta_0}{g}$$

Al substituir aquesta expressió en l'equació d'y, de manera que obtenim h en funció de v_o i θ_o:

$$h = (v_0 \text{ sen } \theta_0)\,\frac{v_0 \text{ sen } \theta_0}{g} - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \text{ sen } \theta_0}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{v_0^2 \text{ sen}^2 \theta_0}{2g}$$

D'altra banda l'abast, R, és la distància horitzontal recorreguda en el doble de temps necessari per assolir l'alçada màxima. Aquest aspecte pot veure's al fer que y= 0 en l'equació d'y; una solució d'aquesta equació és t= 0 i la segona és t= 2t_1. Amb l'equació d'x tenint en compte que x= R en t= 2t_1, obtenim la següent expressió:

$$R = (v_0 \cos \theta_0) 2t_1 = (v_0 \cos \theta_0) \frac{2v_0 \operatorname{sen} \theta_0}{g} = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0}{g}$$

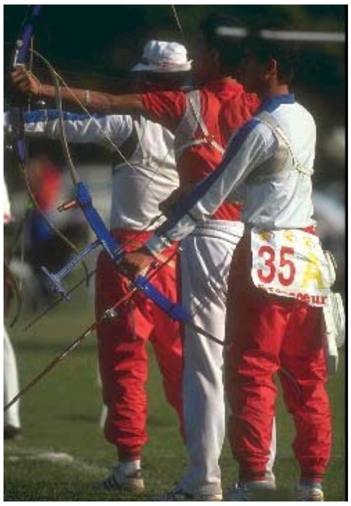
$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{g}$$

No hem d'oblidar, però, que aquestes equacions són útils per calcular *h* i *R* només si v_o i θ_o es coneixen i només per a una trajectòria simètrica, com en la de la *figura 7.*

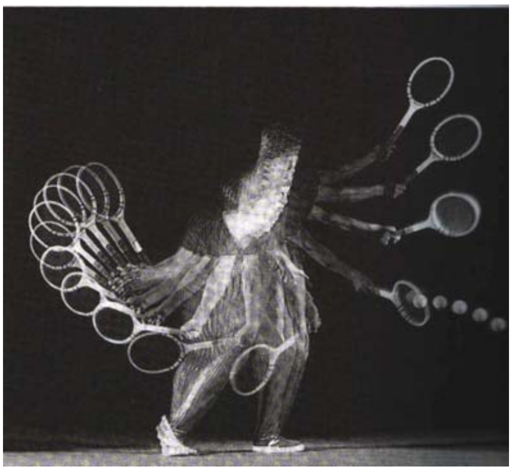
3.1.3. MANIFESTACIONS DEL MOVIMENT PARABÒLIC

Si mirem al nostre entorn, de ben segur podrem trobar alguna manifestació d'aquest tipus de moviment.

Un dels camps que el qual és més habitual és l'àmbit esportiu. A continuació es mostren diverses fotografies en les que l'esportista o l'instrument emprat descriurà la trajectòria pròpia d'un tir parabòlic.

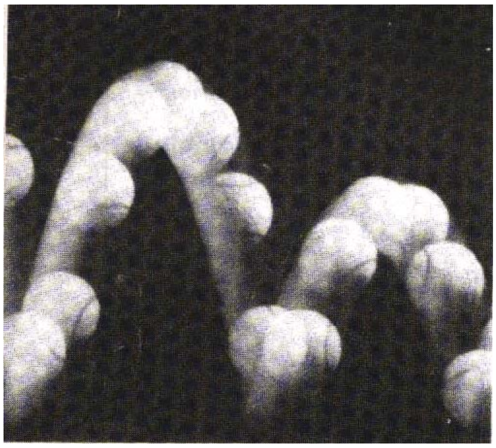


Un esport en el qual s'observa clarament aquest tipus de moviment és el tennis:

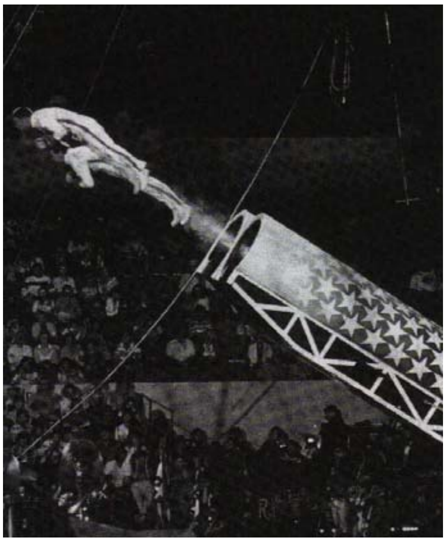


Exposició dels raigs de llums múltiples d'un jugador de tennis executant un cop de dreta. Cal observar que la bola segueix una trajectòria parabòlica característica d'un projectil. Aquest tipus de fotografies poden utilitzar-se per estudiar la qualitat de l'equip esportiu i el rendiment d'un atleta.

La fotografia dels raigs de llum múltiples d'una bola de tennis que dóna varis bots sobre una superfície dura és un exemple del moviment de projectils. Cal adonar-se de la trajectòria parabòlica que la pilota segueix després de cada bot.



També en el món de l'espectacle podem trobar alguna d'aquestes manifestacions:



Els homes de pedra de circ que són disparats per canons són projectils humans. Ignorant la resistència de l'aire, es mouen en trajectòries parabòliques fins que aterren a la red col·locada estratègicament, de manera que hi ha uns especialistes encarregats de determinar la col·Locació correcta de la red per agafar-los.

3.2. DISSENY EXPERIMENTAL

3.2.1 PROCEDIMENT

Mitjançant el suport d'un vídeo-clip analitzarem la trajectòria parabòlica que descriu una pilota de bàsquet des del moment en que és llançada fins que arriba a la cistella.
A més, amb l'ajut d'un software especialitzat podrem fer un complet estudi dels principals trets del tir parabòlic anteriorment descrits.

3.2.2 MATERIAL I UTILLATGE

Per poder portar a terme aquest estudi ens hem d'ajudar de les últimes tecnologies del món informàtic, de manera que l'ordinador serà l'element imprescindible.
El material a utilitzar és: Vidshell, Curve Expert, Word i llibres de text.

- VIDSHELL
    - *HISTÒRIA*

Comentari de, Doyle V. Davis, el seu autor: "*Vidshell va ser desenvolupat com a conseqüència de la meva primera experiència primer com a participant (1990) i més endavant com un líder del taller en NSF similar tres va patrocinar els tallers sostinguts en l'acadèmia de la força aèria dels Estats Units en 1993, 1994 i 1995. El tema d'aquests tallers era l'ús de les tecnologies multimèdia interactives en l'ensenyament de la física. Els tallers van ser conduïts pel Dr. Roberto Fuller de la universitat de Nebraska amb l'ajut de l'acadèmia de l'USAF (universitat de Kalamazoo), del degà Zollman (universitat d'estat de Kansas), i d'Evelyn Patterson (Co-director 1993-95) de David, David Wagner (universitat) d'Edinbourgh. Decidia desenvolupar Vidshell fora del meu propi interès personal en utilitzar el vídeo convertit en digital per ensenyar la física. Ha estat provat pels estudiants de nombroses facultats del llarg dels Estats Units i de Canadà. Distribueixo Vidshell lliurement a qualsevol estudiant o professor de física.*"

- ***REQUISITS MÍNIMS DE L'EQUIP***

Vidshell funcionarà amb Windows de Microsoft 3.11 o el sistema operatiu de Windows 95, 98 o Millennium de Microsoft. Un 80486DX/33 o superior amb almenys 8 MB de l'Espolón és essencial.

Es necessitarà un mínim de 9 MB de l'espai del disc dur per sostenir l'ús.

En el cas que es descarregui el paquet dels vídeo-clips, es necessitaran 31 MB addicionals de l'espai del disc dur per al subdirectori de c:/vidshell.

El programa pot ser descarregat d'internet a partir d'aquesta pàgina de la www: *webphysics.tec.nh.us/vidshell/clips.html*

Important: La pantalla gràfica de Vidshell s'ha dissenyat amb al voltant de 640x 480 resolucions de la pantalla per mostrar els vídeo-clips que són 320 píxels d'ample i 240 en alçada. Per aquest motiu s'ha de fixar la pròpia pantalla a 640x 480 en comptes de les resolucions més altes mentre s'utilitza el Vidshell.

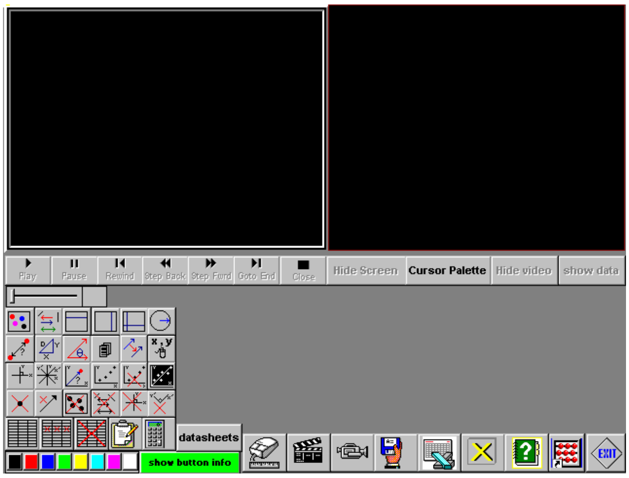
A més, abans d'iniciar qualsevol aplicació cal que els en la "Configuración Regional" del Panel de Control els decimals vinguin expressats amb el punt i els milers amb la coma.

- ***APARENÇA I FUNCIONAMENT***

Abans de començar a utilitzar el programa convé tenir uns mínims coneixements relacionats amb el funcionament d'aquest.

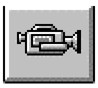
En el moment que seleccionem l'icona del programa ens apareix el que podem anomenar "portada del Vidshell".

Un cop hem pitjat sobre qualsevol punt de l'anterior pantalla ens apareix aquesta, sobre la qual es porten a terme totes les qüestions i estudis dels vídeos.

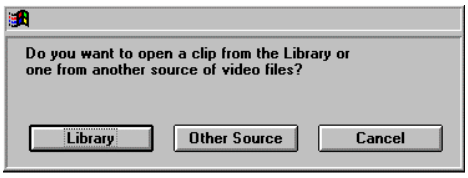


A continuació farem una breu explicació de la utilitat dels diferents elements que podem observar.

Quan polsem sobre aquest botó i passa a ser verd, en moure el ratolí per sobre els objectes de la finestra principal, una breu descripció de la seva funció apareix en un camp del text de la finestra. Així doncs, en permet aconseguir la informació ràpidament sobre la funció de cada botó de la finestra de Vidshell.



Aquesta vídeo-càmera ens serveix per obrir un vídeo-clip de la llista. Quan premem aquesta icona ens apareix el següent quadre de diàleg:



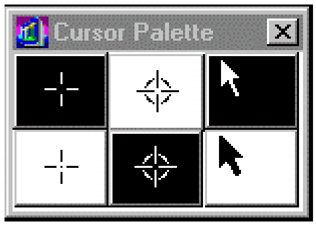
A partir d'aquí podem seleccionar el clip d'una de les dues biblioteques que proporciona el programa. Cal destacar que si seleccionem "Other Source" podrem fer ús de les nostres pròpies grabacions; si, contràriament anem a "Library" tindrem accés als 30 fitxers .avi que hi ha originalment.

Quan ja hem seleccionat el vídeo que volem, amb aquesta paleta podem controlar la grabació ja sigui posant-lo en marxa o situant-lo en el punt que nosaltres desitgem.

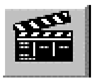
Mitjançant aquesta paleta tenim accés a les opcions del "display"

El primer botó *Hide/Show screen* permet mostrar o amagar els elements de la pantalla.

El segon, *Cursor Palette*, ens mostra una paleta amb diversos cursos que podem utilitzar mentre anem treballant.

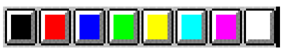


El següent, *Show/Hide video*, ens ajudarà a amagar o mostrar el vídeo que volem utilitzar.

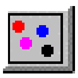


Prement sobre aquest símbol podem definir un nou vídeo per afegir a la llista de vídeo-clips. Per a fer ús d'aquest botó cal tenir instal·lat el ToolBook II.

Ens serveix per calibrar el ratolí per tal de mesurar elements mitjançant una escala determinada. Quan ho pitgem ens apareix un quadre de diàleg que ens explica com calibrar el vídeo i ens pregunta les unitats amb les que volem treballar.

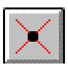


Ens permet escollir colors pels punts i línies que volem dibuixar. Per fer-ho tan sols cal seleccionar el color que escollim.

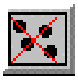


Serveix per marcar punts en els marcs del vídeo clip un cop hem seleccionat un color determinat.

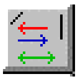
Per esborrar punts que hem marcat en el vídeo tenim els següents botons:



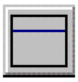
Serveix per esborrar un punt en concret.



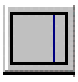
Permet esborrar tots els punts que s'han marcat sobre la finestra del vídeo. En prémer-ho apareix un quadre de diàleg per confirmar-ho.



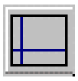
Amb aquest botó podem dibuixar línies sobre el vídeo. Un cop traçada la línia es pregunta si es vol col·locar una fletxa a l'extrem.



Per dibuixar una línia horitzontal a través de la finestra hem d'utilitzar aquesta icona.

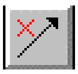


En el cas que la línia que volem sigui vertical, farem servir aquest altre símbol.

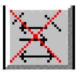


Mitjançant aquest botó podem dibuixar línies perpendiculars al llarg de la pantalla. És especialment útil quan estudiem el moviment d'un projectil per tal d'analitzar-ne tant el desplaçament vertical com l'horitzontal.

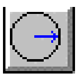
En el cas que vulguem esborrar les línies traçades podem utilitzar qualsevol d'aquestes icones:



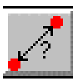
Per esborrar una única línia.



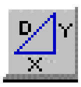
Aquest altre ens permet esborrar totes les línies que hem marcat. Novament se'ns preguntarà per assegurar l'execució de l'acció.



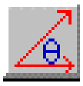
Per dibuixar un cercle amb un radi determinat podem utilitzar aquest símbol. Per esborrar-lo tan sols ens cal prémer el botó dret del ratolí.



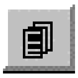
Per mesurar distàncies entre punts marcats utilitzem aquest botó. Aquesta acció no pot ser executada fins que no hem calibrat la imatge. La distància entre els punts és mostrada en un quadre de text just a la dreta de la paleta.



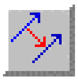
Aquest botó és utilitzat per dibuixar un vector desplaçament juntament amb els seus components.



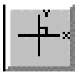
Amb aquesta icona podem mesurar angles. Per fer-ho tan sols cal puntejar sobre el vèrtex de les línies de les que en volem saber l'angle.



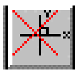
Mitjançant aquest botó podem copiar un objecte. Es poden copiar tants objectes com es vol però cal evitar ocupar un excés d'espai en la pantalla.



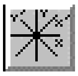
Per desplaçar un objecte d'un punt a un altre de la finestra del vídeo utilitzem aquest botó. Mentre desplacem l'objecte fins a un punt determinat hem de tenir pitjat el botó dret del ratolí.



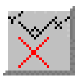
Amb aquest símbol podem crear un sistema de coordenades. Un cop hem marcat el punt hem de triar el sentit positiu horitzontal i vertical. Quan ho hem fet ens apareixen un eixos grocs. Aquest és el primer pas per fer la recollida de dades i captar-les en una taula.



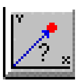
Per esborrar el sistema de coordenades que hem marcat utilitzem aquest botó.



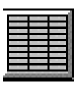
A part de crear un sistema de coordenades estàndard, aquest símbol ens permet dibuixar un sistema de coordenades rotacional.



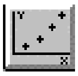
Aquest botó serveix per esborrar el sistema de coordenades rotacional que hem dibuixat.



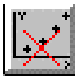
Quan volem mesurar la distància des d'un punt al sistema de coordenades que hem definit utilitzem aquesta icona. En aquesta ocasió també apareix la distància entre els dos punts en un quadre de text.



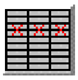
En seleccionar aquesta quadrícula hem de determinar el nombre de diapositives per segon que té el vídeo. Aquest valor varia en funció de cada vídeo-clip i se'ns mostra quan busquem les propietats d'aquest.



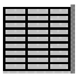
Per fer un gràfic a partir de la taula de dades utilitzem aquest botó. Abans de construir-lo hem d'escollir quines variables volem representar i en quin eix ha d'aparèixer cadascuna d'aquestes.



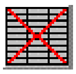
Per esborrar el gràfic que hem dibuixat abans de fer-ne un de nou cal fer servir aquest símbol.



Per esborrar un punt determinat de la pantalla així com les dades de la taula que en fan referència podem pitjar aquest símbol. Un cop seleccionat la taula és actualitzada.

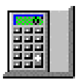


Aquest botó serveix per tornar a marcar un punt que anteriorment hem esborrat. Un cop el procediment és portat a terme la taula torna a actualitzar-se amb la nova dada.

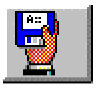


Aquesta altra quadrícula serveix per esborrar totes les dades que apareixen a ala taula. Es dóna la oportunitat de retrocedir en aquest procediment si ho desitgem.

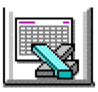
Si l'estudiant vol crear un propi bloc de notes mentre fa ús de l'aplicació pot utilitzar aquesta icona. Aquests comentaris posteriorment poden ser impresos o guardats en un fitxer.



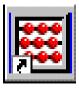
El programa també inclou una calculadora que pot utilitzar-se en qualsevol moment d'un mode senzill.



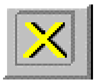
Aquest botó permet guardar les dades que hem recollit en un disc de 3'5 en un nou fitxer o en un existent.



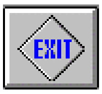
Aquest símbol serveix per exportar les dades recollides per tal de que posteriorment puguin ser estudiades amb l'Excel. La finestra d'Excel apareix a la pantalla de manera minimitzada, de manera que s'haurà de maximitzar quan ho vulguem fer anar.



Si volem exportar les dades recollides al programa MathCad, podem utilitzar aquesta icona.



Aquest botó ens és útil quan volem cancel·lar una operació que em fet tal com marcar un punt, dibuixar una línia, ...



Quan volem acabar la sessió en aquest programa pitgem aquest botó que ens tanca el Vidshell.

↳ Ara que ja coneixem totes les funcions que poden ser portades a terme amb aquest programa ja estem a punt de fer el nostre estudi particular.

3.2.3. ESTUDI DEL TIR PARABÒLIC

El vídeo escollit per estudiar aquest moviment és el "*Basket*".

A continuació es mostren els passos per poder respondre tots els problemes que ens hem qüestionat inicialment.

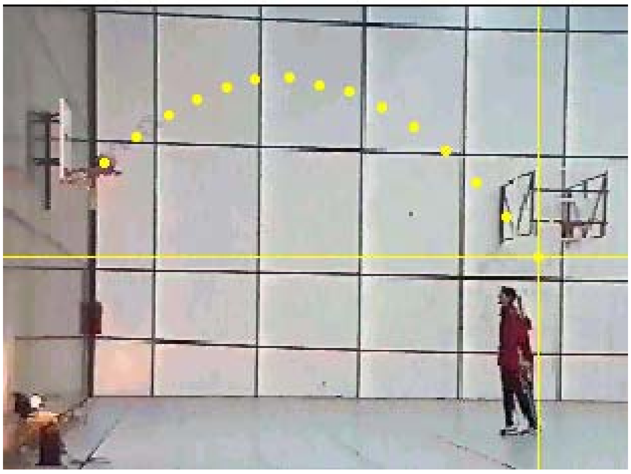
1- Seleccionem el fitxer basket.avi de la llista.
2- Quan ja l'hem vist el tirem enrera de manera que aparegui l'alçada de cistella (3.05)
3- Amb aquesta mesura ja podem calibrar el ratolí; les unitats que utilitzarem són els metres.
4- Anem avançant seqüències fins al llançament de la pilota. En aquest punt introduïm el sistema de coordenades estàndard de manera que el sentit positiu dels eixos sigui cap a l'esquerra i cap dalt.
5- En aquest moment determinem el nombre de diapositives per segon, que en aquest cas és: 1/25. I en el quadre de diàleg que apareix posteriorment seleccionem l'opció *x,y,z* i el sistema de coordenades *estàndard.*
6- A partir d'aquí ja anem marcant la trajectòria a mesura que anem avançant les seqüències fins al punt que la pilota està entrant a la cistella.

7- Un cop feta tota la recollida de dades ja podem fer la representació gràfica d'x-t, y-t i x-y anotant en cada cas l'equació que se'ns mostra.
8- Per tal de determinar tant l'abast com l'alçada màxima hem d'utilitzar paral·leles i a partir d'aquí fer ús de la funció que ens permet mesurar la distància entre dos punts.
9- Pel que fa a l'angle inicial, podem utilitzar aquesta funció directament del programa o bé calculant la tangent de la velocitat inicial a l'eix y entre la de l'eix x.
10- Tot i que amb el Vidshell se'ns ofereix l'oportunitat de fer la representació gràfica, és recomanable fer-ho amb el CurveExpert degut a les nombroses utilitats que té a l'hora de fer una bona representació.

RESULTATS OBTINGUTS, ANÀLISIS I DISCUSSIÓ

Un cop hem anotat tots els punts conceptuals i els referents al funcionament del programa amb el que treballem, ja podem mostrar els resultats que hem anat obtenint. Per fer-ho seguirem l'ordre dels problemes que hem plantejat inicialment.

Després d'haver traçat tots els punts que defineixen la trajectòria de la pilota la imatge ens queda de la següent manera:



n	x	y	T
1	0	0	0
2	0.37	0.47	0.08
3	0.72	0.86	0.16
4	1.07	1.23	0.24
5	1.44	1.51	0.32
6	1.82	1.75	0.4
7	2.19	1.93	0.48
8	2.54	2	0.56
9	2.89	2.1	0.64
10	3.28	2.07	0.72
11	3.61	1.98	0.8
12	3.96	1.84	0.88
13	4.28	1.65	0.96
14	4.66	1.4	1.04
15	5.03	1.09	1.12

Tal com podem observar hem situat el sistema de referència al punt en el qual es tira la pilota i els punts s'han anat marcant fins al moment que arriba a la cistella.

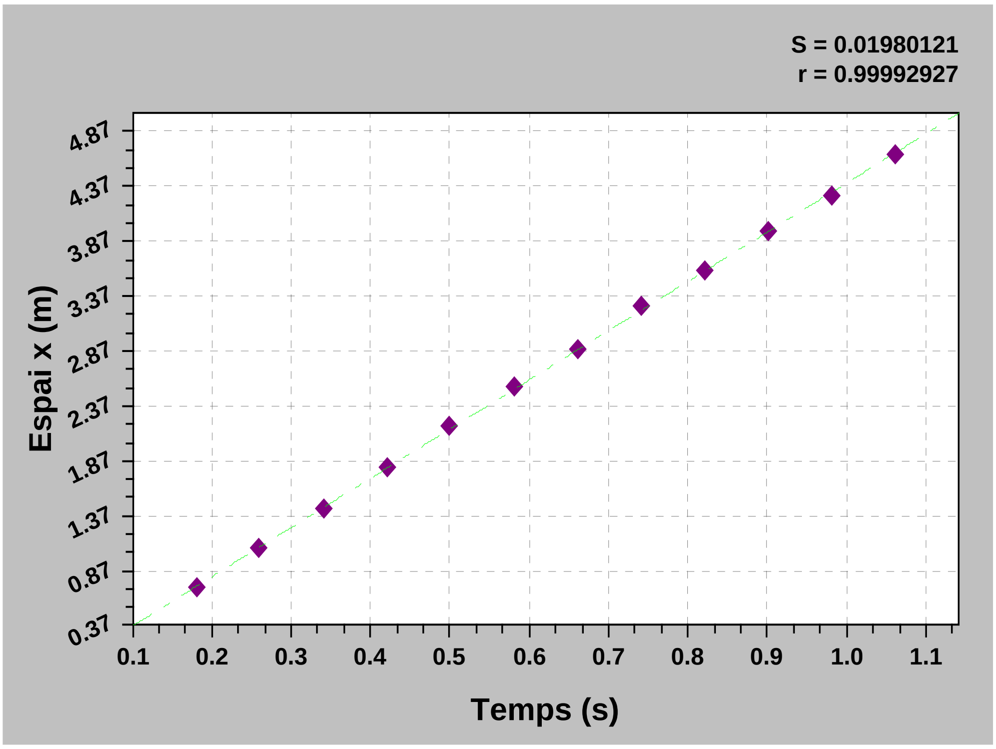
Juntament amb la imatge tenim la taula de valors corresponent.

A partir de les dades anteriors ja podem començar a resoldre els problemes plantejats. Aquesta resolució la farem mitjançant el programa Curve Expert que ens permetrà fer ús de la informació obtinguda.

Problema 1

Per tal d'aconseguir l'equació del moviment, cal que, primerament analitzem el moviment en l'eix x i l'eix y per separat.

Tot seguit trobem les gràfiques referents al moviment en l'eix horitzontal respecte al temps.



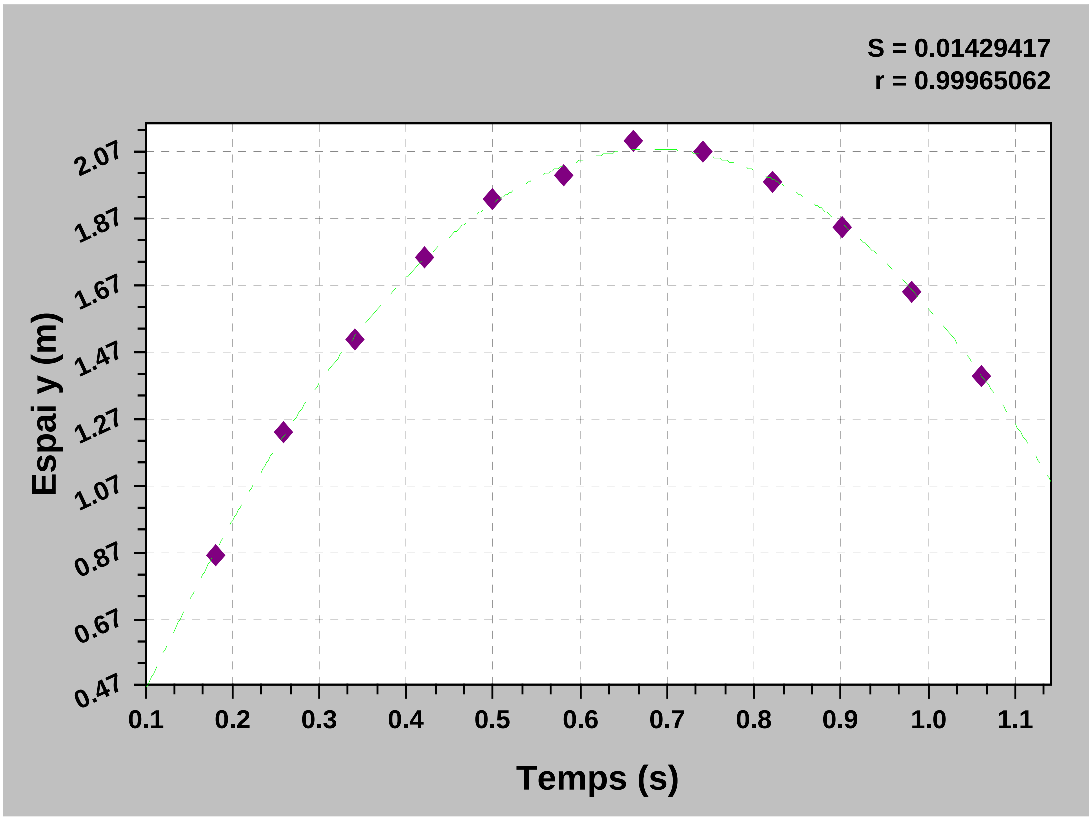
Tal com podem observar es tracta d'un moviment uniforme, de manera que el coeficient de correlació lineal val 1 ja que s'ajusta perfectament a una recta. L'equació de la recta és la següent:

Y= a + bx
A= 0.013 (espai inicial)
B= 4,484 (velocitat inicial eix x)

Si ho relacionem amb el concepte teòric al qual fa referència, aquesta expressió matemàtica la podem traduir de la següent manera:

$$\mathbf{X} = (x_o + v_{ox}t)\ \mathbf{i}$$
$$\mathbf{X} = (0.013 + 4.484t)\ \mathbf{i}$$

De la mateixa manera que hem operat amb l'eix x, a continuació tenim la representació de l'eix y sobre el temps.



En aquest cas hem obtingut una paràbola ja que estem davant d'un moviment uniformement desaccelerat degut a l'acció de la gravetat. L'equació que obtenim és la següent:

$$\mathbf{Y = a + bx + cx^2}$$

A= -0.012 (espai inicial)

B= 6.301 (velocitat inicial eix y)

C= -4.753 (acceleració)

Si, com en el cas anterior, ho traduïm als conceptes que estem al·ludint, obtenim aquesta nova expressió:

$$\mathbf{Y=}\ (y_o + v_{oy}t - \text{🗀}\ gt^2)\ \mathbf{j}$$
$$(g= \mathit{2c})$$

$$\mathbf{y=}\ (-0.012+ 6.301t - \text{🗀}9.506t^2)\ \mathbf{j}$$

9

Amb la combinació d'aquestes dues expressions podem obtenir el que anteriorment hem definit com a **equació del moviment**:

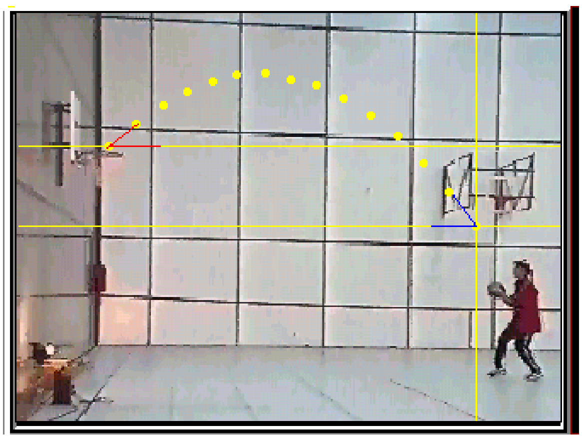
$$\mathbf{r=}\ (\ x_o+ v_{ox}t)\ \mathbf{i} + (y_o + v_{oy}t - \text{🗀}\ gt^2)\ \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r=}\ (0.013 + 4.484t)\ \mathbf{i} + (-0.012+ 6.301t - \text{🗀}9.506t^2)\ \mathbf{j}$$

Problema 2:

Per obtenir l'angle respecte l'horitzontal amb què s'ha produït el tir hem d'utilitzar les velocitats inicials d'ambdós eixos, dades que apareixen en les equacions que hem trobat en l'apartat anterior.

En la següent imatge podem observar la regió de l'espai que comprèn l'angle inicial i final.



En primer lloc cal tenir present la fórmula que ens proporcionarà aquesta informació:

$$\boxed{tg\ \alpha= v_y / v_x}$$

Si substituïm els valors de les dues velocitats inicials que hem trobat, podem calcular l'angle inicial.

$tg\ \alpha= 6.301 / 4.484 \rightarrow tg\ \alpha= 1.405 \rightarrow \alpha= arctg\ 1.405= 54.56^o$

$$\boxed{\alpha_o= 54.56^o= 54^o\ 33'\ 47''}$$

Cal destacar que aquest valor el podem extreure directament des del Vidshell amb una de les funcions que aquest ofereix i obtindríem el mateix resultat.

Problema 3:

En aquest cas volem calcular la velocitat inicial amb la què es llançada la pilota. Per fer-ho, novament cal recordar les equacions matemàtiques a utilitzar.

$$v_{ox}= v_o \cdot cos\alpha \rightarrow v_o= v_{ox} / cos\alpha$$

$$v_{oy}= v_o \cdot sin\alpha \rightarrow v_o= v_{oy} / sin\alpha$$

$$v= ✰\ v_x^2+ v_y^2$$

Així doncs, utilitzarem els tres procediments per tal de verificar que el valor de la velocitat inicial coincideix:

$V_{ox}= 4.484= v_o \cdot cos\alpha \rightarrow v_o= 4.484/ cos\ 54.56^o \rightarrow v_o= 7.734$ m/s

$V_{oy}= 6.301= v_o \cdot sin\alpha \rightarrow v_o= 6.301/ sin\ 54.56^o \rightarrow v_o= 7.734$ m/s

$V= \sqrt{}\ v_{ox}^2 + v_{oy}^2 \rightarrow v= \sqrt{}\ 4.484^2 + 6.301^2 \rightarrow v= 7.734$ m/s

Evidentment, per qualsevol dels tres mètodes obtenim la mateixa velocitat inicial.

V_o= 7.734 m/s

Problema 4:

En aquesta qüestió pretenem conèixer sota quina acceleració de la gravetat està sotmesa la pilota. Per fer-ho hem de recórrer al moviment en l'eix y.
Recordem l'equació que hem obtingut amb el Curve Expert i l'equivalència d'aquesta amb el concepte teòric:

Y= a + bx + cx^2

Y= (y_o + v_{oy}t - 🗁 gt^2) **j**

Podem determinar que **c=** 🗁 **g**, de manera que el valor de g equival al doble de la c.

C= - 4.753 → -4.753= 🗁 g → g= -4.753 · 2 → g= - 9.506 m/s^2

g= -9.506 **j** (m/s^2)

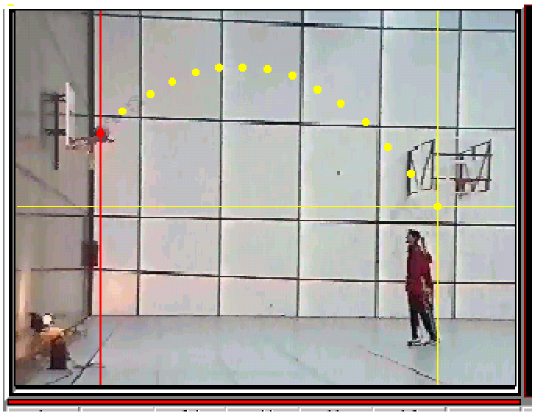
El fet de que aquest valor sigui negatiu és degut a que hem pres el sistema de referència on el vector unitari **j** està dirigit cap dalt, i, contràriament, la gravetat sempre va dirigida al centre de la Terra.

Problema 5:

En el cinquè problema tenim cop a objectiu trobar l'abast màxim que ha assolit la pilota.
Teòricament el màxim valor d'x s'assoleix en el punt en el qual y=0 però com en aquesta ocasió la pilota no arriba al sistema de coordenades que hem traçat

el valor màxim d'x que trobem a la taula no coincidirà amb el que podem trobar mitjançant els càlculs numèrics.

Primerament, podem observar el punt que equivaldria a l'abast màxim:



El punt marcat amb vermell és el que correspon al màxim valor d'x. Mitjançant el traç d'una recta paral·lela a l'eix de les y, podem determinar la distància entre l'origen i la intersecció de la paral·lela que he fet amb l'eix x.

El valor que obtenim coincideix amb la màxima dada de les x que tenim a la taula de dades:

X= 5.03 m

En el cas de calcular-ho numèricament amb la fórmula que hem obtingut, no trobem el mateix valor degut a l'anterior raonament:

$$R = \frac{v_0^2 \text{ sen } 2\theta_0}{g}$$

Essent R l'abast màxim, substituïm amb les dades corresponents:

R= (7.734^2 · sin2α)/ g → x= (7.734^2 · sin109.13^o)/ 9.506= 5.945 m

X= 5.945 m

Tal com havíem suposat, aquest valor no coincideix amb l'anterior.

Donat a que estem estudiant el procés que comprèn des del llançament fins que arriba a la cistella, prenem com a abast màxim els 5.03 m ja que és el punt màxim que hem estudiat.

Pel que fa al temps que tarda en arribar-hi, el podem trobar a partir de l'equació del moviment en l'eix x.

$$\mathbf{X} = (x_o + v_{ox}t)\,\mathbf{i}$$
$$\mathbf{X} = (0.013 + 4.484t)\,\mathbf{i}$$

A partir d'aquí, només tenim el temps com a incògnita. Així doncs, podem aïllar-lo per tal de conèixer quanta estona ha tardat.

$t = (x - x_o)/ v_{ox}$ → $t = (5.03 - 0.013)/ 4.484$ → $t = 1.12s$

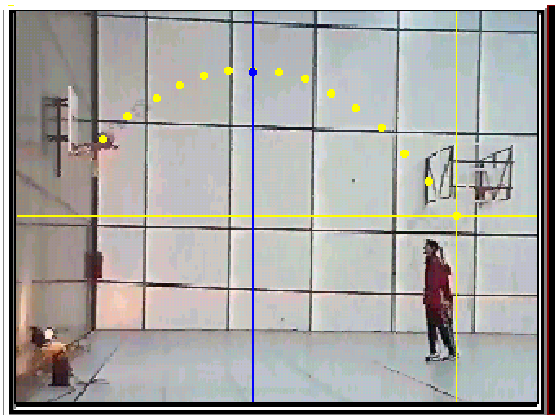
$$\boxed{t = 1.12s}$$

Si tornem a observar la taula de dades veurem que, efectivament, aquest valor del temps coincideix amb el corresponent als 5.03 m de la x.

Problema 6:

En aquest cas volem estudiar un altre dels punts característics de tot tir parabòlic: l'alçada màxima.

Igual que en el cas anterior, aquest punt pot ser identificat en la filmació.



En aquesta ocasió el punt blau correspon al la màxima posició del cos en l'eix y, és a dir, a l'alçada màxima.
Si observem la taula de valors, la màxima dada en l'eix de les y és el següent:

$$\boxed{Y = 2.1m}$$

Tot seguit prosseguirem igual que en l'anterior ocasió, i farem els càlculs mitjançant la fórmula que havíem trobat:

$$h = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0) \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \theta_0}{g} \right)^2$$

$$h = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0}{2g}$$

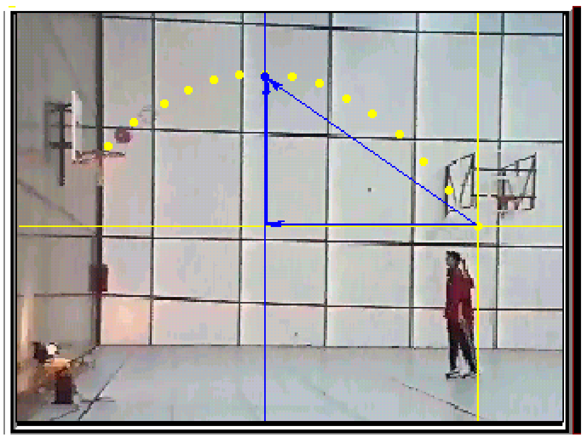
Sent h l'alçada màxima, fem la substitució amb les dades que tenim:

h= $(7.734^2 \cdot \sin^2 54.56) / 2 \cdot 9.506 \rightarrow$ h= 2.1m

En aquest cas, tal com era de suposar, el càlcul numèric ha coincidit amb el màxim valor d'y que tenim a la taula.

$$\boxed{h = 2.1m}$$

Dins d'aquest mateix problema volem conèixer l'espai que ha recorregut fins al moment. Per fer-ho ens basarem en una de les utilitats que el Vidshell ofereix.



A partir d'aquest vector de posició hem calculat la distància des de l'origen de coordenades fins a l'alçada màxima, i hem obtingut el següent valor:

$$\boxed{r = 3.57\,m}$$

Problema 7:

En aquest punt el que es pretén és calcular el radi de curvatura en el punt més alt de la trajectòria. Primerament cal tenir clar quina és la fórmula que hem d'utilitzar:

$$\boxed{a_n = v^2 / R \rightarrow R = v^2 / a_n}$$

A més, cal tenir present que en el punt més alt només tenim acceleració normal, de manera que aquesta té el mateix valor que la gravetat (9.506 m/s^2). Així doncs, només ens cal buscar la velocitat en aquest moment.

Convé recordar que s'assoleix l'alçada màxima als 0.64 segons.

En primer lloc calculem la velocitat en aquest moment:; i com en aquest punt la velocitat en y és zero, la única velocitat és la de l'eix x.

$V = (4.484)\, i + 0j \rightarrow v = 4.484$

Ara ja podem calcular el radi en aquest punt:

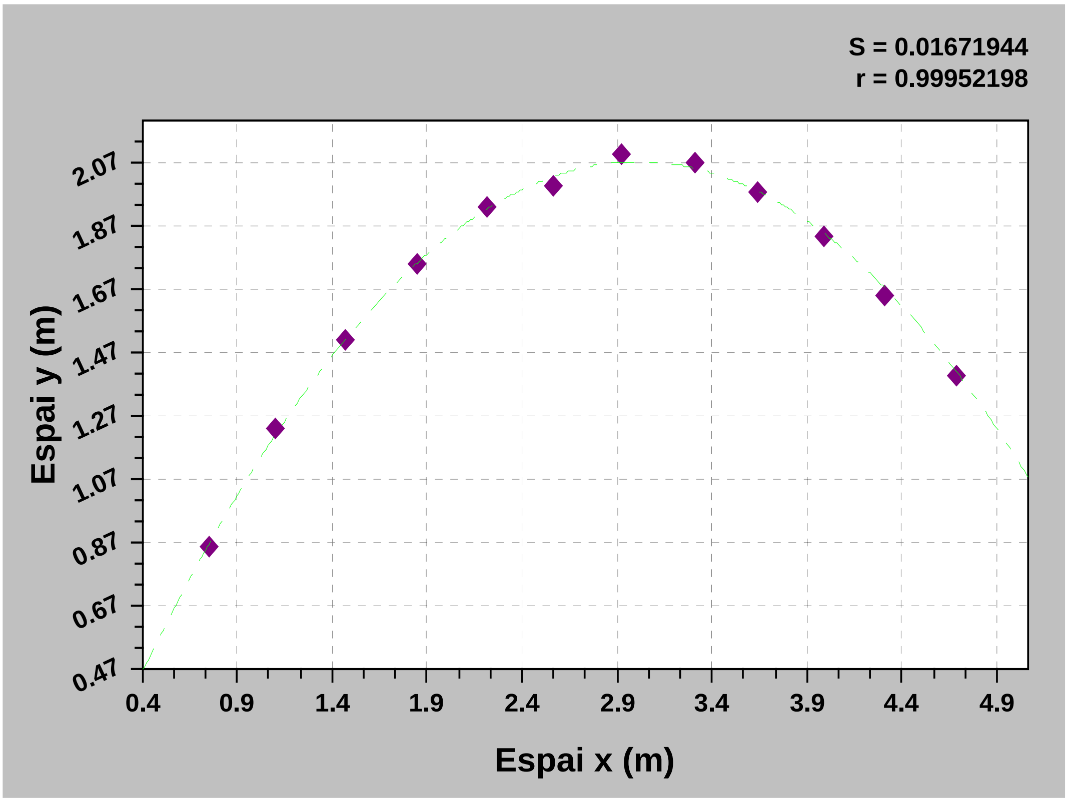
$R = 4.484^2 / 9.506 \rightarrow R = 2.115m$

$$\boxed{R = 2.115\ m}$$

Problema 8:

En aquesta darrera qüestió hem de combinar les x amb les y per tal d'obtenir la deguda equació de la trajectòria.

El gràfic següent relaciona aquestes dues variables.



Degut a que ens trobem davant d'una paràbola, l'expressió matemàtica correspon a una equació de segon grau.

$$Y = a + bx + cx^2$$

a= -0.021

b= 1.407

c= -0.236

Com en l'equació de la trajectòria tan sols tenim dues variables (x,y), aquesta ve donada per substituir els valors en l'anterior equació de segon grau:

$$\boxed{Y = -0.021 + 1.407x - 0.236x^2}$$

↪ Ara que ja hem fet tots els procediments per trobar la resposta als vuit problemes inicials, ja tenim clares les principals característiques del tir parabòlic.
És per aquest motiu que podem prosseguir en les conclusions i tancament d'aquest estudi.

5. CONCLUSIONS

Després d'haver estudiat detingudament tots els elements relacionats amb el tir parabòlic portat a terme per una jugadora de bàsquet, ja ens trobem en condicions de fer les següents afirmacions relacionades amb les qüestions plantejades inicialment:

Problema 1: L'**equació de moviment** amb la qual es desplaça la pilota és la següent:

$$\mathbf{r}= (x_o+ v_{ox}t)\ \mathbf{i} + (y_o + v_{oy}t - \text{🗁}\ gt^2)\ \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}= (0.013 + 4.484t)\ \mathbf{i} + (-0.012+ 6.301t - \text{🗁}9.506t^2)\ \mathbf{j}$$

Problema 2: Inicialment la pilota es llença amb aquest **angle** respecte l'eix horitzontal:

$$\alpha_o= 54.56^o= 54^o\ 33'\ 47''$$

Problema 3: Podem afirmar que l'acceleració de la gravetat sota la qual està sotmesa la pilota és aquesta:

$$\mathbf{g}= -9.506\ \mathbf{j}\ (m/s^2)$$

Problema 4: En el moment del llançament, el mòbil surt amb la següent **velocitat inicial**:

$$V_o= 7.734\ m/s$$

Problema 5: L'**abast màxim** o el màxim punt de l'eix x que assoleix és el següent:

X= 5.945 m

En aquest punt, el **temps** que ha transcorregut és aquest:

t= 1.12s

Problema 6: D'altra banda, el màxim punt en l'eix de les y, **alçada màxima**, és aquesta:

h= 2.1m

Fins aquest punt ha recorregut la següent **distància** partint de l'origen:

r= 3.57m

Problema 7: En el punt més alt de la trajectòria, el **radi** que la partícula està descrivint és el següent:

R= 2.115 m

Problema 8: Finalment, expressant la y en funció de la x un cop haver aïllat el temps, trobem aquesta **equació de la trajectòria**:

$$Y = -0.021 + 1.407x - 0.236x^2$$

El recull de totes les anteriors dades comprèn les característiques principals del tir parabòlic que hem estudiat.

Ara que l'anàlisi pot considerar-se finalitzat hi ha alguns trets que convindria destacar.

En moltes ocasions quan se'ns demana fer els càlculs a partir de les preguntes que un enunciat proposa, ens costa imaginar quina situació és la que volem al·ludir. En aquest cas, aquest procés ha estat donat directament de manera que en tot moment hem tingut clar quina situació teníem davant nostre. Aquest factor afavoreix notablement a l'hora de fer qualsevol estudi ja que ho podem adaptar a situacions que poden presentar-se en qualsevol moment de la nostra vida quotidiana.

D'altra banda, moltes vegades tenim les idees clares referents a un tema determinat però en el moment que hem d'exposar-ho a algú que ho desconeix, apareixen les dificultats. Fent aquest estudi han aparegut alguns obstacles en el moment d'explicar el procés que hem seguit ja que amb freqüència molts punts importants es donen per sabuts quan, en realitat, haurien de ser exposats.

No obstant aquest últim factor, ens hem pogut adonar que les noves tecnologies i els suports informàtics no només són un objecte d'entreteniment sinó que poden ser de gran utilitat en el moment de fer un estudi teórico-pràctic de qualsevol àmbit tant científic com cultural.

6- BIBLIOGRAFIA

Amb la finalitat de portar a terme l'estudi exhaustiu del tir parabòlic, en primer lloc ha estat necessària la documentació dels factors teòrics. Per tal d'evitar el tancament amb un únic autor s'han utilitzat diferents fonts informatives que s'exposen a continuació:

- FÍSICA Tomo I (4a Edición)
  Raymond A. Serway (James Madison University)
  Editorial McGraw- Hill
- FÍSICA Y QUÍMICA (3º BUP)
  J.J. Lozano Lucea i J.L. Vigatá Campo
  Ediciones sm
- FÍSICA (Crèdit 4,5 i 6 de 2n Batxillerat)
  Salvador Serra, Joan Mercadé i Montserrat Armengol
  Editorial McGraw- Hill
- Gran Enciclopèdia Catalana
- Enciclopèdia Multimèdia Encarta
- Enciclopèdia Universal Micronet

Al marge de la documentació bibliogràfica que he utilitzat, cal destacar els programes informàtics així com les adreces electròniques on poden ser trobats:

- Vidshell
  Webphysics.tec.nh.us/vidshell/vidshell.html
  Webphysics.tec.nh.us/vidshell/clips.html
- Curve Expert
  www.ebicom.net/≈dhyarns/cvxpt.htm
  www.towson.edu/≈debye/lonce.html

ÍNDEX