MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA

CURSO PREUNIVERSITARIO

METODOLOGIA PRACTICA

TEMAS
DE LAS
PRUEBAS DE MADUREZ 1968

MATEMATICAS
Y
PRUEBA COMUN

GUIAS DIDACTICAS DE ENSEÑANZA MEDIA

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA

CURSO PREUNIVERSITARIO

METODOLOGIA PRACTICA

TEMAS DE LAS

PRUEBAS DE MADUREZ (1968)

MATEMATICAS

(COMPLETADOS CON LOS DE LA PRUEBA COMUN)

GUIAS DIDACTICAS DE ENSEÑANZA MEDIA

PUBLICACIONES
DEL
MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA

Director: DACIO RODRIGUEZ LESMES

Dirección:
MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
REVISTA «ENSEÑANZA MEDIA»
Atocha, 81, 2.° — Teléfono 230 43 00 — Madrid (12)

Depósito legal: M. 6.857 - 1969

GRAFICAS TUCAN (Grafopuplasa) - Tucán, 12 - Madrid

PROLOGO

Por la Ley de 2 de marzo de 1963 («B. O. E.» del 5) se introdujeron algunas modificaciones en la regulación del Curso Preuniversitario y de las Pruebas de Madurez, que dan acceso a las Facultades Universitarias y Escuelas Técnicas de grado superior.

A dicha Ley siguió el Decreto de 11 de julio («B. O. E.» de 8 de agosto), dando una nueva ordenación y estructura a dicho Curso, cuya importancia se subraya «como complemento de la formación recibida en los precedentes y preparación directa para los estudios superiores, tanto universitarios como técnicos».

Asimismo imprime mayor alcance a las pruebas, con el fin de que permitan «comprobar la madurez de los escolares para su acceso a aquellos estudios y garantizar la formación exigible al Bachiller superior, evidentemente superada en el sistema conjunto de los ejercicios que las integran».

El Decreto establecía como materias comunes: Religión; Doctrina Social católica; Literatura Española; Historia de la Filosofía y de las Ciencias; Historia de España; Biología e Idiomas.

Como materias específicas de la Sección de Letras, Latín y Griego; y de la Sección de Ciencias, Matemáticas, Química y Física.

Desde hace varios años, y al igual de los Temas de Grado, hemos venido publicando los propuestos en las Pruebas de Madurez, dado el valor que en calidad de «ayuda didáctica» poseen para los trabajos prácticos y ejercicios de clase. No siendo fundamentales las diferencias entre los cuestionarios anteriores de Matemáticas y Física con los establecidos por la nueva ordenación, nos pareció conveniente, a dichos fines, recoger en un volumen los correspondientes a las convocatorias precedentes. Pero regularizadas ya las Pruebas de Madurez por Orden de 22 de abril de 1964 («Boletín Oficial del Estado» de 1 de mayo), y celebrados los exámenes a *través de varias convocatorias, de acuerdo con la nueva estructura del Preuniversitario, publicamos los propuestos en las mismas, completándolos a la vez, encajados dentro de los actuales Programas, con los que se propusieron en todas las pruebas verificadas con arreglo a la anterior disposición de materias. Dichos Temas complementarios han sido agrupados y ordenados siguiendo los cuestionarios, hasta formar así una verdadera «Metodología Práctica».*

Los Temas de la prueba específica de Ciencias, van en dos tomos: uno dedicado a Física y Química; y otro a Matemáticas.

Nos ha parecido conveniente, además, agregar a este tomo de Matemáticas, los Temas de la Prueba Común para dar a los alumnos una idea del alcance de dicho ejercicio.

Con todas estas modificaciones, creemos ir superando, paso a paso, el propósito que movió a la Dirección General de Enseñanza Media al editar estas «Guías Didácticas», proporcionando a profesores y escolares un valioso instrumento de orientación y trabajo.

TEMAS DE MATEMATICAS
PROPUESTOS EN LAS
PRUEBAS DE MADUREZ DE 1968

TEMAS PROPUESTOS
EN LAS
PRUEBAS DE MADUREZ DE 1968

1

Problemas:

1.—Al dividir un polinomio por $x + 1$ se obtiene de resto 5. Si el mismo polinomio se divide por $x - 1$, el resto es -1, y al dividirlo por $x - 2$, el resto que se obtiene es también -1. ¿Qué resto se obtendrá al dividir el polinomio en cuestión por $(x^2 - 1) \cdot (x - 2)$?

2.—Hallar un número natural n que no admita otros divisores primos que 2, 3 y 7. Se sabe además que el número total de sus divisores, entre primos y compuestos, es 24, que $3n$ tiene 32 divisores y $7n$ posee 36.

Tema:

Coordenadas astronómicas.

2

Problemas:

1.—Calcular los ángulos de un triángulo esférico equilátero cuya área es igual a la de un círculo máximo. Calcular los lados de dicho triángulo.

2.—El área del círculo circunscrito a un triángulo escaleno es 40 dm^2. Demostrar que el área del círculo que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo es 10 dm^2.

Tema:

Clases residuales.

3

PROBLEMAS:

1.—Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, referida a un sistema de ejes rectangulares de origen O. Se considera el triángulo OAB equilátero inscrito en esa circunferencia. Si llamamos S_1, S_2 y S_3 a las simetrías respecto a OA, OB y AB, respectivamente, se pide: las ecuaciones de las circunferencias en que se transforma la dada por medio de los productos S_2S_1, S_1S_2 y $S_3S_2S_1$.

2.—Demostrar que las cuatro raíces de la ecuación $x^4 - 1 = 0$ forman un grupo multiplicativo abeliano. Encontrar razonadamente un subgrupo del anterior.

TEMA:

Números congruentes

4

PROBLEMAS:

1.—Dada la ecuación diofántica:

$$7x - 12y = 13$$

se pide:

a) Hallar todas sus soluciones pertenecientes al anillo de los números enteros.

b) En el plano cartesiano x, y, determinar todos los puntos cuyas coordenadas son las soluciones de la ecuación diofántica dada, que se hallan en el interior de la circunferencia de centro (10, 10) y tangente a los ejes de coordenadas.

2.—Sea A el afijo de $3 + i$ en el plano de los números complejos. Se pide:

a) El número complejo cuyo afijo es el punto B, simétrico de A respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

b) Hallar el número complejo y su afijo C de la suma del número complejo $3 + i$ y el número complejo de afijo B.

c) Volumen del cuerpo engendrado al girar 360° el triángulo OAB alrededor de OC.

TEMA:

Giros en el plano.

5

PROBLEMAS:

1.—Dada la función

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

que admite el máximo $y = 1$ para $x = -1$ y el mínimo $y = -2$ para $x = 2$. Se pide:

a) Calcular a, b, c y d.

b) Coordenadas del punto de inflexión de la curva representada por la ecuación dada.

c) Representación gráfica de la curva.

2.—Los coeficientes de los términos T_n, T_{n+1}, T_{n+2} que ocupan los lugares n, $n+1$, $n+2$ en el desarrollo de $(a+b)^{14}$ están en progresión aritmética.

Se pide:

a) Calcular n sabiendo que $n < 7$.

b) Calcular dos números complejos sabiendo que: I) Su diferencia es un número real. II) La parte real de su suma es igual a $n - 3$, siendo n el valor hallado en *a)*. III) Su producto es igual $a - 51 + 8i$.

TEMA:

Resolución de triángulos rectángulos esféricos.

6

PROBLEMAS:

1.—Dada la función $y = \dfrac{-1}{(x+1)\ (x-2)}$ se pide: 1.º Hacer su representación gráfica. 2.º Hallar a y b para que idénticamente se verifique

$$\frac{-1}{(x+1)\ (x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}.$$ 3.º Calcular el área del recinto limitado por la curva y la recta $y = 1$.

2.—Demostrar que para todo número natural n, los números $4n + 5$ y $2n + 3$ son primos entre sí.

TEMA:

Conceptos de grupo y subgrupo.

7

PROBLEMAS:

1.—Dadas dos rectas paralelas a y c, y un punto O exterior a la banda (a, c), construir un cuadrado OABC, que tenga el vértice A sobre la recta a, y el vértice C sobre la recta c.

Si O es el origen de coordenadas, y las ecuaciones de las rectas a y c son, respectivamente, $y = 3$ e $y = 5$, calcular las coordenadas de los vértices A, B y C.

2.—En un trapecio (no isósceles) cuyas bases son $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, sea O el punto de intersección de las rectas AA' y BB', y sea O' el punto de intersección de las rectas AB' y AB'. Demostrar, utilizando el producto de dos homotecias, que la recta OO' pasa por los puntos medios de las bases del trapecio.

debe decir A'B

TEMA:

Números congruentes. Propiedades.

8

PROBLEMAS:

1.—Dadas las circunferencias:

$$C_1: \quad x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$$
$$C_2: \quad x^2 + y^2 + 6x - 2y + m = 0$$

Se pide:

1.º Encontrar el valor del parámetro m para que las dos circunferencias sean iguales.

2.º Hallar las coordenadas del centro de un giro G que transforme C_1 en C_2 y que el transformado del punto P(4, —3) perteneciente a C_1 sea un punto P' del eje OY.

3.º Amplitud del giro G y ecuaciones del mismo.

2.—En un tetraedro, ABCD, la arista AD es perpendicular al plano de la cara ABC; esta cara forma con la BCD un diedro de 30°. Se conocen las longitudes $\overline{AD} = 5$ dm, $\overline{AB} = 12$ dm, y el área de la cara BCD que es 125 dm^2.
Calcular las longitudes de las aristas del tetraedro.

TEMA:

Regla de Cramer.

9

PROBLEMAS:

1.—Dadas las circunferencias C_1 y C_2 cuyas ecuaciones respectivas son:

$$x^2 + (y-2)^2 = 4 \qquad \text{y} \qquad (x-4)^2 + y^2 = 16$$

se considera una inversión cuyo polo es el origen de coordenadas, y la circunferencia de puntos dobles tiene de radio la cuerda común de las circunferencias C_1 y C_2.

Determinar analítica y gráficamente:

1.º Las figuras inversas de C_1 y C_2.

2.º El ángulo α bajo el cual se cortan dichas circunferencias.

3.º La figura inversa de la parte común a C_1 y C_2.

2.—1.º Dada la ecuación $z^4 - 1 = 0$, representar gráficamente sus raíces.

2.º A los puntos obtenidos se les aplica el giro de $+45^\circ$ y de centro el origen: Hallar las coordenadas de los puntos transformados.

3.º A continuación se aplica a estos últimos la traslación definida por el vector OA, siendo O(0, 0) y A($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$). Hallar las coordenadas de los nuevos puntos.

TEMA:

Conceptos de grupo y anillo.

10

PROBLEMAS:

1.—Dado el conjunto de rectas:

$$r_m\colon\ (2m - 4)\ x - m\,y + m + 3 = 0,$$

demostrar que todas las rectas de r_m pasan por un punto fijo H, y calcular sus coordenadas. Encontrar la recta del conjunto que pasa por A (—1, 2).

2.—Dada la función

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + 1}$$

calcular a, b y c sabiendo que:

$$f(-3) = \frac{1}{4}\,;\quad f\left(\frac{4}{3}\right) = -3;$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3}$$

Estudiar la gráfica de la misma.

TEMA:

Resolución de triángulos esféricos rectángulos.

11

PROBLEMAS:

1.—Dado el triángulo equilátero ABC, se definen estos dos movimientos del plano: 1.º) G: giro de centro A y ángulo $\widehat{BAC}$; 2.º) T: traslación de vector $\overrightarrow{CB}$. Se pide: estudiar y caracterizar los dos movimientos productos: G . T y T . G.

2.—B es un punto fijo $(b, 0)$ del eje x. C es un punto variable $(\lambda, 0)$ del mismo eje. A es un punto variable del semiplano $y > 0$ con las dos condiciones siguientes: 1.ª) el triángulo ABC ha de ser isósceles ($\overline{AB} = \overline{AC}$), 2.ª) el radio r del círculo circunscrito al triángulo ha de ser constante. Se pide: lugares geométricos de cada uno de los vértices C y A.

TEMA:

Divisibilidad en el anillo de los números enteros.

12

PROBLEMAS:

1.—Dado el triángulo esférico equilátero ABC, de lado igual a 60º sobre una superficie esférica de radio 1, se pide:
a) Calcular el coseno del ángulo A.
b) Calcular el coseno de 3 A.
c) Calcular el exceso esférico de ABC.
d) Calcular el área del triángulo ABC.

2.—Dada la circunferencia de ecuación:

$$x^2 + y^2 - 6x = 0,$$

se pide:

a) Ecuación de la figura homotética en una homotecia cuyo centro es el origen de coordenadas y razón $-5/3$.
b) Coordenadas del centro de la homotecia de razón positiva que transforma la circunferencia obtenida en la dada.

TEMA:

Sistema de ecuaciones lineales. Equivalencia.

13

PROBLEMAS:

1.—Dados los puntos A(0, 3), B(3, 0), C(0, —3), D(—3, 0). Se consideran las cuatro simetrías axiales S_1, S_2, S_3 y S_4, cuyos ejes respectivos son las rectas AB, BC, CD y DA. Probar que para cualquier punto P del plano su transformado en el producto $S_4 \cdot S_3 \cdot S_2 \cdot S_1$ (producto de transformaciones de derecha a izquierda), es un punto P^{IV} tal que la distancia $\overline{PP^{IV}}$ es igual a 12 unidades. Hallar también las coordenadas del transformado del punto (1, —5) en dicho producto.

2.—En un cuadrado ABCD, inscrito en un círculo de radio r, se considera una inversión de polo el centro del círculo y potencia r^2. Se pide el área del recinto transformado por dicha inversión de la porción del círculo exterior al cuadrado.

TEMA:

Movimientos de la Tierra.

14

PROBLEMAS:

1.—Determinar la base del sistema de numeración en la cual se verifica que

$$2311 = 43^2.$$

2.—Descomponer la fracción $\dfrac{149}{91}$ en suma de dos fracciones positivas cuyos denominadores respectivos sean 7 y 13.

TEMA:

Area de un triángulo esférico.

15

PROBLEMAS:

1.—Determinar un polinomio $P(x)$ de tercer grado divisible por $x + 1$ y tal que al dividirle por $x—2$, $x—3$ y $x—4$, los restos sean iguales. Calcular, además, las raíces de la ecuación $P(x) = 0$.

2.—Determinar todas las soluciones posibles del sistema

$$x + y = 400_6$$

$$\text{m.c.d. } (x, y) = 20_6$$

(la notación 400_6 y 20_6 significa que dichos números están expresados en base 6).

TEMA:

Simetrías en el plano.

16

PROBLEMAS:

1.—El número que en base x se escribe 72, sumado con el número que en base y se escribe 43, da como suma el número que en base 3 se escribe 10121. Calcular x e y.

2.—¿De cuántas maneras se pueden colocar 9 objetos diferentes en tres cajas distintas, de forma que haya tres objetos en cada caja?

TEMA:

Coordenadas astronómicas.

17

PROBLEMAS:

1.—En el anillo Z/6 de las clases residuales, módulo 6, formar las tablas de las dos operaciones: adición y multiplicación. Resolver cada una de las ecuaciones:

$$x^2 - \overline{4}x + \overline{3} = 0$$

$$3x - \overline{4} = 0$$

en las cuales los coeficientes y la incógnita son elementos de dicho anillo.

2.—Demostrar que, si n es par, los números naturales $n^2 - 1$ y $3n + 1$ son primos entre sí.

TEMA:

Simetrías axiales en el plano.

18

PROBLEMAS:

1.—En el sistema de numeración de base 4 se designa por $0,\widehat{21}$ al número x que verifica la igualdad

$$100x = 21 + x$$

en el supuesto de que tanto 100 como 21 están escritos en dicho sistema de numeración.
Hallar x en forma de fracción ordinaria irreducible cuyos términos sean números escritos en base 4.

2.—Dada la ecuación diofántica:

$$5950x - 12750y = 69700$$

Se pide:

1.º Hallar la expresión general de las soluciones (x, y) donde x e y son números enteros.

2.º Sumar los valores de y correspondientes a dichas soluciones y tales que $-100 < y < 100$.

TEMA:

Geometría sobre la superficie esférica.

19

PROBLEMAS:

1.—En un triángulo rectángulo ABC: $\overline{AB} = 3$ dm, $\overline{AC} = 4$ dm, $\hat{A} = 90°$. Se considera la inversión de polo A que transforma la recta BC en una circunferencia que pasa por B. Si esta circunferencia corta a BC en M, calcular el área del triángulo ABM.

2.—En el eje de abscisas se dan los puntos A, de abscisa 1, y B, de abscisa 3. A cada punto M de dicho eje, de abscisa x, se le hace corresponder el punto M' del mismo eje y de abscisa x', tal que x' sea igual a la razón simple (ABM). Hallar:
1.º La ecuación de la correspondencia M → M'.
2.º Las abscisas de los puntos dobles de dicha correspondencia.

TEMA:

Ecuaciones diofánticas.

20

PROBLEMAS:

1.—En una circunferencia de centro O se consideran dos diámetros perpendiculares AA' y BB'. Un punto M recorre el diámetro BB' y se proyecta ortogonalmente en M' sobre la tangente a la circunferencia en A. Se pide el lugar geométrico de los puntos P de encuentro de las rectas AM y A'M'.

2.—Encontrar la ecuación de la recta transformada de la $y - x = 1$ por un giro de centro M (2, 1) y amplitud de —90°. La recta dada y su transformada por el giro forman con los ejes coordenados un cuadrilátero, en cuyo interior está el punto M. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita a este cuadrilátero, y la figura inversa de ella en una inversión de polo el origen de coordenadas, en la cual es invariante el punto M.

TEMA:

Ecuaciones diofánticas.

21

PROBLEMAS:

1.—En una simetría central, el semiplano $y \geqslant x + 2$ se transforma en el semiplano $y \leqslant x - 2$, y el transformado del punto (1, 5) pertenece a la recta $y = 3$. Determinar el centro de la simetría y las ecuaciones de la misma.

2.—A, B y C son tres puntos alineados; a y b son dos rectas paralelas; la primera pasa por A y la segunda por B; c es una transversal, que pasa por C, y corta a a y b en los puntos M y N, respectivamente. Se pide: construir otras dos paralelas a_1 y b_1, la primera que pase por A y la segunda por B, que corten a c en M_1, y N_1, respectivamente, y de forma que se verifique:

$$M_1N_1 = \frac{1}{2} MN$$

Si varía c, pasando por C, ¿seguirá verificándose esta relación?

TEMA:

Sistemas de numeración.

22

PROBLEMAS:

1.—Encontrar los coeficientes a_i y b_i, enteros y tales que $0 \leq a_i \leq 1$, $0 \leq b_i \leq 1$, que verifiquen la igualdad:

$$13{,}6875 = a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^{-1} + b_2 \cdot 2^{-2} + b_3 \cdot 2^{-3} + b_4 \cdot 2^{-4}$$

Demostrar que la solución es única.

2.—En el conjunto de los números racionales se define la siguiente operación:

$$a \star b = a + \frac{1}{b}, \quad (b \neq 0)$$

Comprobar que no es asociativa.
Dados cuatro números racionales, a, b, c, d, encontrar todos los resultados de la operación

$$a \bigstar b \bigstar c \bigstar d$$

conservando el orden de los datos y colocando los necesarios paréntesis de todas las maneras posibles.

TEMA:

Semejanza en el plano.

23

PROBLEMAS:

1.—Encontrar los polos y las respectivas potencias de las posibles inversiones, que transforman la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$ en la recta $y - x = 0$.

2.—Dada la parábola $y = -4x^2 + 10x$, se consideran los rectángulos que tienen dos vértices consecutivos en el eje de las x, y los otros dos son puntos de la parábola de ordenada positiva. Se piden las coordenadas de los vértices del rectángulo de área máxima.

TEMA:

El número racional. Concepto de cuerpo.

24

PROBLEMAS:

1.—Encontrar un polinomio de cuarto grado que sea divisible por x^2-1, y que al dividirlo por $(x + 2)$, por $(x - 2)$ y por $(x - 3)$, se obtengan en los tres casos restos iguales.

2.—Resolver la ecuación:

$$8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0,$$

sabiendo que las raíces están en progresión aritmética.

TEMA:

Giros en el espacio.

25

PROBLEMAS:

1.—Encontrar un polinomio de tercer grado $P(x)$, que verifique la siguiente relación:

$$P(x) - P(x-1) = x^2.$$

Deducir de él el valor de la suma:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2$$

2.—Dada la familia de parábolas

$$pm: \quad y = (m+3)\,x^2 - (2\,m - 1)\,x + (m-1),$$

donde m es un parámetro variable, demostrar que todas las parábolas de la familia pasan por un punto fijo y tienen en él la misma tangente. Encontrar las coordenadas de este punto y la ecuación de dicha tangente.

TEMA:

Fórmulas de Bessel de la Trigonometría esférica.

26

PROBLEMAS:

1.—Estudiar y caracterizar la transformación G . T, producto de la traslación T, de vector (2, —4), y del giro G, de centro (4, 0) y amplitud (—90°).

2.—Dados los puntos O (0, 0), A (2, 2), B (4, 0), C (2,—2), se considera la inversión de polo el punto O y potencia K = 16. Se pide calcular el área del recinto transformado en dicha inversión del interior del triángulo ABC.

TEMA:

Sistema de ecuaciones de primer grado. Teoremas de equivalencia.

27

PROBLEMAS:

1.—Gráfica de la curva representada por $y = xe^x$ hallando el área del recinto limitado por la misma, el eje X y la recta paralela al eje Y que pasa por el mínimo de la curva.

2.—Uniendo convenientemente cuatro de los vértices de un cubo de área igual a 144 cm^2, se obtiene un tetraedro regular.

1.º ¿Cuántos planos de simetría del cubo son también planos de simetría del tetraedro?

2.º ¿Cuáles de los giros que transforman el cubo en sí mismo hacen igual en el tetraedro?

3.º Hallar la razón de los volúmenes de los dos poliedros.

TEMA:

Movimientos de la Tierra. Tiempo sidéreo.

28

PROBLEMAS:

1.—H_1 es una homotecia de centro $O_1(0, 0)$ y razón $k_1 = 2$; H_2 es otra homotecia de centro $O_2(0, 0)$ y razón $k_2 = -\frac{1}{2}$.

Estudiar las cuatro transformaciones:

$$T_1 = H_2 \cdot H_1 \quad , \quad T_2 = H_1 \cdot H_2 \quad ,$$
$$T_3 = T_2 \cdot T_1 \quad , \quad T_4 = T_1 \cdot T_2$$

y definir los elementos que determinan a cada una de ellas.

2.—La tangente a la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ en el punto de la misma de abcisa λ corta a los ejes de coordenadas en los puntos A y B. Calcular las longitudes de $\overline{OA}$ y OB y el área del triángulo determinado por dicha tangente y los ejes OX y OY.

TEMA:

Principio de identidad de polinomios de una variable.

29

PROBLEMAS:

1.—Hallar el polinomio $D(x)$ que sea m. c. d. de los polinomios:

$$A(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$$

$$B(x) = x^3 + 3x^2 + 6x - 8.$$

Representar gráficamente la función $y = D(x)$ y calcular el área del recinto limitado por esta curva y el eje OX.

2.—Escribir las tablas de sumar y de multiplicar en el anillo de las clases de restos módulo 5. Hacer aplicación de ellas para resolver en dicho anillo el sistema:

$$4x + 3y = 1$$

$$3x + 2y = 3$$

en donde los coeficientes son clases de restos módulo 5.

TEMA:

Teoremas de Menelao y de Ceva.

30

PROBLEMAS:

1.—La recta $6x + 4y = 24$ forma con los ejes de coordenadas un triángulo rectángulo AOB. Se transforma por medio de una inversión de centro O y parámetro 12. Se pide: Calcular el área del recinto en que se transforma el triángulo AOB.

2.—Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & x-2 & (x-2)^2 \\ x-2 & (x-2)^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

TEMA:

Rectas de regresión.

31

PROBLEMAS:

1.—Los afijos de los dos complejos:

$$z_1 = 3 - 2i \quad , \quad z_4 = 7 + 2i$$

son dos puntos, vértices opuestos de un hexágono regular. Encontrar los complejos z_2, z_3, z_5 y z_6, cuyos afijos son los otros cuatro vértices de dicho hexágono.

2.—Demostrar que para todo número natural n, el número:

$$n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)$$

es múltiplo de 30.

TEMA:

Simetrías respecto de rectas, en el espacio.

32

PROBLEMAS:

1.—Los números 123, 140 y 156 están en progresión aritmética. Hallar la base del sistema de numeración en que están escritos y la diferencia de la progresión.

2.—Se considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 1 \\ x + 4y + z &= b \\ 2x - 5y + az &= -2. \end{aligned}$$

Estudiar dicho sistema para los distintos valores de los parámetros a y b y resolverlo en los casos en que sea posible.

TEMA:

Giros en el plano.

33

PROBLEMAS:

1.—Los números complejos z y z' están relacionados por la ecuación

$$z \cdot z' = 8.$$

Encontrar el afijo de z', si $z = 3 + 2i$.

Si el afijo de z recorre la recta $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 1$, encontrar la ecuación de la línea descrita por z'.

2.—Dado un triángulo equilátero ABC, se consideran los tres giros siguientes: G_1, de centro A y ángulo BAC; G_2, de centro B y ángulo CBA; G_3, de centro C y ángulo ACB.

Estudiar y caracterizar los tres movimientos:

$$G_3 \times G_2 \times G_1$$
$$G_1 \times G_3 \times G_2$$
$$G_2 \times G_1 \times G_3$$

[Los factores de estos productos se consideran de derecha a izquierda].

TEMA:

Determinantes de segundo y tercer orden.

34

PROBLEMAS:

1.—Los vértices de un triángulo son los puntos:

$$A\,(4, 4\sqrt{3})\ , \quad B\,(1, 0)\ , \quad C\,(0, 1)$$

Si hacemos girar el triángulo un ángulo de 30° en sentido positivo alrededor del origen de coordenadas, calcular las coordenadas de los nuevos vértices.

2.—En la función:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

determinar a, b, c y d, sabiendo que admite un mínimo igual a —2, para $x = 0$, y un máximo igual a 10, para $x = 2$. Encontrar el punto de inflexión de la curva y comprobar que este punto es centro de simetría de la misma.

TEMA:

El número entero.

35

PROBLEMAS:

1.—Resolver en el cuerpo Z/5 de las clases residuales, módulo 5, el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x - \overline{3}\,y + z = \overline{1} \\ \overline{4}\,x + \overline{2}\,y + \overline{4}\,z = 2 \\ x \quad - \overline{2}\,z = -3 \end{array}\right\}$$

2.—Sabiendo que:

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n} x^n$$

demostrar la identidad:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots\ldots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$$

TEMA:

Inversión en el plano.

36

PROBLEMAS:

1.—Resolver la ecuación $x^4 - 1 = 0$. Representar los afijos de las cuatro raíces. En la inversión de polo P $(-1, 0)$ y potencia 2, encontrar las figuras inversas de los segmentos que son los lados del cuadrado cuyos vértices son dichos afijos. Indicar en qué recinto se transforma el interior del cuadrado por aquella inversión.

2.—En un triángulo esférico equilátero, ABC, los lados miden:

$$a = b = c = 60^{\circ}$$

Se pide:

1.º Los cosenos de los ángulos A, B y C.

2.º Si el triángulo esférico MNP tiene por vértices los puntos medios de los lados del ABC, calcular los cosenos de los lados y de los ángulos de dicho triángulo.

TEMA:

Conceptos de anillo y de cuerpo. Ejemplos.

37

PROBLEMAS:

1.—Se considera el cuerpo de las clases residuales de Z módulo 7. Se pide:

1.º Encontrar una ecuación de la forma $x^2 + \bar{p}x + \bar{q} = 0$ que tenga dos soluciones, otra que tenga una, y otra que no tenga solución.

2.º Resolver la ecuación:

$$x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{5}x + 3 = 0$$

Los coeficientes y la incógnita son elementos de dicho cuerpo.

2.—Descomponer el polinomio $x^4 + 4$ en un producto de dos factores, polinomios de segundo grado. Demostrar, utilizando el resultado anterior, que el número $n^4 + 4$, para cualquier valor entero de n, no es nunca un número primo.

TEMA:

Teoremas de Menelao y de Ceva.

38

PROBLEMAS:

1.—Se consideran los puntos fijos A(0,2) y B(0, —2) y un punto variable C tal que el área del triángulo ABC es constantemente igual a 6 en todas las posiciones del punto C. Hallar el lugar geométrico del baricentro del triángulo ABC al variar C con la condición anterior.

2.—Se considera el cuadrado de vértices A(—2,0), B(0, —2), C(2,0) y D(0,2) y las simetrías S_1, S_2, S_3 y S_4 cuyos ejes respectivos son: e_1 de ecuación $x = -2$; e_2 es la recta AB; e_3 es la recta BC y e_4 es la recta $x = 2$.

Demostrar que el producto $S_1S_2S_3S_4$ es un movimiento; determinar sus características y las coordenadas de los vértices del cuadrado transformado del ABCD por dicho movimiento. Entendiendo que los factores en el producto de las simetrías se han de tomar de izquierda a derecha.

TEMA:

Divisibilidad de polinomios de una variable. Principio de identidad.

39

PROBLEMAS:

1.—Se dan los puntos A(4, 0), B(6, 0), A'(0, 2) y B'(0, 4). Encontrar el centro y el ángulo del giro que transforma el vector $\overrightarrow{AB}$ en el $\overrightarrow{A'B'}$. Hallar el transformado, en este giro, del origen de coordenadas. Si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$ se trasladan sobre los ejes de coordenadas, ¿cuál es el lugar geométrico de los centros de los giros que transforman $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$?

2.—Hallar el lugar geométrico del baricentro de un triángulo que tiene dos vértices, A y B, fijos, y cuyo tercer vértice C describe una circunferencia dada.

TEMA:

Divisibilidad de polinomios de una variable.

40

PROBLEMAS:

1.—Se dan los puntos O(0, 0), A(3, 0) y B(5, 0). Se considera una circunferencia variable del plano tangente en B al eje X, y la tangente OT a esta circunferencia desde O, distinta de OB. Se pide la ecuación del lugar geométrico del punto variable T. Se une el punto T con

A; la recta AT corta a la circunferencia variable en otro punto T'. Encontrar la ecuación del lugar geométrico de los puntos T'.

2.—¿Qué duración tendrá en Madrid el día del solsticio de verano? (Latitud de Madrid: $\varphi = 40^{\circ}\,24'$).

TEMA:

Conceptos de grupo y anillo.

41

PROBLEMAS:

1.—Se dan los vectores $\vec{a} = t\vec{u} + 2t\vec{v}$ y $\vec{b} = (1-2t)\vec{u} + (1+t^2)\vec{v}$ donde $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores unitarios sobre dos ejes ortogonales y t es un escalar. Se pide: 1.º El lugar geométrico que describe el vector $\vec{a} + \vec{b}$ al variar t. 2.º Determinar el valor de t para el cual el triángulo determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ tiene área máxima.

2.—Sea D el máximo común divisor de dos números y M su mínimo común múltiplo. Se sabe que $D \times M = 504$ y que $M/D = 14$. Determinar razonadamente esos números.

TEMA:

Simetría axial en el plano. Producto.

42

PROBLEMAS:

1.—Se multiplica la simetría de eje $x = y$ por la de eje $x = o$. En el movimiento producto hallar el homólogo del punto (3, 1).

2.—Sea ABC un triángulo equilátero de centro O. Se considera la inversión de centro O y potencia r^2, siendo r el radio del círculo circunscrito al triángulo. Construir la figura inversa del contorno del triángulo, y calcular el perímetro de la misma en función de r.

TEMA:

Concepto de anillo.

43

PROBLEMAS:

1.—Se tiene la ecuación $z^3 + i = 0$.

1.° Comprobar que i es raíz de dicha ecuación.

2.° Separar dicha raíz y resolver la ecuación de segundo grado que resulta, de coeficientes complejos.

3.° Representar gráficamente las tres raíces obtenidas y aplicar la inversión cuyo polo es el origen de coordenadas y cuya potencia es —1, al triángulo determinado por esas raíces.

2.—Se considera un punto A, una circunferencia α, una recta r y un vector $\vec{V}$. Se pide:

a) Construir un triángulo ABC con $B \varepsilon \alpha$, $C \varepsilon r$ y $\overrightarrow{BC} = \vec{V}$

b) Buscar el lugar geométrico de los centros de inversión que dejan los tres puntos A, B y C alineados.

TEMA:

Trigonometría esférica. Fórmulas de Bessel.

44

PROBLEMAS:

1.—Sea la ecuación:

$$x^2 - 2(m + 1)x + 3m + 2 = 0$$

Se pide:

1.° Establecer una relación entre las raíces x_1 y x_2, independiente del parámetro m. Deducir de esta relación los valores de las raíces cuando son iguales.

2.° Determinar para qué valores de m la suma de las raíces, reales o complejas, es igual a la suma de sus cubos. Encontrar dichas raíces.

2.—Dada la sucesión definida por la ley de recurrencia

$x_i = a \cdot x_{i-1} + b$, donde a y b son constantes y $x_0 = 0$. Se pide:

1.° Calcular x_n en función de a y b.

2.° El límite de x_n, cuando n tiende a infinito, y $|a| < 1$.

3.º Calcular $\sum_{i=1}^{n} x_i$.

TEMA:

Giros en el plano.

45

PROBLEMAS:

1.—Sean A(0; 3) y B(0; —3) dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C es variable y describe la circunferencia de centro (4; 0) y radio $r = 2$. Se pide:

1.º Ecuación del lugar geométrico del baricentro del triángulo al variar C.

2.º Determinar las posiciones de ese baricentro cuando el triángulo ABC tenga áreas máxima y mínima.

2.—El trinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ presenta un mínimo relativo para

$x = \dfrac{1}{6}$ y al dividir P (x) por $x—2$ y por $x+1$ da, respectivamente,

por restos 10 y 4. Se pide determinar el área del recinto limitado por la curva $y = xP(x)$ y el eje $y = 0$ explicando el signo que pueda aparecer.

TEMA:

Coordenadas astronómicas.

46

PROBLEMAS:

1.—Un cono de altura h está inscrito en una esfera de radio r. Si se corta la figura por un plano paralelo al de la base del cono, se forma una corona circular limitada por las secciones de dicho plano con la esfera y con el cono. ¿A qué distancia del vértice del cono se ha de considerar el plano secante para que el área de dicha corona sea máxima?

2.—Una semejanza del plano es el producto de una homotecia, de centro (2, 0) y razón 2, por un giro de centro el origen de coordenadas y ángulo + 90º. Encontrar las ecuaciones de la semejanza y las coordenadas del centro (punto invariante).

TEMA:

Números congruentes.

47

PROBLEMAS:

1.—Un movimiento directo del plano transforma el punto A (1, —1) en el origen de coordenadas, y el punto B (—1, —3) en el B'(2, 0). Descomponer este movimiento en el producto de una traslación por un giro. Encontrar el transformado (P'(x', y') de un punto P (x, y) en dicho movimiento. Determinar analítica y gráficamente el punto invariante.

2.—Dado un triángulo cualquiera ABC, dividir este triángulo en dos partes equivalentes por una paralela al lado BC.

TEMA:

Rectas de regresión y coeficiente de correlación lineal.

TEMAS PROPUESTOS
EN LAS
PRUEBAS DE MADUREZ DE 1967

48 (1)

PROBLEMAS:

1. — Dados los polinomios

$$A(x) \equiv x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + a$$
$$B(x) \equiv x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

determinar el valor de a, sabiendo que el máximo común divisor de ambos es un polinomio de segundo grado. Encontrado éste, resolver las ecuaciones $A(x) = 0$ y $B(x) = 0$.

2. — Se tiene la igualdad

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{3^2} + \frac{c}{3^3} + \frac{d}{3^4} + \frac{e}{3^5} = \frac{2^6}{3^5}$$

Calcular los números a, b, c, d y e; que son números naturales y menores que 3.

TEMA:

Inversión en el plano.

49 (2)

PROBLEMAS:

1. — Dado un triángulo cualquiera ABC, trazamos los vectores

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CA},$$

Los puntos D y E obtenidos se unen entre sí y con el punto B.

1.° Demostrar que los lados del triángulo BDE son respectivamente dobles de las medianas de ABC.

2.° Deducir qué punto es el A respecto del triángulo BDE.

3.° Explicar cómo puede construirse un triángulo ABC dado por sus tres medianas.

2. — Si O es el origen de coordenadas, a cada punto P del plano se le hace corresponder uno de los puntos P' tales que el triángulo OPP' sea equilátero.
   a) ¿Qué transformación geométrica es la que asigna a cada punto P el P' así elegido?
   b) Encontrar la ecuación del lugar geométrico de P' cuando P recorre la recta $x = 2$.

TEMA:

El número entero. Concepto de anillo.

50 (3)

PROBLEMAS:

1. — En una gran caja cúbica se pueden colocar, sin dejar vacíos, cajas ortoédricas iguales, cuyas dimensiones son 28 cm., 14 cm. y 10 cm. Calcular la arista de aquella gran caja sabiendo que es la menor posible.
¿Cuántas cajas menores cabrán en aquella gran caja mínima?

2. — Un polinomio $P(x)$ de segundo grado es divisible por $x + 1$, y los restos de dividirlo por $x - 1$ y por $x - 2$ son iguales. Además, $P(0) = 4$.
   a) Determinar el polinomio $P(x)$ y representar la función $y = P(x)$.
   b) Determinar el campo de existencia de la función $z = \sqrt{P(x)}$.

TEMA:

Simetrías en el espacio.

51 (4)

PROBLEMAS:

1. — Se consideran los puntos $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$.
   1.° ¿Qué transformación geométrica es la que asigna a cada punto P del plano, el baricentro G del triángulo PAB?
   2.° Encontrar la ecuación del lugar geométrico del punto G cuando P recorre la recta de ecuación $2x + y = 6$.

2. — En un lugar, cuya latitud N es $40^\circ\ 25'$, el Sol culmina cierto día, a su paso por el meridiano del lugar, en un punto cuya distancia esférica al punto Sur del horizonte es 70°.
   a) ¿Cuál es la declinación del Sol ese día?
   b) ¿Entre qué valores debe estar comprendida la declinación de una estrella, no circumpolar, para que sea visible en dicho lugar?

TEMA:

Sistemas de numeración.

52 (5)

PROBLEMAS:

1.— El máximo común divisor de los números naturales es 8, y su mínimo común múltiplo es 504. Se representa por x' el cociente $x : 8$ y por y' el $y : 8$. Calcular:

a) El producto $x' \cdot y'$.
b) Todos los pares posibles de x' e y'.
c) Todos los pares de valores de x e y.

2.— Calcular a y b para que el polinomio

$$P(x) = a\,x^4 + b\,x + 1$$

sea divisible por $(x - 1)^2$, y hallar el polinomio cociente

$$Q(x) = \frac{P(x)}{(x-1)^2}.$$

Representar la función $y = Q(x)$ y encontrar el área del recinto limitado por esa curva y la recta $y = -x + 1$.

TEMA:

Triángulos esféricos. Area de un triángulo esférico.

53 (6)

PROBLEMAS:

1.— P y Q son dos puntos variables del plano alineados con $O(0, 0)$, que cumplen la condición: razón simple $(OPQ) = -\frac{1}{2}$. Encontrar la ecuación del lugar geométrico de P cuando Q recorre la circunferencia de centro el punto $C(4, 4)$ y radio 2.

2.— Un rayo luminoso parte del punto $F(5, 10)$ y después de reflejarse en la recta $3\,x + 4\,y = 30$, pasa por el punto $P(13, 4)$.

Determinar:

a) Coordenadas del punto de aquella recta en que el rayo luminoso cambia de dirección.
b) Longitud del camino recorrido por el rayo desde F hasta P, y explicar por qué esta longitud es mínima.

TEMA:

Divisibilidad de polinomios de una variable.

54 (7)

PROBLEMAS:

Verse 42 pág 61

1. — Un número entero N descompuesto en factores primos es de la forma

$$N = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma}$$

y tiene 36 divisores positivos.
Si se expresa en base 2, en base 3 y en base 6, se obtienen números terminados en dos ceros. Determinar N.

No queda determinado por ser 6 = 2 . 3

2. — Se tiene el sistema

$$\left.\begin{aligned}(m^2-1)\cdot x+(m+1)^2 y&=m+1\\(m+1)\cdot x+(m-1)\,y&=m+1\end{aligned}\right\}$$

y se pide:

a) Discutirlo encontrando los posibles valores de m, a fin de que el sistema sea determinado, indeterminado o imposible.
b) Resolver el sistema en los casos de compatibilidad.
c) Encontrar valores de m para que aquellas ecuaciones representen en coordenadas cartesianas: 1) rectas paralelas, y 2) rectas perpendiculares.

TEMA:

Fórmulas de Bessel.

55 (8)

PROBLEMAS:

1. — En una inversión de polo $O(0, 0)$, son homólogos los puntos $A(2, 0)$ y $A'(8, 0)$. Encontrar la ecuación de la circunferencia de puntos dobles, y la ecuación de la figura inversa de la recta $x + y = 4$.

2. — En el plano se dan las rectas a, b, c concurrentes en O. El ángulo $\widehat{(a, b)} = 30°$ y el ángulo $\widehat{(b, c)} = 60°$. Si P es un punto cualquiera del plano, P' el simétrico de P respecto de a, P'' el simétrico de P' respecto de b y P''' el simétrico de P'' respecto de c, encontrar, tomando la recta a como eje x, la ecuación del lugar geométrico del punto medio M del segmento PP''', cuando P recorre el plano.

TEMA:

Rectas de regresión de una distribución estadística bidimensional.

56 (9)

PROBLEMAS:

1. — Demostrar que si dos números naturales A y B se escriben, respectivamente, en bases α y β con las mismas cifras y en el mismo orden, se verifica:

$$A \equiv B \pmod{\alpha - \beta}$$

2. — Se tiene idénticamente:

$$\frac{x(x-1)}{(x+1)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Se pide:

a) Obtener A, B y C.
b) Calcular

$$\int_0^1 \frac{x(x-1)\,dx}{(x+1)(x^2+1)}$$

TEMA:

Resolución de triángulos esféricos rectángulos.

57 (10)

PROBLEMAS:

1. — A cada punto $P(x, y)$ del plano se le hace corresponder el $P'(x', y')$ dado por la ecuación (I) $z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$, en donde $z' = x' + i\,y'$ y $\bar{z}$ es el conjugado de $z = x + i\,y$.

1.° Encontrar x' e y' en función de x e y.
2.° Hallar la figura transformada de la circunferencia $x^2 + y^2 - x = 0$.
3.° ¿Qué transformación geométrica representa la ecuación (I)?

2. — Sea el conjunto $\{x, y, z\}$, de tres rectas concurrentes en O, y perpendiculares dos a dos.

a) Demostrar que la identidad I y las tres simetrías axiales S_x, S_y, S_z forman un grupo. Formar la tabla del grupo.
b) Formar los productos de las simetrías S_{xy}, S_{yz}, S_{zx} respecto de los planos determinados por cada dos de aquellas rectas.
c) Producto de la simetría axial S_x por la simetría plana S_{yz}.

TEMA:

Coeficiente de correlación lineal.

58 (11)

PROBLEMAS.

1. — Sea la identidad

$$An^4 + Bn^3 + Cn^2 + D - A(n-1)^4 - B(n-1)^3 - C(n-1)^2 - D(n-1) = (2n-1)^3$$

Calcular A, B, C y D.

2. — Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y + z = 3 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x + 3y + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

en el cual los coeficientes y las incógnitas pertenecen al anillo de las clases residuales módulo 6.
Constrúyanse previamente las tablas de adición y multiplicación en dicho anillo.

TEMA:

Coordenadas astronómicas.

59 (12)

PROBLEMAS:

1. — Se considera la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$, y en ella los puntos $A(-4, 0)$ y $B(4, 0)$. Si P es un punto variable de la circunferencia, M el punto medio del segmento BP y Q el punto medio del segmento AM, encontrar la ecuación del lugar geométrico de Q al recorrer P la circunferencia.

2. — Sabiendo que la longitud del Observatorio de Madrid es 3° 41′ 15 W y que la de Buenos Aires (Estación radiográfica de la Dársena) es de 58° 22′ W, se pide:
   a) Encontrar la diferencia entre las horas locales de dichas capitales.
   b) ¿Qué día y hora es en Buenos Aires cuando en Madrid son las dos de la madrugada del día 15 de junio?

TEMA:

Sistema de ecuaciones de primer grado. Teoremas de equivalencia.

60 (13)

PROBLEMAS:

1. — Dada la identidad

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 + x} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} - \frac{C}{x}$$

se pide:

a) Obtener A, B y C.
b) Calcular el valor de

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^3 + x}\, dx$$

2. — Demostrar, por el principio de inducción (o recurrencia), la siguiente fórmula:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 = \binom{2n+2}{3}$$

Como aplicación, calcular:

$$S_1 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 100^2$$

y después:

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2$$
$$S_3 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 99^2$$

TEMA:

Triángulo astronómico. Transformación de coordenadas.

61 (14)

PROBLEMAS:

1. — Se tiene el triángulo ABC de lados

$$a = 7 \quad ; \quad b = 6 \quad , \quad c = 5$$

1.º Determinar algebraicamente los radios de las circunferencias cuyos centros son A, B y C y que son tangentes dos a dos.
2.º Reconocer que las tres tangentes comunes a los tres pares de circunferencias tangentes obtenidas pasan por un punto. ¿Qué punto es éste, respecto del triángulo ABC?

2. — Se sabe que el argumento de un producto de números complejos es igual a la suma de los argumentos de los factores, y que el módulo del producto es el producto de los módulos.
Recordado esto, explicar cuál es la transformación geométrica del plano que hace corresponder a cada punto $Z = x + iy$ el punto $Z' = x' + iy'$, tal que $Z' = 2iZ$.
Si Z recorre la línea $x^2 + y^2 - 2x = 0$, ¿qué curva describe Z'?

TEMA:

Determinar el segundo y tercer orden.

62 (15)

PROBLEMAS:

1. — Descomponer de todas las maneras posibles la fracción $\dfrac{230}{247}$ en suma de dos fracciones positivas de denominadores respectivos 19 y 13.

2. — Los gastos anuales de entretenimiento de un automóvil son:
Fijos: *a*) Por amortización, 8.000 ptas.; *b*) Por seguros e impuestos, 2.000 ptas.

Variables: *a*) Por gasolina, 8 litros a 11 ptas./litro cada 100 km.; *b*) Por cubiertas y cámaras, 4 a 750 ptas./una cada 30.000 km.; *c*) Por engrasado y lubrificantes, 300 ptas. cada 2.000 km.; *d*) Por reparaciones, 500 ptas. cada 5.000 km.

Se pide:

1.º Encontrar la expresión del gasto total y en función del número x de kilómetros recorridos en un año. Representación gráfica con las siguientes escalas:

1 cm. por cada 1.000 km. recorridos;
5 mm. por cada 1.000 pesetas de gasto.

2.º Se designa por z al cociente y/x y resulta una f··ción $z = f($·
¿qué línea es la gráfica de esta nueva funció

3.º Calcular los valores de y y de z para $x = 15.$(

TEMA:

Teoremas de Menelao y de Ceva.

63 (16)

PROBLEMAS:

1. — A cada punto $z = x + iy$ del plano se le hace corresponder el punto $z' = x' + iy'$ tal que $z' = -2z$.

Se pide:

1.º ¿Qué transformación geométrica representa dicha correspondencia?

2.º Si z recorre la curva de ecuación $x^2 + y^2 - 2y = 0$, encontrar la ecuación de la curva descrita por z'.

3.º Si A, B, C son los vértices de un triángulo y A', B', C' sus transformados en la correspondencia anterior, hallar la razón de las áreas de los triángulos ABC y $A'B'C'$.

2. — Dado un triángulo esférico trirrectángulo, se considera el triángulo esférico determinado por los puntos medios A, B, C de los lados de aquel. Calcular los lados del triángulo ABC y los cosenos de sus ángulos.

TEMA:

Regla de Cramer.

64 (17)

PROBLEMAS:

√1. — A un congreso de científicos asisten 100 congresistas. De ellos, 80 hablan francés y 40 inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que dos congresistas elegidos al azar no puedan entenderse sin intérprete?

2. — Un rubí que pesa p y vale v se rompe en dos trozos, uno de los cuales pesa x.
Sabiendo que los valores de los rubíes son proporcionales a las potencias de exponente 3/2 de sus pesos, se pide calcular:

a) Depreciación de aquel valor v por la fractura.
b) Calcular x, de modo que la depreciación sea máxima.
c) Valor de esta depreciación máxima.

TEMA:

Tiempos sidéreo, solar y solar medio.

65 (18)

PROBLEMAS:

1.— Dado el número complejo $a = 1 + i$, a cada punto $z = x + iy$ del plano se le hace corresponder el punto $z' = x' + iy'$, tal que $z' = z + a$.

1.º ¿Qué transformación geométrica representa la correspondencia anterior?
2.º Si z recorre la recta de ecuación $x + 2y = 2$, encontrar la ecuación de la figura descrita por z'.
3.º Si r es una recta paralela a la bisectriz del primer cuadrante, ¿cuál es la figura transformada de r?

2.— Se da un ángulo y en su interior un punto P. Construir las circunferencias que pasan por P y son tangentes a los lados del ángulo.

TEMA:

El número racional. Concepto de cuerpo.

66 (19)

PROBLEMAS:

1.— Escribir en el sistema decimal todos los números naturales que en el sistema de base 7 se escriben con tres cifras, y en el de base 9 con las mismas cifras en orden inverso.

2.— Reconocer que la ecuación

$$x^3 + (a + b + 1)\,x^2 + (ab + 2b - 1)\,x + (ab - a + b - 1) = 0$$

admite la raíz $x = -1$.
Rebajar de grado dicha ecuación y determinar las otras dos raíces de la misma.

TEMA:

Triángulos esféricos polares. Propiedades.

67 (20)

PROBLEMAS:

1.— En un semicírculo de borde diametral AB y de centro O, se construyen las semicircunferencias interiores de diámetros AO y OB. Mediante la inversión de polo O y potencia $\overline{OA}^2$, se pide construir la circunferencia tangente a las tres semicircunferencias consideradas. Calcular también el radio de la circunferencia pedida.

2. — Se tiene la curva cuya ecuación cartesiana es:

$$y = x^4 - 2x^2$$

Determinar razonadamente:

a) Puntos de intersección con los ejes coordenados.
b) Simetrías existentes.
c) Puntos de ordenada máxima o mínima relativa.
d) Puntos de inflexión.
e) Dibujo de la línea.

TEMA:

Ecuaciones diofánticas.

68 (21)

PROBLEMAS:

1. — Calcular:

$$\text{M.C.D.}\ (x^3 - 4x^2 - 9x - 4;\quad x^4 - 5x^3 - 3x^2 - 5x - 4)$$

y resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 - 9x = 4 \\ x^4 - 5x^3 - 3x^2 - 5x = 4 \end{array}\right\}$$

2. — En el sistema de numeración de base 5, se adopta la siguiente clave:

$$a = 4,\quad e = 2,\quad o = 0,\quad i = 3,\quad u = 1$$

Se pide:

a) Expresar en dicho sistema el número 1967.
b) Expresar en sistema decimal $aeiou_{(5}$.

TEMA:

Traslaciones en el plano y en el espacio.

69 (22)

PROBLEMAS:

1. — En un triángulo *ABC* (no isósceles ni, por tanto, equilátero) se designan con las letras *G*, *O* y *H*, respectivamente, al baricentro, al circuncentro y al ortocentro.
Encontrar, en la homotecia de centro *G* y razón $-\frac{1}{2}$, las rectas homólogas de las alturas del triángulo dado. Deducir, de ello, la relación de posición de los tres puntos *G*, *H* y *O*, y calcular el valor de la razón simple (GOH).

2. — Se tiene la curva cuya ecuación en coordenadas cartesianas es

$$y = 3^4 - 4x^3$$

y se pide:

a) Intersecciones con los ejes coordenados.
b) Puntos de ordenada máxima o mínima relativa.
c) Puntos de inflexión.
d) Construcción de la línea.
e) Cálculo del área del recinto limitado por el eje x y por el arco de curva cuyos puntos son de ordenada no positiva.

TEMA:

Divisibilidad en el conjunto de los números enteros.

70 (23)

PROBLEMAS:

1.—Se dan los polinomios

$$A \equiv x^4 - 2x^3 - 3x^2 \quad ; \quad P \equiv x^2 + ax + b \quad , \quad R \equiv cx + d$$

tales que

$$A \equiv P^2 + R$$

y se pide:

1.° Determinar los valores de las constantes a, b, c y d.
2.° Comprobar que las tres ecuaciones

$$A = 0 \quad , \quad P = 0 \quad , \quad R = 0$$

tienen una raíz común, supuesto que a, b, c y d toman los valores antes encontrados.

2.—El número 13530 (expresado en sistema decimal) se escribe 20503 en el sistema de base n. Calcular n y una vez calculado este valor, encontrar también en base n, el valor de 20503^2.

TEMA:

Giros en el plano.

71 (24)

PROBLEMAS:

1.—Dado un triángulo *ABC* cualquiera, determinar razonadamente un punto *P* en el interior del triángulo, tal que los triángulos *PAB*, *PBC* y *PCA* sean equivalentes.

2.—Calcular las tres raíces de la ecuación $x^3 + 2x^2 - 16 = 0$, sabiendo que una de ellas es entera.
Representar en el plano cartesiano el triángulo cuyos vértices *A*, *B*, *C* son los afijos de dichas raíces, y encontrar las ecuaciones de las circunferencias inversas de dos lados del triángulo *ABC* en la inversión de polo el origen de coordenadas y potencia 8.

TEMA:

Números congruentes.

72 (25)

PROBLEMAS:

1.—Escribir la tabla de multiplicar en el anillo de clases de restos módulo 6, y resolver en dicho anillo la ecuación $2x^2 = 2$. (Hallar todas las soluciones).

2.—Sin desarrollar ninguno de los dos determinantes, demostrar la identidad

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

TEMA:

Simetrías en el plano.

73 (26)

PROBLEMAS:

1.—Se considera la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, y en ella los puntos $A(-1, 0)$ y $B(1, 0)$. Si C es un punto de dicha circunferencia y D es el punto tal que $ABDC$ es un paralelogramo, encontrar, cuando C recorre la circunferencia dada: *a*) la ecuación del lugar geométrico de D; y *b*) la ecuación del lugar geométrico del centro del paralelogramo $ABCD$.

2.—Sean A, B, C y D cuatro puntos distintos y alineados. Calcular los valores de:

a) $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$.

b) $\overline{AB}^2 \cdot \overline{CD} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{DB} + \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{CD} \cdot \overline{DB} \cdot \overline{BC}$.

(Las medidas de los segmentos indicados son algebraicas, esto es, con su signo correspondiente. Estas medidas pueden obtenerse fijando sobre la recta soporte un sistema de abscisas).

TEMA:

Conceptos de grupo y de anillo. Ejemplos.

74 (27)

PROBLEMAS:

1.—Se da el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 7y + 2z &= 77 \\ x + y + z &= 17 \end{aligned}\right\}$$

Obtener las expresiones de las incógnitas x, z en función de y; y determinar después las soluciones del sistema formadas por ternas de números naturales.

2. — Sin desarrollar los determinantes, demostrar la identidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

TEMA:

Homotecia en el plano.

75 (28)

PROBLEMAS:

1. — Se considera la circunferencia C de ecuación $x^2 + y^2 = 4$, y el punto $P(1, 0)$.

1.° Demostrar que existe una inversión de polo P que transforma la circunferencia C en sí misma y calcular la potencia de esa inversión.

2.° Hallar la ecuación de la línea K inversa de la recta $x = 2$, y el área del recinto comprendido entre la circunferencia C y la línea K.

2. — La latitud de un lugar de la tierra es 36° 33′ N. Calcular la altura del Sol sobre el horizonte en el momento de su paso por el meridiano de dicho lugar el día del solsticio de invierno.
Calcular también la altura de una torre que en ese lugar y en aquel momento, arroja una sombra de 42 metros de longitud.

TEMA:

El número entero.

76 (29)

PROBLEMAS:

1. — Se sabe que la ecuación de coeficientes reales

$$x^4 + x^2 + ax + b = 0$$

admite la raíz

$$x_1 = 1 + i$$

Se pide:

a) Obtener los valores de a y de b.

b) Comprobar que dicha ecuación admite también la raíz $x_2 = 1 - i$, supuesto que a y b se sustituyen por los valores encontrados.

c) Rebajar el grado de la ecuación y encontrar las otras dos raíces.

2. — En el conjunto de los números naturales se definen las dos operaciones siguientes (designadas con los signos * y °):

$$a * b = a + 2b$$
$$a \circ b = 2ab$$

Verificar si la segunda operación (°) es o no distributiva respecto de la primera (*).

TEMA:

La transformación de semejanza en el plano.

77 (30)

PROBLEMAS:

1. — Dados los puntos $A(1, 0)$ y $B(2, 2)$, calcular las coordenadas del punto C, sabiendo que la longitud del segmento AC es doble de la del segmento AB, y que el ángulo $\widehat{BAC}$ mide 60°.

2. — Se consideran los puntos $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ y $B(3, 0)$. P es un punto variable del plano, P' el simétrico de P respecto de O; P'' el simétrico de P' respecto de A y P''' es el simétrico de P'' respecto de B. Demostrar que el punto medio M del segmento PP''' es un punto fijo del plano cuyas coordenadas se piden.

TEMA:

Principio de identidad de polinomios de una variable.

78 (31)

PROBLEMAS:

1. — Determinar el polinomio M.C.D. de los polinomios

$$A(x) = x^{99} + 1 \quad \text{y} \quad B(x) = x^{45} + 1$$

2. — Si convenimos en escribir:

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2^2} + \frac{c}{2^2} + \frac{d}{2^4} = 0,abcd_{(2}$$

siendo a, b, c y d números naturales iguales a 0 o a 1, de manera análoga a como se escribe:

$$\frac{8}{10} + \frac{1}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{5}{10000} = 0{,}8125,$$

se pide:
Calcular a, b, c y d sabiendo que:

$$0{,}8125 = 0,abcd_{(2}$$

TEMA:

Teoremas de Menelao y de Ceva.

79 (32)

PROBLEMAS:

1. — Se tiene la equivalencia

$$a(x - 5y + 3z) + b(5x - 9y + 11z) + c(x - y + 2z) \equiv 0$$

Calcular valores numéricos, no todos nulos, de a, b y c.

2. — Se numeran los días trece de cada mes del año 1968 asignando el número 13 al de enero, 44 al de febrero, y así sucesivamente. Se dividen estos números por 7 y se consideran los restos correspondientes.

a) Si dos de dichos números dan el mismo resto, ¿qué particularidad ofrecen los días respectivos?

b) Comprobar, considerando los restos indicados, que algunos de los días trece señalados caen en martes. Téngase en cuenta que el día 1 de enero de 1968 es lunes.

TEMA:

Giros en el plano.

80 (33)

PROBLEMAS:

1. — Tres polinomios $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ se dice que son linealmente dependientes cuando existen tres números, α, β y γ, no nulos, simultáneamente, tales que el polinomio

$$\alpha P(x) + \beta Q(x) + \gamma R(x)$$

es el polinomio cero (idénticamente nulo) En caso contrario, esto es, cuando la identidad

$$\alpha P(x) + \beta Q(x) + \gamma R(x) = 0$$

es cierta solamente cuando $\alpha = \beta = \gamma = 0$, los polinomios son linealmente independientes.

Demostrar que un polinomio $P(x)$ de segundo grado y sus polinomios derivados $P'(x)$ y $P''(x)$ son linealmente independientes.

2. — Determinar el valor de a para que el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{aligned} ax + y - z &= 0 \\ x + 3y + z &= 0 \\ 3x + 10y + 4z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

admita soluciones distintas de la (0, 0, 0) y resolverlo para dicho valor de a.

TEMA:

Inversión en el plano.

81 (34)

PROBLEMAS:

1. — Descomponer el polinomio $x^4 + 12x - 5$ en un producto de dos trinomios, sabiendo que la suma de dos de sus raíces es 2.

2. — Sin desarrollarlo, demostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \text{ es cero.}$$

TEMA:

Tiempos sidéreo, solar y solar medio.

82 (35)

PROBLEMAS:

1. — Reconocer que el número $A = 13542_{(n}$ es divisible por el número $B = 122_{(n}$ para todo valor de n mayor que 5. Encontrar el cociente $A : B$.

2. — Se tienen las igualdades:

$$x + y = u \quad , \quad xy = v$$

a) Expresar sucesivamente $x^2 + y^2$ y $x^4 + y^4$ en función de u y de v.
b) Con auxilio del resultado anterior, resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x^4 + y^4 &= 34 \end{aligned}\right\}$$

adoptando como nuevas incógnitas u y v.

TEMA:

Simetrías en el espacio.

83 (36)

PROBLEMAS:

1. — Discutir el sistema

$$\left.\begin{aligned} ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= b \\ x + by + az &= 1 \end{aligned}\right\}$$

según los distintos valores de a y b.
Resolver el sistema cuando sea determinado o indeterminado.

2. — El conjunto $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ es un grupo multiplicativo. Formar la tabla del grupo. Si α, β y γ son tres números complejos z_1, z_2 y z_3, encontrar estos tres números.

TEMA:

Triángulo astronómico. Transformación de coordenadas.

84 (37)

PROBLEMAS:

1. — Escribir las tablas de adición y multiplicación en el anillo de las clases de restos módulo 5.
Reducir y ordenar el polinomio producto:

$$(2x^2 + 4x + 1) \cdot (3x^2 + 1x + 2)$$

en donde los coeficientes son clases de restos módulo 5.

2. — Estudiar, según los posibles valores de λ, el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 1 \\ x + y + \lambda z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

TEMA:

Triángulos esféricos. Area de un triángulo esférico.

85 (38)

PROBLEMAS:

1. — Encontrar el valor de a para el cual son compatibles las ecuaciones del sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2y - z &= a \\ 3x - 2z &= 11 \\ y + z &= 6 \\ 2x + y - 4z &= a \end{aligned}\right\}$$

y resolverlo para dicho valor de a.

2. — Determinar los valores de a y de b para que el polinomio $a x^{n+1} + b x^n + 1$ sea divisible por $(x - 1)^2$, y hallar el cociente para esos valores de a y b.

TEMA:

Coordenadas astronómicas.

86 (39)

PROBLEMAS:

1. — Demostrar que en cualquier sistema de numeración de base $n \geq 8$, el número $48841_{(n}$ es un cuadrado perfecto, y hallar su raíz cuadrada en base n.

2. — Estudiar el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + (1 + a)y + z &= 2a \\ x + y + (1 + a)z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

según los valores de a, y resolverlo por la regla de Cramer para aquellos valores de a en que sea posible la aplicación de esta regla.

TEMA:

Fórmulas de Bessel.

87 (40)

PROBLEMAS:

1. — Determinar todos los números enteros que verifican la igualdad

$$3x \equiv 5 \pmod{7}.$$

2. — Hallar todos los valores de α, β, γ para los cuales el polinomio en x:

$$\alpha(x^2 - 2x + 1) + \beta(x^2 - 3x + 5) + \gamma(5x^2 - 11x + 9)$$

sea el polinomio cero (idénticamente nulo).

TEMA:

Resolución de triángulos esféricos rectángulos.

88 (41)

PROBLEMAS:

1. — Dada la recta r de ecuación $y = 2 \cdot x + 3$, y el punto $P(1, 1)$, se pide encontrar las coordenadas del punto P' simétrico del P con respecto a la recta r.

2. — Simplificar:

$$\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3a + \operatorname{sen} \cancel{4}5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a}$$

TEMA:

Fracciones continuas.

89 (42)

PROBLEMAS:

1. — Suponiendo la Tierra perfectamente esférica, se pide determinar el área del casquete visible desde un punto situado a 15 km. sobre la superficie terrestre.

2. — Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 4x = 0$, encontrar la ecuación de su figura inversa en una inversión de polo el origen y de potencia 4.

TEMA:

Ecuaciones diofánticas.

90 (43)

PROBLEMAS:

1. — Se tiene un segmento de longitud constante k, que se desliza, apoyando sus extremos sobre los ejes coordenados. Se pide encontrar el lugar geométrico del punto medio de dicho segmento.

2. — Dadas las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$, se pide hallar el centro de la homotecia directa que transforma la primera en la segunda, y determinar la razón de la misma.

TEMA:

Números congruentes.

91 (44)

PROBLEMAS:

1. — Se da la curva $y = x^3 - 4 \cdot x$. Se pide: *a*) Dibujarla. *b*) Encontrar el área limitada por la curva y el eje x entre los puntos de abscisas $x = -2$ y $x = 2$.

2. — Determinar un número comprendido entre 400 y 500 tal que al dividirlo por 6 se obtenga de resto 5, y al dividirlo por 11 el resto sea 2.

TEMA:

Traslación en el plano.

92 (45)

PROBLEMAS:

1. — *a*) Formar las tablas de sumar y de multiplicar en el sistema de base 7. *b*) Obtener, operando en base 7, $4324_7 \cdot 235_7$.

2. — Discutir, según los valores de m, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 3 \cdot y + z &= 5 \\ m \cdot y - z &= 0 \\ m \cdot x + 2 \cdot z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

TEMA:

Coordenadas astronómicas.

93 (46)

PROBLEMAS:

1. — *a*) Hallar las raíces cúbicas de 1.
Comprobar que forman un grupo multiplicativo.

2. — Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = (\operatorname{sen} x)^x$ en el punto de abscisa $x = \pi/2$.

TEMA:

Simetrías en el plano.

94 (47)

PROBLEMAS:

1. — Dada la función

$$y = \frac{3 \cdot x - 2}{x^2 - 4 \cdot x + 3}$$

a) Encontrar dos números A y B tales que:

$$\frac{3 \cdot x - 2}{x^2 - 4 \cdot x + 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3}$$

b) Aprovechando el resultado anterior, calcular $\int y \, dx$.

2. — Comprobar que el *paralelismo de rectas en el plano* es una relación de equivalencia. ¿Se puede afirmar lo mismo de la *perpendicularidad de rectas en el plano?*

TEMA:

Movimientos de la Tierra.

95 (48)

PROBLEMAS:

1. — En el desarrollo de $(x^2 + x + 1)^5$ encontrar el coeficiente de x^8.

2. — Determinar las cifras x e y a fin de que el número $2\,x\,4\,5\,y$ sea múltiplo de 72.

TEMA:

Inversión en el espacio.

96 (49)

PROBLEMAS:

1. — Dada la circunferencia de centro (2, 0) y de radio la unidad, se pide encontrar la ecuación de la circunferencia homotética de la anterior y de centro en un punto de abcisa 6, siendo el centro de homotecia el origen de coordenadas.

2. — Dado el tetraedro regular de arista 10 cm., hallar los radios de las esferas: *a*) de la que pasa por los cuatro vértices; *b*) de la que es tangente a las cuatro caras; *c*) de la tangente seis aristas.

TEMA:

Sistemas de numeración.

97 (50)

PROBLEMAS:

1. — El séxtuplo del número de combinaciones que se pueden formar con m objetos tomados de 3 en 3, es igual al número de variaciones que se pueden formar con $m - 1$ objetos tomados de 4 en 4. Deducir el valor de m.

2. — Hallar todas las parejas de números naturales tales que su producto sea 3.024 y su mínimo común múltiplo 504.

TEMA:

Triángulos polares. Area del triángulo esférico.

METODOLOGIA PRACTICA
DE
MATEMATICAS

Temas propuestos en las Pruebas de Madurez de 1957 a 1966, ordenados según el Programa Oficial actual.

METODOLOGIA PRACTICA DE MATEMATICAS

SISTEMAS DE NUMERACION

1. ¿En qué sistema de numeración los números 123, 140 y 156 forman progresión aritmética? Calcular la razón de la progresión.

2. La suma de los números 53_x y 62, escrita en el sistema decimal, es 92. Hallar las dos bases x, y.

3. En el sistema de base $n > 4$ se tienen los números $a = 40001$, $b = 221$. Se pide:
   a) Expresiones polinómicas de a y b.
   b) Probar que a es divisible por b y obtener el cociente.

4. Hallar la parte real del número complejo $(a + b\,i)^n$, siendo a y b las raíces comunes de las ecuaciones

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0,$$
$$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$$

y n la base del sistema de numeración, en el cual los números que en dicho sistema se escriben 123, 140, 156 están en progresión aritmética.

5. *a*) Escribe el número $34.250_{(6}$ en el sistema de base 4.
   b) Descomponer el número 26.894, en suma algebraica de potencias de 3.

6. Se tiene:

$$P\,(x) = x^3 - ax^2 + bx - c,$$

siendo $a = 21_{(n}$, $b = 113_{(n}$, $c = 33_{(n}$ y $a + b + c = 47_{(10}$

Se pide:

1.° Calcular, en el sistema decimal, los valores de a, b y c.
2.° Sustituidos los valores hallados en la expresión de $P\,(x)$, resolver la ecuación $P\,(x) = 0$.

7. Directamente en el sistema de base 2, sin pasarlos al sistema decimal hallar la suma de todos los números que en dicha base 2 tienen cinco cifras. Después expresar la suma obtenida en base 10. ¿Cuántos números hay que cumplan dicha condición?

8. Determinar el sistema de numeración, de base menor que 10, en el cual la diferencia entre el número formado por cinco cifras consecutivas, escritas de mayor a menor y el formado por las mismas cifras escritas en orden inverso, es $41643_{(n}$, y calcular ese número. Compruébese que, encontrado n, hay dos valores para el número.

9. Demostrar que, en el sistema de numeración de base n, el último número de la tabla de sumar es $1\ n-2$, y el último número de la tabla de multiplicar es $n-2\ 1$. Compruébese en el caso $n = 12$.

10. Sean los números A y B que se escriben de la misma forma en los sistemas de bases respectivas m y n ($m > n$)

$$A = 444_{(m} \qquad B = 444_{(n}$$

1.° Demostrar que siempre son congruentes respecto del módulo igual a la diferencia de las bases: $A \equiv B$ (mód. $m - n$).
2.° Si $m = 10$, hallar el valor que deberá tener n para que sea la suma $A + B = 616$ escrita en base decimal.

11. Demostrar que el número 44944_n representa un cuadrado perfecto en todo sistema de numeración de base $n>9$. Hallar el valor de la raíz de dicho número cuando $n = 12$ y pasar el resultado a base 5.

12. En los sistemas de numeración de bases n y $n + 1$ un número está representado por 435 y 326, respectivamente. Hallar n y la expresión del número en el sistema decimal.

13. Determinar todos los números que en el sistema decimal se escriben con tres cifras, y que en el sistema de base 7 tienen también tres cifras, respectivamente, dobles de aquéllas.

14. *a)* Se designa por S al menor número que tienen quince divisores positivos, y por D la base del sistema de numeración en que tres números en progresión aritmética se escriben 216, 222, 226.
b) Calculados S y D, resolver el sistema:

$$a + b = S$$
$$m.\,c.\,d.\,(a,b) = D.$$

15. Hallar un número de tres cifras tal que, colocando 73 a su izquierda, el número resultante sea $4\frac{2}{7}$ veces mayor que el que se formaría colocando 73 a su derecha.

16. Un número N al escribirlo en el sistema de base 3 tiene 7 cifras. Razonar las siguientes contestaciones:

1.° ¿Cuántas cifras puede tener el sistema decimal?
2.° Escribir en el sistema diádico (de base 2) el menor número posible que satisface al presente enunciado.

17. En la ecuación $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, los números a, b, c, escritos en cierta base, dan

$$a = 10, \quad b = 113, \quad c = 104 \quad a + b + c = 232$$

1.° Encontrar su valor en base decimal.
2.° Resolver la ecuación.
3.° Dibujando en el plano cartesiano los puntos correspondientes a las raíces de esta ecuación, encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por ellos y el área del círculo correspondiente.

17^a Hallar todas las soluciones enteras de la ecuación $ax - by = 13$, siendo a la base del sistema de numeración en el cual 123, se escribe 66 en base 10, y b es el menor entero positivo que hay que sumar a: 1963^{1964} para obtener un múltiplo de 4.

17^b Dado el número 431, escrito en el sistema decimal, se pide:
a) Hallar la expresión:

$$dcba\alpha$$

de dicho número en el sistema de base cuatro.

b) Dibujar los afijos de los números complejos $a + ic$ y $d + ib$, calculando el área de la figura transformada de la recta determinada por dichos afijos en la inversión cuyo polo es el origen de coordenadas y su potencia 16.

17^c Se establece un sistema S de numeración, cuyas cifras son las 26 letras del abecedario español, con las siguientes equivalencias:

$$a = 0, \ b = 1, \ c = 2, \ d = 3, \ \ldots\ldots\ldots, \ y = 24, \ z = 25$$

se pide:
a) Representar en dicho sistema el número 1965, escrito en el sistema decimal.
b) Expresión en el sistema duodecimal (base = 12) del número expresado en el sistema S por: *preu*.

17^d El número 12.620, escrito en el sistema de base n tiene su raiz cuadrada igual a 112 y su resto igual a 43, ambos expresados también en base n.
Se pide:
a) Calcular la base n.
b) Calcular las coordenadas de los polos y las potencias de las inversiones que transforman la recta en la circunferencia.

17^e El número 46578 (de base 10) se representa por 70803 (en el sistema de base n).
Se pide:
a) Calcular n.
b) Descomposición de $7x^4 + 8x^2 - 46575$ en producto indicado de cuatro factores de 1.^{er} grado y coeficientes complejos.

17^f En una reunión hay varios (más de uno) hombres, mujeres y niños

Entre estas personas reúnen 24 pesetas, aportando 5 ptas. cada hombre, 2 ptas. cada mujer, y una peseta cada niño. El número de mujeres es mayor que la suma del número de hombres y el número de niños. Se pide:

a) Hallar los números de mujeres, hombres y niños de la reunión.

b) Los tres números obtenidos en a) se consideran como cifras de un número N, escrito en un sistema de numeración de base n. ¿En qué orden hay que colocar las cifras, y cuál ha de ser la base n para que el número N sea el menor posible?
Escribir N en el sistema decimal.

17. Determinar todas las soluciones posibles del sistema

$$x + y = 400_6$$
$$\text{m. c. d.}\,(x, y) = 20_6$$

(la notación 400_6 y 20_6 significa que dichos números están expresados en base 6).

CONGRUENCIAS

18. Demostrar que cualquiera que sea el número n, la expresión:

$$7^{2n+1} - 48^n - 7 \text{ es divisible por } 48.$$

19. 1.° Hallar el criterio de divisibilidad por 101, por medio de los restos de las potencias de 10, módulo 101.
2.° Determinar razonadamente las cifras x e y, para que el número $A = 7x1y4$ (base decimal) sea divisible por 101 y por 11.

20. Siendo $28 \equiv 52 \equiv 88$ (mod. m), calcular m.
Construye la tabla de multiplicar de las clases de restos (mod. 7) y, con su auxilio, resuelve la ecuación de congruencia:

$$26x + 16 \equiv 30x - 15 \pmod{7}.$$

21. Calcular los restos potenciales de 7, de 11 y de 13, y demostrar que todo número de la forma

$$a\ b\ c\ a\ b\ c$$

escrito en numeración decimal, es divisible por el número 1001.
Demostrar que el producto de $4n$ enteros consecutivos es divisible por 2^{3n}.

22. Obtener el criterio de divisibilidad por 7 en el sistema decimal.
Aplicación. Dado el número natural

$$a = 123\,x\,45,$$

obtener x a fin de que sea a divisible por 7.

23. Demostrar que siendo n un numero natural cualquiera, el producto $n\,(2n + 1)\,(7n + 1)$ es múltiplo de 6.

24. Se tienen las congruencias

$$9.815 \equiv 575 \pmod{m.}$$
$$442 \equiv 142 \pmod{m.}$$

Calcular todos los valores posibles de m.

25. Dados los números 91 y 271, encontrar todos los módulos respecto de los cuales esos números son congruentes.

26. Probar que A es congruente con B respecto al módulo C, siendo:

A = el menor número entero positivo que tiene 50 divisores enteros positivos;

B = el número que expresa el área limitada por una tangente cualquiera a la hipérbola $xy = 6$ y los ejes coordenados;

C = el coeficiente de x^6 en el desarrollo de $(1 + x + x^2)^3$.

27. Determinar la última cifra de la potencia 17^N, siendo N el número de orden que corresponde a la permutación 53179, supuestas ordenadas en orden creciente todas las permutaciones que pueden formarse con las cifras 1, 3, 5, 7, 9.

28. En base 7, deducir los criterios de divisibilidad por $6_{(7}$, por $11_{(7}$ y por $14_{(7}$. (Sólo puede operarse en base 7.)

29. Establecer los caracteres de divisibilidad de un número por 4 y por 7 en el sistema de numeración de base 8.

Aplicar estos caracteres para determinar en dicho sistema el mayor y el menor número de cuatro cifras, divisibles a la vez por 4 por 7.

30. Deducir el criterio de divisibilidad por 13 en el sistema decimal, y determinar el valor que debe darse a la cifra m en la expresión 8201 m 046 para que resulte un número divisible por 13.

31. Hallar los caracteres de divisibilidad por $6_{(7}$ y $11_{(7}$ en el sistema de numeración de base 7. Una vez obtenidos, resolver las siguientes cuestiones:

a) ¿Es divisible por $6_{(7}$ u $11_{(7}$ el número $4.251.644_{(7}$?

b) En caso de no serlo, sustituir la cifra 2 por otra, para que el número que resulte sea divisible por $6_{(7}$ y $11_{(7}$.

32. Se da la sucesión de números naturales 15; 693, 3.3.15, 9.177, ..., ..., de término general $a_n = (6\,n - 5)\,(6\,n - 3)\,(6\,n - 1)$ y se pide:

a) Expresar como función de m, en forma simplificada, la suma de sus m primeros términos.

b) Demostrar que la cifra de las unidades de a_n es 5, siempre que n no sea congruente con 2 o con 4 respecto al módulo 5.

33. Obtener el carácter de divisibilidad por 3, de un numero escrito en base 2. Determinar si el número escrito en base 2, de 128 cifras, de las cuales son distintas de cero aquellas que ocupan lugares de orden, a partir de la derecha, dados por potencias de 2, es divisible por 3, y caso de no serlo, hallar el resto de su división por 3.

33 Escribir las tablas de sumar y de multiplicar en el anillo de las clases de restos módulo 5. Hacer aplicación de ellas para resolver en dicho anillo el sistema:

$$\overline{4}\,x + \overline{3}\,y = \overline{1}$$
$$\overline{3}\,x + \overline{2}\,y = \overline{3}$$

en donde los coeficientes son clases de restos módulo 5.

33[b] *A*) Formar las tablas de sumar y de multiplicar con números del anillo de clases residuales módulo 7.
B) Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 2\,x + 3\,y - z &= 1 \\ 3\,x - y + 2\,z &= 2 \\ x + 2\,y - 3\,z &= 4 \end{aligned}$$

supuesto que sus coeficientes son elementos de aquel anillo sometidos a dichas operaciones indicadas de sumar y multiplicar.

33[c] Hallar la fórmula general de todos los números naturales congruentes con 5 respecto al módulo 11 y a su vez congruentes con 4 respecto al módulo 13. De ellos, ¿cuál es el de tres cifras, múltiplo de 7? También de ellos, ¿cuál es el mayor de cuatro cifras?

33[d] Hallar la sucesión de restos potenciales de 7 respecto al módulo 10 y calcular la última cifra de la potencia:

$$17^{819}.$$

DIVISIBILIDAD

34. Obtener todos los números comprendidos entre 100 y 500, que tengan con 2160 el máximo común divisor 40.

35. Las aristas de un ortoedro miden 336,6 cm., 338.8 cm. y 715 cm. Se quiere dividir a dicho ortoedro en el menor número posible de cubos iguales. ¿Qué longitud deberá tener la arista de dicho cubo?

36. Calcular los números a y b, para (que sea m. c. d.) $(a\ b) = 18$, sabiendo que a tiene 21 divisores y b, 10.

37. Hallar todos los divisores del número 1274000 que sean cuadrados perfectos, y calcular la suma de todos ellos.

38. *a)* Hallar el número que admite sólo los factores primos 2 y 3. y la suma de sus divisores es 28.
b) Hallar dos números A y B, conociendo A — B = 990 y su m. c. m. igual a 273581.

39. Calcular la arista del menor cubo en el que pueden acoplar, sin dejar espacios vacíos, un número entero de ortoedros iguales cuyas dimensiones, expresadas en centímetros, son $C_{4,2}$, P_4 y el módulo del complejo $8-6i$. ¿Cuántos ortoedros pueden acoplarse?

40. Hallar dos números: su m. c. d., $D = 15$, y su m. c. m., $M = 6300$. Encontrar todas las soluciones.
Número de soluciones en el caso general en que el cociente $\frac{M}{D}$ admita descomposición factorial de n factores primos distintos.

41. Hallar todos los números menores que 1.000, que sean múltiplos de 28, y que divididos por 15 den resto 9.

42. 1.—Un cierto número, descompuesto en factores primos es de la forma $N = a^a \cdot b^b \cdot c^c$. Este número tiene 36 divisores, y si le escribimos en la base 2, en la base 5 o en la base 6, se obtienen números terminados en dos ceros. Determinar dicho número.

43. Hallar tres números naturales a, b, c, sabiendo:
1.° Que tomados dos a dos tienen como m. c. d. 17.
2.° Que a + b + c = 255.
3.° Que el m. c. m. de a, b y c es igual a 1.785.
Comprobar que los números obtenidos pueden ser las longitudes de los tres lados de un triángulo, y determinar el valor del ángulo opuesto al mayor lado.

44. Dada la descomposición en factores primos de $N = 2^a\ 3^b\ 5^3$, hallar el número y la suma de sus divisores pares.

45. Hallar cuantos números hay menores que 1.300 primos con 23 y 53.
Hallar también la suma de los números no primos con 23 y 53, menores que 1.300.

46. Se tiene el número de cuatro cifras de la forma N = aabb. Se pide:
a) Demostrar que N es divisible por 11. Calcular el cociente N: 11.
b) Expresar la igualdad que relaciona a y b para que el cociente N: 11 sea también divisible por 11.
c) Supuesto todo lo anterior, determinar el valor de a para que el cociente N: 11^2 sea cuadrado perfecto.

47. Dado el número 23a 7b 3, hallar la condición que han de cumplir a y b para que el número sea divisible por 7. Hallar también valores de los dígitos a y b, para los cuales el número es múltiplo de 7.

48. Demostrar que si a y b son primos entre sí, los números a + b y $(a + b)^2 + ab$. también son primos entre sí.

49. Encontrar dos números, sabiendo que la suma del m. c. d. y el m. c. m. de estos números es 76.

50. Se considera la fracción decimal periódica: 1,04166... y las fracciones iguales a la generatriz de este número. Encontrar aquellas de estas fracciones en que la suma de los términos es un múltiplo de 42 comprendido entre 500 y 1.000.

51. Se tiene el número N = 3 y 4x, cuyas cifras son x, 4, y, 3. Calcular x, e, y, de modo que N sea múltiplo de 18. Obtener todas las soluciones existentes.

52. Hallar dos números naturales, *n* y *n'*, que sean proporcionales a 3 y 5 y tales que el producto de su m. c. d. por su m. c. m. sea 15.360. ¿Cuál es el logaritmo de la diferencia $n' - n$, si la base es 0,5?

53. Dada la descomposición en factores primos de $N = 3^a \cdot 2^b \cdot 5^r \cdot 7^s$, hallar el número de sus divisores que son múltiplos de 6 y el producto de estos divisores.

54. Hallar un número entero N sabiendo que no tiene más factores primos que 2, 5, 7.

5 N tiene 8 divisores más que N
8 N tiene 18 divisores más que N

Calcular la suma de todos los divisores de N.

55. Hallar un número *n*, que no tenga otros factores primos que 2 y 3, y tal que el número de divisores de n^2 sea el triple del número de divisores de *n*.

56. Hallar dos números, sabiendo que su máximo común divisor es 120, y la diferencia de sus cuadrados 345.600. ¿Cuántas soluciones hay?

57. Determinar los valores *x*, *y*, *z*, para que el número $13xy45z$ sea divisible por 792.

58. Hallar un número natural que cumpla estas condiciones:
a) Sólo tiene dos divisores primos distintos.
b) El número total de sus divisores es 6.
c) La suma de todos sus divisores es 18.

59. El mínimo común múltiplo de dos números es 1.260, y la suma de sus cuadrados es igual a 39.456. Hallar dichos números.

60. Demostrar que la fracción $\frac{2n + 3}{4n + 5}$, es irreducible para cualquier valor natural de n.

61. Demostrar que no existe ninguna fracción ordinaria tal que sumando 36 a su numerador y $\frac{1}{4}$ a su denominador dé por resultado $\frac{7}{11}$.

62. Probar las siguientes relaciones entre números naturales:

a) El cuadrado de número par es múltiplo de 4, y el cuadrado de un número impar un múltiplo de 4 más 1.

b) Si a, b, c son números primos entre sí, que satisfacen a la relación $a^2 = b^2 + c^2$, se verifica que de los números b y c uno es par y el otro impar y a es impar.

c) Con la misma hipótesis del apartado anterior y suponiendo que b sea de los números b y c el que es par, demostrar que $a + b$ y $a - b$ son primos entre sí, y son los cuadrados de dos números impares m y n, primos entre sí. Expresar a, b, c en función de m y n.

62ª Sean $A = n^3 + 3n^2 - 7$ y $B = n + 1$ dos números enteros definidos para e entero superior a dos.

a) Demostrar que todo divisor común de A y B divide a 5.

b) Deducir de lo que precede qué particularidad debe presentar n para que A y B admitan por máximo común divisor el número 5.

62ᵇ Dividiendo el número $a = 2103$ por el número b, resulta el cociente entero c y el resto 81.
Calcular todos los pares de valores de b y c.

62ᶜ Dos números naturales a y b, proporcionales a 3 y 7, respectivamente, son tales que su máximo común divisor es igual a 21 . 504.
Se pide:

a) Calcular a y b.

b) Calcular $\log_2$ (b — a). (La base del logaritmo es dos).

c) Siendo a/10 y b/10 las longitudes E de dos puntos A y B de la superficie terrestre, expresadas en grados sexagesimales y 40° N y 60° N sus respectivas latitudes, escribir la fórmula que mide la distancia esférica AB.

62ᵈ a) Demostrar que si un número entero es divisible separadamente por varios números dados, es divisible por su m. c. m.

b) Encontrar dos números tales que cada uno sea divisible por 20, por 30 y por 35, y que la diferencia de sus cuadrados sea igual a 529200.

62[e] *a*) Demostrar que si un número es múltiplo de otros dos primos entre sí, también es múltiplo del producto de estos números.
b) Como aplicación, probar que si n es un número primo mayor que 3, $n^2 - 1$ es múltiplo de 24.

62[f] Dos números naturales A y B al dividirlos por su m. c. d. dan de cociente 8 y 15 respectivamente.
a) Hallar esos números sabiendo que la suma de su m. c. d. y su m. c. m. es 726.
b) Determinar los valores que debe tener m en la expresión

$$x^2 - (m + 1)\, x - m + p$$

para que sea positiva para todos los valores de x, sabiendo que p es la sexta parte de la diferencia de los números A y B.

62[g] Se considera el conjunto C formado por todos los números naturales que tienen doce divisiones (y no más de doce). Se pide:
a) Hallar el mínimo m del conjunto C.
b) Calcular a y b, siendo:

$$a + ib = \frac{1}{\cos 5\, 2\pi/m + i \operatorname{sen} 5\, 2\pi/m}$$

en donde m es el número hallado en *a*), e i la unidad imaginaria.

COMBINATORIA

63. **Disponiéndose de 6 libros diferentes para premiar a los cuatro alumnos mejores de una clase, se pide:**

Hallar de cuántas formas pueden distribuirse esos libros, de modo que a cada uno de esos cuatro alumnos le corresponda un libro por lo menos.

64. **Permutando de todos los modos posibles las cifras de 111223**

se forman distintos números que ordenaremos de menor a mayor. ¿Cuántos números resultan? ¿Qué número ocupa el lugar 50 en esa ordenación.

65. **Calcular A y B, siendo: m. c. m. (A, B) = M = número de puntos de corte de las diagonales de un decágono convexo, interiores al polígono: m. c. d. (A, B) = D = abscisa del punto en el cual la tangente a la curva $y = x^2 - 16\,x + 5$ es paralela a la recta $4\,x - y + 7 = 0$.**

66. **2.° Resolver la ecuación**

$$2 \cdot \binom{2\,x}{x} = 7 \cdot \binom{2\,x - 2}{x - 1}$$

supuesto que x es un número natural.

67. Si $V_{3,n}$ representa el número de variaciones ternarias con n elementos (sin repetición), se pide:

1.° Averiguar la clase de progresión formada por los números $V_{3,3}$ $V_{3,4}$ $V_{3,5}$ ..., $V_{3,n}$ ...

2.° Si con S_p representamos la suma de los p primeros términos de la progresión anterior, ¿qué clase de progresión forman los números

S_1, S_2, ... S_n, ...?

Si $C_{p,n}$ representa el número de combinaciones sin repetición de orden p con n elementos, hallar la razón de los números $V_{p,n}$ y $C_{p,n}$ y descomponer $C_{p,n}$ en la suma de otros dos números combinatorios de inferior base.

68. Si $V_{3,n}$ representa el número de variaciones ternarias con n elementos (sin repetición), se pide:

1.° Demostrar que si p es congruente con q respecto a un módulo, m, también $V_{3,p}$ lo es con $V_{3,q}$ respecto al mismo módulo.

2.° ¿Qué números primos dividen a la vez $V_{3,n}$ y a $V_{3,n+3}$ cualquiera que sea n? ¿Cuáles son los únicos números primos que dividen a la vez a $V_{3,n}$ y $V_{3,n+3}$ para algún valor de n?

3.° Estudio y representación gráfica de la función $y=x\ (x-1)\ (x-2)$.

69. En un puesto de mando, y para transmitir señales, hay, en línea recta, cuatro astas. Las señales consisten en colocar banderas de distintos colores en dichas astas. Según el número de banderas colocadas, colores de las mismas y lugar que ocupen, la señal será distinta. Hallar el número de señales que se pueden transmitir, si se posee un juego de siete banderas con los colores del arco iris.

NOTA.—En cada asta solamente se puede colocar una bandera.

70. Con las cifras 3, 4, 5, 6 se forman todos los números posibles de cuatro cifras (repetidas o no). Se pide:

a) ¿Cuántos números se pueden formar?

b) ¿Cuántos son múltiplos de 11? ¿Cuántos múltiplos de 4?

c) ¿Hay que sean a la vez múltiplos de 11 y de 4? Escribir estos últimos

71. Con las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuántos números diferentes de cinco cifras, distintas o repetidas, se pueden formar? Calcular la suma de todos ellos.

72. Con las seis cifras, 1, 2, 3, 4, 5, 9, ¿cuántos números de seis cifras diferentes se pueden formar que sean múltiplos de 11? ¿Cuál es el menor? ¿Cuál es el mayor? ¿Cuánto vale la suma de todos ellos?

73. Un conjunto *A* está formado por los 12 elementos distintos a_i $(i = 1, 2, ..., 12)$. Se quiere formar otro conjunto *B* con 7 de aquellos elementos, en los siguientes casos:

I) En B se incluye el a_1, pero no el a_2.

II) Por el contrario, en B se incluye el a_2, pero no al a_1.

III) En B no se incluye ni al a_1 ni al a_2.

IV) En B no pueden estar a la vez el a_1 y el a_2.

¿Cuántas formas posibles hay de obtener el B en cada uno de los los cuatro casos anteriores? Si el orden de los elementos en B no se tiene en cuenta, ¿cuántas formas posibles encontraríamos para el caso IV).

74. ¿Cuántos números mayores que un millón pueden escribirse con las cifras 0, 2, 2, 3, 3, 3, 4?

75. Hallar el número de permutaciones de las cifras 1, 2, 3, 4 y 5, en las cuales las tres primeras conserven siempre el orden relativo 1, 2, 3. Demostrar que ninguna de las permutaciones obtenidas es múltiplo de 4.

76. Con las cifras 1, 2, 3, 4, ¿cuántos números de seis cifras pueden formarse? Hallar la suma de todos ellos.

77. ¿Cuántos números de 7 cifras se pueden formar con 3 cifras pares y 4 impares, distintas?:

1.° Sin que intervenga el 0 en ninguno de ellos.

2.° Pudiendo intervenir o no el cero, pero nunca en el primer lugar de la izquierda.

78. Hallar el valor de la razón del número de variaciones ordinarias de k objetos tomados de 5 en 5 y el de combinaciones con repeticion de los mismos objetos 5 a 5, siendo k el valor obtenido con la condición de que resulte exacto el cociente

$$\frac{Kx^6 - 21x^4 + 6x^3 - 14}{3x^3 - 7}$$

79. Demostrar que cualesquiera que sean las cifras a, b, c, se verifica:
1.° La suma de los números que representan las variaciones binarias que se pueden formar con ellas es múltiplo de 22.

2.° La suma de los números que representan las variaciones ternarias con repetición que se pueden formar con ellas es múltiplo de 37.

80. Con las cifras 1, 3, 4, ,5 y 7 se forman números de cinco cifras que no tengan ninguna repetida; se pide:

a) Número total de números que se pueden formar.

b) Número de ellos que son múltiples de 4 y los que son múltiplos de 2.

c) Número de ellos que son múltiplos de 11.
d) Escribir el menor y el mayor de los múltiplos de 11.

80ª Calcular:
a) El número n de números de cinco cifras que se pueden escribir, empleando únicamente las cifras impares, sin repetir en cada número ninguna cifra.
b) La suma de todos los números así formados.
c) El valor de la derivada de la función $y = \sqrt{\dfrac{n + x}{x}}$ para $x = p$ en donde n es el número hallado en a) y

$$p = \frac{1}{3}\left[\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\cdots\cdots}}}\right]$$

POTENCIA DEL BINOMIO

81. **Los valores numéricos de los términos, segundo, tercero y cuarto del desarrollo de $(x + y)^n$ son 240, 720 y 1.080, respectivamente. Calcular:**

1.° Los valores de x, y, n.

2.° Obtener la ecuación $P(x) = 0$, cuyas raíces sean los números primos entre sí proporcionales a aquellos valores.

3.° Estudiar y representar la función $y = P(x)$.

82. **Los términos 2.°, 3.° y 4.° del desarrollo de la potencia $(a + b)^n$ son 240, 720 y 1.080, respectivamente. Calcular a, b y n, siendo a y b primos entre sí.**

82ª Dada la potencia indicada:

$$(x^3 - 2x - 1)^7,$$

se pide:
a) Expresión del término general de su desarrollo.
b) Cálculo de los coeficientes de los términos de grado diez en dicho desarrollo.

82ᵇ Los coeficientes de los términos T_n, T_{n+1}, T_{n+2} que ocupan los lugares n, $n + 1$, $n + 2$ en el desarrollo de $(a + b)^{11}$ están en progresión aritmética.
Se pide:
a) Calcular n sabiendo que $n < 7$.
b) Calcular dos números complejos sabiendo que: I) Su diferen-

cia es un número real. II) La parte real de su suma es igual a $n-3$, siendo n el valor hallado en a). III) Su producto es igual a $-51+8i$.

CALCULO DE PROBABILIDADES

83. En una bolsa se tienen cinco bolas numeradas del 1 al 5. Se pide:

a) Probabilidad de que, al sacar dos bolas, sean de la misma paridad.

b) Probabilidad de que, al sacar dos bolas,sean de distinta paridad.

c) Probabilidad de que, al sacar dos bolas diez veces seguidas, devolviendo las bolas en cada extracción, se obtengan, alternativamente, de la misma paridad y de distinta paridad.

d) Probabilidad de que, en las diez extracciones, cinco sean de distinta paridad.

e) Si se saca una bola, se devuelve a la bolsa, y después se saca otra. Probabilidad de que la cifra de la segunda sea superior que la de la primera.

84. De una baraja española de 40 cartas, se toman al azar 5 de ellas. Calcular la probabilidad de obtener 3 ases y otras dos cartas iguales (2 doses o dos treses, etc.,)

84ª Una urna contiene diez bolas blancas y siete bolas negras. Se extraen de dicha urna simultáneamente dos bolas.

1.° ¿Cuál es la probabilidad para que estas dos bolas sean de colores distintos? Justificar la respuesta.

2.° ¿Cuál es la probabilidad para que las dos bolas sean blancas? ¿Cuál es la probabilidad para que las dos bolas sean negras?

3.° Si consideramos la pregunta primera, ¿a qué se puede llamar suceso contrario? ¿Cuál es su probabilidad? ¿Los resultados de la segunda pregunta, pueden ser controlados?

84ᵇ En una lotería los billetes están numerados consecutivamente desde el 0000 al 9999. Calcular la probabilidad de que obtenga el primer premio alguno de los números que solo tengan tres cifras distintas, tales como: 0094, 0210, 8550, 9676, 3283, ...

84ᶜ De un conjunto de billetes numerados así: 0000, 0001, 0002, ..., 9998, 9999 se saca al azar uno de ellos.
Calcular la posibilidad de que tal billete esté numerado con tres cifras distintas (una de ellas repetida).

DETERMINANTES

85. Resolver las siguientes cuestiones:

a) Hallar los valores de los adjuntos A_{21} A_{22} A_{23} y A_{24} de los elementos de la segunda fila del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

b) Desarrollar en fracción continua la fracción ordinaria:

$$-A_{21}/A_{22}.$$

c) Escribir la ecuación de segundo grado cuyas raíces son los dos últimos cocientes incompletos de esta fracción continua y tal que el coeficiente de x^2 sea 3, y encontrar el área de la porción de plano limitada por el eje de abscisas y la gráfica de la función $y = P(x)$ siendo $P(x)$ el polinomio primer miembro de la citada ecuación.

86. *a)* En virtud de las propiedades de las determinantes, y sin desarrollar, establecer la igualdad siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

b) Demostrar por generalización de la anterior, que

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd + bcd + acd + abd + abc.$$

c) Directamente, sobre el anterior determinante, sin acudir, por tanto, a su desarrollo, establecer que al permutar dos de las letras, el determinante no varía.

87. Hallar:

1.° El valor de λ en la siguiente expresión:

$$\frac{x-y}{m-p} + \frac{y-z}{p-n} + \frac{z-x}{n-m} = \lambda$$

2.° El valor de Δ_n siendo:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \lambda & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \lambda & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & \lambda \end{vmatrix}$$

3.° La representación gráfica de la siguiente función:

$$y = x^2 - \Delta_n.$$

88. Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 2x+1 \\ 2x+1 & 3x-1 & 4x \\ 3x-1 & 4x & 6x-1 \end{vmatrix} = 0$$

efectuando precisamente las transformaciones que se estimen convenientes en el determinante.

89. Sean los determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & x \\ 1 & 9 & x^2 \end{vmatrix}; \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & x^2 \\ -1 & 27 & x^3 \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & x \\ -1 & 27 & x^3 \end{vmatrix}$$

1.° Hallar las raíces de la ecuación $D = 0$.
2.° Demostrar que D_1 y D_2 son divisibles por D y hallar las raíces de las ecuaciones $D_1 = 0$, $D_2 = 0$.

90. Hallar los valores de los adjuntos A_{11} y A_{12} en el determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

y escribir todos los divisores del producto $- A_{12} \cdot A_{43}$.

SISTEMAS DE ECUACIONES

91. Discutir el sistema
$$\begin{aligned} a\,x + \quad b\,y + \quad z &= 1 \\ x + a\,b\,y + \quad z &= b \\ x + \quad b\,y + a\,z &= 1, \end{aligned}$$

según los diversos valores que pueden tomar a y b.
Hallar los valores α, β, γ que satisfacen a la identidad $\alpha\,(x - 2\,y + z) + \beta\,(x - 3\,y + 5\,z) + \gamma\,(5\,x - 11\,y + 9\,z) = 0$. Generalización para el caso en que los coeficientes de los trinomios sean cualquiera.

92. Determinar λ y μ en el sistema
$$\begin{aligned} x + 2\,y &= \lambda \\ 3\,x - \quad y &= \lambda - \mu \\ x - \quad y &= 4 \end{aligned}$$
para que éste resulte compatible.

93. Determinar los valores de m que hacen compatible el sistema **de ecuaciones homogéneas:**
$$\begin{aligned} 2\,x - my + 4z &= 0 \\ x + \quad y + 7z &= 0 \\ mx - \quad y + 13z &= 0 \end{aligned}$$
y resolver el sistema resultante.

94. Discutir el siguiente sistema, según los valores del parámetro K:

$$\begin{aligned} 5x - 11y + 9z &= K. \\ x - 3y + 5z &= 2 \\ 2x - 4y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

95. Dado el sistema

$$\begin{aligned} (m-1)\,x - my &= 2 \\ 6\,mx - (m-2)\,y &= (1-m) \end{aligned}$$

calcular los valores de m, a fin de que aquél sea determinado, indeterminado o imposible.

96. Determinar la condición que han de cumplir a, b, c, para que el sistema

$$\begin{aligned} x - 3y &= 5 \\ 2x + y &= c - b \\ 3x + y &= a \end{aligned}$$

sea compatible.

Resolver el sistema para: $a = 5$, $b = 3$, $c = 2$

97. Dado el sistema de ecuaciones lineales, con las incógnitas x, y, z:

$$\begin{aligned} x + my + z &= m + 2 \\ x + y + mz &= -2\,(m+1) \\ mx + y + z &= m \end{aligned}$$

1.° Encontrar cuáles son los valores del parámetro m para los que no se puede aplicar la regla de Cramer.
2.° En los casos en que sea posible, resolverlo por dicha regla.
3.° Estudiarlo para los casos comprendidos en el apartado 1.°.

98. Hallar el valor de a que hace compatible al sistema

$$\begin{aligned} ax + 3y &= 2 \\ 3x + 2y &= a \\ 2x + ay &= 3 \end{aligned}$$

Sustituido el valor de a en el sistema, resolverlo

99. Hallar el valor de a que hace compatible el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2y - z &= a \\ 3x - 2z &= 11 \\ y + z &= 6 \\ 2x + y - 4z &= a, \end{aligned}$$

y resolver el sistema después de sustituir a por el valor numérico obtenido.

99ª Discutir el sistema:

$$\begin{aligned} (1-m)\,x + (m+3)\,y &= 3\,m+1 \\ 2\,(1-m)\,x + (m+6)\,y &= m+2 \end{aligned}$$

según los valores de m.
Resolverlo en función de m cuando sea determinado.

99ᵇ Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} (m-1)^2\,x + (m^2-1)\,y &= (m+1)^2 \\ (2m-1)\,x + (m+1)\,y &= m^2-1, \end{aligned} \right.$$

se pide:

a) Discutir las condiciones de compatibilidad, incompatibilidad o indeterminación, según los valores de m.

b) Resolver el sistema en los casos en que sea posible.

c) ¿Existe algún valor de m para el cual las ecuaciones del sistema representen dos rectas paralelas?

99ᶜ Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} (m+2)\,x + (m+3)\,y &= 6, \\ (3m+1)\,x + 3\,m\,y &= 4, \end{aligned} \right.$$

Se pide:

a) Calcular m de modo que la solución del sistema verifique a la ecuación

$$x - y = 2$$

b) Calcular dicha solución.

99ᵈ Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} ax + (2a-b)\,y &= a+b-3 \\ 5x + 4y &= 1 \end{aligned}$$

Se pide:

a) Calcular *a* y *b* de modo que el sistema posea infinitas soluciones.

b) Si $M = (a, b)$, hallar el lugar geométrico de M cuando el sistema dado es incompatible.

99ᵉ Dado el sistema

$$\left. \begin{aligned} a\,x + 2\,z &= 0 \\ a\,y - z &= a \\ x + 3\,y + z &= 5 \end{aligned} \right\}$$

calcular los valores de a.

1.º Para que el sistema no tenga solución.

2.º Para que tenga infinitas soluciones.

99ᶠ Determinar el valor de m para que el sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + y + mz &= 0 \\ x - 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

sea compatible. Obtener la solución general de dicho sistema.

VALOR NUMERICO DE UN POLINOMIO Y DIVISIBILIDAD UN POLINOMIO POR EL BINOMIO X—A

100. Un polinomio P (x) dividido por $x + 1$ da el resto -45; dividido por $x - 3$ da de resto -165. ¿Qué resto dará el dividirlo por $x^2 - 2x - 3$? Determinar P (x), sabiendo, además, que es de cuarto grado y divisible por $x\,(x^2-4)$. Resolver, en este caso, la ecuación P $(x) = 0$.

101. Un polinomio P (x) es tal que dividido por $(x-1)$ da de resto, 5, dividido por $(x+1)$ da de resto -1, y dividido por $(x+2)$ da de resto -4. Calcular el resto que da al dividirle por el producto $(x-1).\,(x+1).(x+2)$.

102. Hallar el polinomio de tercer grado P (n), tal que P (o) = 15; P' (2) = 3, P' (4) = 9; Δ^2 P' (n) = 6.

103. Hallar:

a) El resto de la división del polinomio $x^5 - x^4 + x^3 - x^2$ por $x^3 - 1$, sin efectuar la división.

b) Descomposición factoral del polinomio.

104. Probar que el polinomio

$(x - 3)^{2n} + (x - 2)^n - 1$

es divisible por $(x-2)\ (x-3)$

y hallar su cociente por $x - 3$, teniendo presente la igualdad

$(x-3)^{2n} + (x - 2)^n - 1 + (x-3)^{2n} + [(x-3+1)]^n - 1.$

105. El polinomio $P\ (x)$ dividido por $(x - 2)$ da resto 6; al dividirlo por $(x+1)$ da resto -3, y al dividirlo por $(x-1)$, el resto es -5. Calcular el resto de la división de $P\ (x)$ por el producto $(x-2)$, $(x+1)$, $(x-1)$.

106. Dado el polinomio

$$F\ (x) = 2x^4 - 3x^3 - 11x + 6,$$

Hallar otro polinomio de tercer grado. $P\ (x)$, cuyas raíces sean los cuadrados de las raíces de $F\ (x)$ y tal que $P\ (0) = -36$.

107. Contestar las siguientes partes:

1.° Dividiendo separadamente un polinomio en x, por $x - 5$ y por $x + 2$, se obtienen los restos 15 y 1, respectivamente. ¿Cuál es el resto de la división de dicho polinomio por $(x - 5)(x + 2)$?

2.° Estudio y representación geométrica de la función $y = (x - 5)(x+2)$.

3.° Area del recinto limitado por la curva $y = (x-5)(x+2)$ y la recta $y = 2x + 5$.

108. Hallar los valores de a, b, c en el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ para que sea $P(1)=4$; $P'(1)=8$; $P(2)+15\,P(0)=0$. Una vez hallados a, b, c, representar la función $y=P(x)$. Calcular el área comprendida entre la curva y el eje ox.

109. Resolver la ecuación

$$x^5+2x^4-2x^3-4x^2-3x-6=0$$

sabiendo que admite la raíz $x = -2$.

110. El polinomio $P(x)$, dividido por $(x + 2)$ da el resto 4; dividido por $(x+3)$ da el resto 59, y dividido por $(x-4)$ da el resto 136. Hallar el resto que dará dicho polinomio al dividirle, por el polinomio producto de los binomios $(x + 2).(x + 3).(x - 4)$.

111. Determinar A y B en el polinomio $Ax^4 + Bx^3 + 1$, de modo que sea divisible por x^2-2x+1. Escribir un polinomio de cuarto grado que se anule para los siguientes valores: el medio aritmético entre A y B, el medio armónico entre A y B y los complejos conjugados $A + Bi$, $A - Bi$.

112. El polinomio $x^3 - 2x^2 - 15x - x^2\sqrt{3} + 2x\sqrt{3} + 15\sqrt{3}$ se anula para los valores $x = \sqrt{3}$ y $x = -3$. 1.° Determinar otro valor de x que también lo reduzca a cero. 2.°) Tomando en orden creciente los valores que anulan al anterior polinomio como abscisas de tres puntos A, B, C, hallar un cuarto punto D tal que ABCD$= -1$. 3.°) Tomando como unidad 1 centímetro, dibujar sobre una recta los tres puntos A, B, C y determinar gráficamente el punto D.

113 Sea la ecuación: $x^2 - 2(m + 1)x + 3m + 2 = 0$.

a) Expresar la suma de los cubos de las raíces en función del parámetro m.

b) Determinar el valor de m cuando esta suma sea igual a la suma de las raíces (reales o imaginarias).

c) Compruébense los resultados obtenidos.

114 Sea la ecuación: $x^2 - 2(m + 1)x + 3m + 2 = 0$.

a) Estudiar el signo y existencia de las raíces reales de esta ecuación para cada valor del parámetro m.

b) Establecer que las raíces x_1 y x_2 de esta ecuación están ligadas por una relación independiente de m. (Se utilizarán para ello relaciones conocidas entre las raíces y los coeficientes).

Deducir de esta relación los valores de las raíces cuando éstas son iguales.

115. Determinar los valores de los parámetros a y b para que el polinomio

$$x^3+5x^2+ax+b$$

sea divisible por $x - 3$ y también por el cuadrado perfecto $(x + m)^2$ para cierto valor de m, que se calculará también.

116. Dados los polinomios: $x^2 - 4x + 3$ y $2x - 4$, encontrar dos binomios $P(x)$ y $Q(x)$ tales que $P(x)\cdot(x^2-4x+3)+Q(x)\cdot(2x-4)=2x^3-7x^2+$ $+18x-23$.

117. Las tres raíces de la ecuación $x^3 - 2x - x + 2 = 0$ son números enteros Se pide:

a) Hallar dichas tres raíces, x', x'' y x'''.

b) Una vez obtenidas dichas raíces, descomponer la fracción

$$\frac{2x^2 + x - 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

en la suma de tres fracciones,

$$\frac{A}{x-x'}, \quad \frac{B}{x-x''}, \quad \frac{C}{x-x'''},$$

es decir, hallar A,B y C, con la condición que

$$\frac{2x^2+x-7}{x^3-2x^2-x+2}=\frac{A}{x-x'}+\frac{B}{x-x''}+\frac{C}{x-x'''}$$

118. Hallar las tres raíces de la ecuación $Ax^3 + \dfrac{B}{C} = 0$

siendo:

A=El número que en el sistema de numeración decimal equivale al 0,12 en el sistema de base 3.

B=El número de números distintos de siete cifras que se pueden formar con las: 5,3,4,4,0,0,0, (Los que empiecen por cero no deben considerarse).

C=El valor que hace incompatible el sistema $\begin{matrix} 3x - 2y = 4 \\ 9x - Cy = 7 \end{matrix}$

119. *a)* Resolver la ecuación $x^3 - 8x^2 + 29x - 52 = 0$. sabiendo que

una de sus raíces es entera y dibujar los puntos afijos de las tres raíces.

b) Descomponer factorialmente el polinomio $x^3-8\,x^2+29\,x-52$.

c) Hallar por integración el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar alrededor del eje real el triángulo formado por los afijos de dichas raíces.

119ª 1.º Determinar un polinomio $P(x)$ de segundo grado con el coeficiente x^2 igual a 1, divisible por $x+1$ y tal que los restos de dividirlo por $x-1$ y por $x-2$ sean iguales.

2.º Representar la función $y = P(x)$ y hallar sus máximos y mínimos. Determinar también el campo de existencia de la función:

$$y = \sqrt{P(x)}$$

119ᵇ Dado el polinomio

$$x^3 + y^3 + z^3 - m\,x\,y\,z,$$

se pide:

a) Hallar m de modo que sea divisible por $x + y + z$.

b) Hallar todas las soluciones enteras y positivas de la ecuación diofántica:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz = 0.$$

119ᶜ Calcular el resto R de la división del polinomio

$$x^3 - x + 22$$

por el binomio $x + 2$.

a) Calcular el séptimo término T de la progresión geométrica, cuyo primer término es 1458 y cuyo tercer término es 162.

b) Calcular x en la siguiente expresión:

$$x = \sqrt[\log T]{\frac{T^3}{R}} \cdot \sqrt[\log T^3]{\frac{R}{T}} \cdot \sqrt[\log R]{\frac{1}{T^3}}$$

siendo R y T los valores obtenidos en a) y b) respectivamente.

119ᵈ Sabiendo que los restos de la división de un polinomio P (x) por $(x-3)$ y por $(x-1)$ son 58 y 6, respectivamente, se pide:

a) Calcular el resto de la división de P (x) por $(x-3)\,(x+1)$.

b) Calcular el área del recinto limitado por la curva

$$y = x^2 - 19x + 88,$$

El eje xx′ y la bisectriz del primer cuadrante.

119ᵉ *a*) Hallar *a* y *b* en el polinomio $3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + ax + b$ para que sea divisible por $x-2$, y el polinomio cociente tenga por término independiente 4.

b) Siendo *a* y *b* las coordenadas de un punto P, calcular los de P′, simétrico de P respecto a la bisetriz del segundo cuadrante.

119^f Dado el polinomio $4x^3 \ldots 36x^2 + 33x + m$.

a) Determinar *m* de modo que dividido dicho polinomio por $x + 1$ dé -81 de resto.

b) Sustituyendo *m* por el valor obtenido, resolver la ecuación que resulta de igualar a cero dicho polinomio, sabiendo que una de sus raíces es *doble*.

119^g Efectuar la división de $x^m - a^m$ por $x^p - a^p$ y hallar la condición que el resto sea nulo.

119^h Determinar un polinomio P(x) de tercer grado divisible por $x + 1$ y tal que al dividirle por $x - 3$ y $x - 4$, los restos sean iguales. Calcular, además, las raíces de la ecuación $P(x) = 0$.

MAXIMO COMUN DIVISOR DE POLINOMIOS

120. Hallar el m. c. d. de los polinomios.

$$x^3 - mx^2 + nx - 6 \quad \text{y} \quad x^3 + x^2 - px + 8$$

siendo

$$\frac{m}{2}, \quad n-1, \quad \frac{p}{2}$$

los tres primeros cocientes incompletos del desarrollo en fracción continua de la fracción $\frac{347}{112}$

121. Contestar a las siguientes partes:

1.° Calcular el m. c. d. de los polinomios:

$$x^4 + x^3 - 13x^2 - 31x - 18$$
$$x^4 - 12x^2 - 20x - 9.$$

2.° Suprimiendo la solución entera, en la ecuación que resulta igualando a cero este m. c. d., se obtiene en el primer miembro un trinomio de segundo grado. Encontrar las coordenadas del vértice y el eje de la parábola representada por este trinomio.

3.° Area del recinto limitado por esa parábola y la recta $y=2$.

122. Dados los polinomios:

$$A(x) \equiv 3x^5 - 11x^4 + 21x^3 + 31x^2 + 26x - 8$$
$$B(x) \equiv 12x^4 - 11x^3 + 10x^2 + 11x - 2$$

1.° Hallar el m. c. d. de estos dos polinomios.

2.° Resolver la inecuación $D(x) > O$, siendo $D(x)$ el m. c. d. hallado anteriormente; y

3.º Calcular la suma y el producto de los números complejos cuyos componentes son las raíces de la ecuación $D(x)=0$.

123. Elevar al cubo el m. c. d. de los polinomios $3x^4 - 14x^3 + 20x^2 - 11x+2$ y $3x^4-5x^3-4x^2+10x-4$.

124. Calcular m. c. d. $(A, B) = D$, siendo: $A = x^{99} + 1$, $B = x^{45} + 1$, y encontrar dos polinomios M y N, tales que $MA+NB=D$.

125. Las raíces enteras de la ecuación $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 22x + 12 = 0$, se obtienen resolviendo la ecuación que resulta de igualar a cero el m. c. d. del primer miembro de la ecuación dada y del polinomio $3x^3 - 13x^2 + 8x + 12$.
Hallar el m. c. d. de los polinomios dados y las raíces de la ecuación.

126. Demostrar que el m. c. d. de los polinomios

$$A(x)=x^4-14x^3+48x^2+14x-49$$
$$B(x)=x^3-15x^2+63x-49$$

es $B(x)$.

Hallar: *a)* Los puntos de intersección de la curva $y = \dfrac{B(x)}{8}$ con los ejes coordenados.
b) Máximo, mínimo y ecuación de la tangente a dicha curva en su punto de inflexión.
c) Dibujar la gráfica y calcular el área de la superficie de la figura comprendida entre la curva y el eje x.

127. Hallado el m. c. d. de los polinomios $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$ y $-x^4 + 3x^2+6x-8$, representar la gráfica de la función que resulta al tomar como expresión de y dicho m. c. d. Calcular el área limitada por esa curva y el eje de las x.

128. Dados los polinomios:

$$P(x)=x^4+mx^3-2x^2+7x+m$$
$$Q(x)=x^2-4x-m$$

demostrar que se puede determinar m para que $P(x)$ sea divisible $Q(x)$; hallar dicho valor de m y resolver la ecuación $P(x)=0$, en tal caso.

129. Sean los dos polinomios:

$$P(x)=9x^4+27x^3+30x^2-18x+a$$
$$Q(x)=3x^3+8x^2+9x-4$$

Hallar el parámetro a para que el máximo común divisor de P y Q sea de segundo grado. Aplicarlo para hallar las raíces reales e imaginarias de las ecuaciones: $P(x)=0$, $Q(x)=0$.

129ª Hállese el M. C. D.

$$(x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + 2x - 1,\ x^5 - 3x^3 + x^2 + 2x - 1)$$

y resuélvase la ecuación:

$$x^5 - 3x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

Calcúlese el área limitada por la curva:

$$y = x^5 - 3x^3 + x^2 + 2x - 1$$

el eje X y las ordenadas -1 y 0. Dibújese la curva.

129ᵇ Hallar el polinomio $D(x)$ que sea m. c. d. de los polinomios:

$$A(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$$
$$B(x) = -x^3 + 3x^2 + 6x - 8$$

Representar gráficamente la función $y = D(x)$ y calcular el área del recinto limitado por esta curva y el eje OX.

129ᶜ Dados dos polinomios $P(x) = x^3 - 5x^2 + 9x + k$ y $M(x) = x - 1$.

a) Determinar el valor de k para que $M(x)$ sea máximo común divisor de los dos y hallar $Q(x) = \dfrac{P(x)}{M(x)}$ para dicho valor de k.

b) Representar la función $y = Q(x)$ y hallar las coordenadas de su vértice y la ecuación del eje.

129ᵈ Se dan dos polinomios:

$A(x) = x^4 - 2x^3 - 14x^2 - 2x - 15$; $B(x) = x^3 - 2x^2 - 15x$.

y se pide:

a) Calcular el máximo común divisor $D(x)$ de $A(x)$ y $B(x)$.

b) Resolver la ecuación $D(x) = 0$.

c) Resolver la ecuación $A(x) = 0$.

COEFICIENTES INDETERMINADOS

130. Si α y β son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, calcular en función de a, b y c las siguientes expresiones:

$$\alpha^2+\beta^2; \qquad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}; \qquad \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}.$$

131. Se tiene $y = ax^3 + bx^2 + cx + m$

Tal que

para $x=-1$ es $y=8$
" $x=3$ es $y=36$
" $x=-4$ es $y'=129$
" $x=0$ es $y'=1$

Calcular los valores de a, b, c, m.

132. Por el método de los coeficientes indeterminados, encontrar los valores de A, B y C que verifican la igualdad:

$$\frac{6}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

133. Dada la fracción algebraica:

$$F(x)=\frac{x^4-5x^2+4}{x^6-4x^5+2x^4+8x^3-7x^2-4x+4},$$

se pide:

1.° Hallar la raíz cuadrada del denominador, sabiendo que la raíz cuadrada es un polinomio.

2.° Simplificar la fracción $F(x)$, sabiendo que el numerador y el denomindor se anulan para tres valores comunes de la variable x.

3.° Si $F_1(x)$ es la expresión irreducible de $F(x)$, descomponer $F_1(x)$ en fracciones simples; es decir, hallar los números a, b, c y A, B, C, tales que se verifique:

$$F_1(x)=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}.$$

134. Descomponer en suma de fracciones simples la fracción algebraica

$$F(x)=\frac{3x^2+nx+11}{(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}$$

en la que n es el número de divisores de 54.000

135. Calcular a, b y c, para que la expresión

$$E(x)=\frac{x^3+ax+b}{x-1}+\frac{x^2+bx+c}{x-2}+\frac{x^4+cx+a}{x-3}$$

sea entera.

136. Dado el polinomio $8x^3-14x^2+2x-3$, que es la diferencia de los cuadrados de dos trinomios de segundo grado, hallar:

1.° Estos trinom os.

2.° La descomposición factorial de los mismos.

3.° La posición relativa de las parábolas representativas de estos trinomios, y calcular la distancia entre sus vértices.

137. El vértice de la parábola $y=-x^2+ax+b$ es el punto (α β) tal que dichos valores cumplen para todo valor de x:

$$\frac{7x-17}{x^2-5x+6}=\frac{\alpha}{x-2}+\frac{\beta}{x-3}$$

Se pide:
a) Representar dicha parábola.
b) Probar que es nulo el determinante: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ a & b & 2 \\ 9- & 1 & 3 \end{vmatrix}$

137ª Dada la igualdad

$$(1) \qquad \frac{-2x+11}{5x^2+5x-10} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

Se pide:
a) Calcular *a* y *b* de modo que se verifique la igualdad (1).
b) Determinar λ de modo que sea compatible el siguiente sistema homogéneo.

$$\begin{aligned} ax + 3y + z &= 0 \\ x - by + \lambda z &= 0 \\ x + 2y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

siendo *a* y *b* los números calculados en a).

137ᵇ Dado el polinomio: $x^4 - 8x^3 + ax^2 + bx + 1$. Se pide determinar:
a) *a* y *b* para que dicho polinomio sea cuadrado perfecto.
b) Hallar todas las raíces del polinomio que resulta al sustituir *a* y *b* por los valores hallados en a).

137ᶜ *a*) La funcion $y = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ tiene los coeficientes enteros positivos y menores que 10. Calcular esos coeficientes a, b y c, sabiendo que los valores que toma esa función para $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, son todos ellos congruentes módulo 5.
b) Calcular el volumen de la figura engendrada, al girar alrededor del eje de las *x*, el recinto limitado por ese mismo eje, por la gráfica de la función anterior y por las rectas $x = 1$, $x = -1$.

137ᵈ Se da la función $y = f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1$.
a) Determinar los coeficientes *a*, *b*, *c*, *d* de modo que

$$f(x) \quad (12x^2 - 4x - 3) \cdot (ax + b) + cx + d.$$

b) Demostrar que $y = f(x)$ pasa por un máximo M y un mínimo *m* y que la abscisa *u* y la ordenada *v* de uno cualquiera de estos valores máximos o mínimos verifican la relación:

$$= + \frac{20}{9} u + \frac{5}{6}.$$ Deducir de ello M y *m*.

TRASLACION, GIRO Y SIMETRIA

138. Dos rectas paralelas r y r' limitan una banda; a un lado, y fuera de ella, se tiene el punto A, y al otro lado, y también fuera de ella, el punto B.

Encontrar un punto M en r y otro M' en r', de modo que sea AM = BM', y tal que MM' sea perpendicular a r y r'.

139. Dada una recta r y una circunferencia C, determinar un segmento AB que cumpla las siguientes condiciones:

1.ª Que A pertenezca a la circunferencia C.
2.ª Que B pertenezca a la recta r.
3.ª Que el segmento AB tenga dirección y longitud dadas.

Discutir el número de soluciones del problema, según cuáles sean la longitud del segmento AB y la posición relativa de la recta y la circunferencia.

140. Se dan en el plano dos rectas paralelas r y r' y, a uno y otro lado de la zona determinada por ellas, dos puntos fijos, A y B. Encontrar sobre r un punto, M, y sobre r' un punto, M', tales que, dada además la dirección de la recta MM', se verifique:

1.° *a)* $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM'}$; *b)* $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM'}$.
2.° Que el camino total $AM + MM' + M'B$ sea mínimo.
3.° Si los puntos A y B están situados a un mismo lado de la referida zona, distando del lado de la misma más próximo a ellos 10 cm. y 15 cm., respectivamente y midiendo 20 cm. la proyección ortogonal de AB sobre dicho lado, determinar, analítica y gráficamente, sobre este lado de la zona el punto, P, para el cual el camino APB es mínimo.

141. Un movimiento inverso de plano hace corresponder a la semirrecta de origen A (1,0), situada en el eje de abscisas y de sentido positivo, la semirrecta de origen A' (2,2), situada en la bisectriz del primer y tercer cuadrante del sistema de ejes coordenados cartesianos ortogonales, y toda ella en el primer cuadrante. Se pide.

a) Hallar una simetría axial y un giro de cuyo producto resulte el movimiento dado.

b) Hallar una traslación y una simetría axial de cuyo producto resulte el movimiento dado.

c) Hallar en el movimiento dado la circunferencia homóloga de la que tiene por centro el punto B (3, —1) y de radio 2.

142. Dadas las circunferencias $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$ y $(x-6)^2 + y^2 = 8$, hallar gráficamente, por el método de las simetrías, los segmentos cuyos extremos estén cada uno en una de ellas y, siendo per-

pendicular a $y=x$, tengan su punto medio en esta recta. Obtener la ecuación de la recta sobre la cual se halla uno de estos segmentos.

143. El vector que define una traslación en un plano tiene por proyecciones sobre los ejes coordenados OX y OY respectivamente, -2 y 3. Hallar las coordenadas del transformado de A (5,2), mediante la translación. Hallar también la transformada de la recta

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$$

144. En la simetría axial en el plano respecto al eje $y = x$, hallar:
a) El simétrico del punto P (2,5).
b) La simétrica de $4x - y - 3 = 0$, que pasa por P (2,5).

145 Se multiplica la simetría de eje $x = y$ por la de eje $x = 6$. ¿Qué clase de transformación se obtiene? Calcular los elementos determinantes de esta transformación y el punto homólogo del origen de coordenadas.

146. San los dos cuadrados $OABC$ y $OAMN$: O (0,0); A (a, 0); B (a, a); C (0, a); M (a, —a); N (0, —a). ¿Cuál es la transformación de igualdad que transforma el primer cuadrado en el segundo, con el único punto doble O? Definir dicha transformación por sus elementos fundamentales. Descomponer dicha transformación en el producto de una simetría central de centro O seguida de un giro G, determinando los elementos (centro y amplitud) de G.

147. A, B, C, D, E, F, son los vértices consecutivos de un hexágono regular inscrito en un círculo de centro O de radio r. Se pide
1.° El punto X alrededor del cual ha de girar el segmento PQ≡AB (P≡A,Q≡B) para que P pase a coincidir con O y Q con D.
2.° Calcular en función de r el volumen del cuerpo engendrado por el triángulo XAB al girar 360° alrededor del eje OX.
3.° El área de la corona circular limitada por las circunferencias de radios XA y XB; el perímetro y el área del recinto barrido por el segmento PQ en su giro alrededor de X.

148. Dada la recta r de ecuación $y = mx + n$ $(n \neq 0)$, y el punto A $(0, a)$, hacer aplicación del método de giros en el plano para encontrar un cuadrado $ABCD$ que tenga el vértice B sobre $0x$ y el D sobre la recta dada r. En el caso particular $n = a$, $m = -2$ deberán darse las coordenadas de los otros vértices B, C y D. ¿Cuantas soluciones tiene este problema?

149. En un plano, en el cual se ha definido un sistema rectangular de ejes de referencia, AX, AY, se consideran cuatro simetrías axiales, S_1, S_2, S_3, S_4, cuyos ejes respectivos son las rectas de ecuaciones: (l_1) $y = 0$, (l_2) $y = x$, (l_3) $x = 0$ (l_4) $x = 4$. Se pide:

1.° Demostrar que el producto de esas simetrías es un giro $G = S_4 . S_3 . S_2 . S_1$, del cual se pide el centro O y el ángulo de giro v. (Nota. El orden de las simetrías es $S_1 S_2 S_3 S_4$).
2.° Hallar la ecuación de la figura transformada de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ por el giro G (o, v).

150. A, B, C, D y E son cinco vértices consecutivos de un hexágono regular. Los lados AB, BC, CD y DE son, respectivamente, los ejes de las simetrías axiales S_1, S_2, S_3 y S_4. Estudiar la transformación producto (de derecha a izquierda) $S_4 . S_3 . S_2 . S_1 = T$, clasificándola y definiendo sus elementos fundamentales (en su caso, centro, eje, amplitud,...). En particular, hallar las transformadas de las tangentes en B y D a la circunferencia circunscrita al hexágono y del lado BC.

151. Demostrar que el producto de dos giros de diferentes centros O_1 y O_2, del mismo sentido y ángulos de giros, respectivamente, 45° y 60°, es otro giro. Hallar gráficamente el centro de dicho giro y calcular su ángulo.
(Sugerencia: para multiplicar los giros, descompónganse en simetrías).

152. Se consideran dos giros de distintos centros O_1 y O_2 y del mismo sentido. El primer giro es de 80°. ¿Qué amplitud debe tener el segundo giro para que el producto de ambos sea una simetría?
(Sugerencia: para multiplicar los giros, descompónganse en simetrías).

153. Demostrar que el producto de dos giros de distintos centros, de distinto sentido y ángulos iguales, es una traslación. (Sugerencia: Descompónganse, para multiplicar los giros, en productos de simetría).
Si el ángulo de giro es de 60° y la distancia de los centros de 4 cm., calcular la amplitud de la traslación producto.

154. Demostrar que el producto de dos giros de centros diferentes y de sentido contrario, e igual amplitud, es una traslación ¿Cómo de ser los giros para que la citada traslación tenga por amplitud el doble de la distancia entre los centros de giro?

155. Sea una circunferencia de centro C (0, 2) y radio 3.
1.° Determinar (analítica o gráficamente) el centro del giro igual al producto de dos simetrías axiales que transforman: C (0, 2) en C' (5, 0), y este punto en el C'' (5, —3).
2.° Determinar la circunferencia transformada de la primera en este giro.

156. Hallar las coordenadas del centro C del giro $G_2 = G_1 . T$, siendo T la traslación que lleva el origen de coordenadas al punto A (4, 4), y G_1 el giro de centro A y amplitud 90°. Determinar después las coordenadas del punto B', homólogo de B (2, —2) en el giro G_2.

157. Se consideran dos giros distintos de centros O_1 y O_2 y del mismo sentido. Si el primer giro tiene una amplitud de 50°, ¿qué amplitud debe tener el 2.° giro para que el producto de ambos sea una simetría central? Hallar gráficamnte el centro de dicha simetría.

158. Se tiene un giro C, cuyo centro M_1 es el origen de coordenadas, de amplitud 45°, y otro giro G_2 de centro M_2 (6, 6) y amplitud 90° Calcular las coordenadas del centro M del giro $G=G_2\,G_1$, producto de los anteriores, y la posición del punto A'', homólogo del punto A (6,0), en este nuevo giro.

159. a En la simetría axial en el plano respecto al eje $y = x$, hallar:

a) El simétrico del punto P (2, 5).

b) La simétrica de $4x - y - 3 = 0$, que pasa por P(2,5).

160. c En el giro cuyo centro es el origen y de amplitud de 60°, hallar el homólogo del punto (2,0). Hallar también la ecuación de la recta transformada de la $X-2=0$, mediante el giro dicho.

160 En una translación T el punto $A\,(4, 0)$ tiene por imagen el punto $A'\,(4, 6)$. ¿Qué amplitud ha de tener un giro G de centro $O\,(0, 0)$ para que la transformación producto $T \,.\, G$ sea una simetría central? Hallar en este cso el centro de esta simetría y las coordenadas del punto imagen del A en dicha simetría.

160b Se considera el cuadrado de vértices $A\,(-2, 0)$, $B\,(10, -2)$, $C\,(2, 0)$ y $D\,(0, 2)$ y las simetrías S_1, S_2, S_3 y S_4 cuyos ejes respectivos son: e_1 de ecuación $x = -2$; e_2 es la recta AB; e_3 es la recta BC y e_4 es la recta $x = 2$.
Demostrar que el producto $S_1\,S_2\,S_3\,S_4$ es un movimiento; determinar sus características y las coordenadas de los vértices del cuadrado transformado del $ABCD$ por dicho movimiento. Entendiendo que los factores en el producto de las simetrías, se han de tomar de izquierda a derecha.

160c Se tiene las simetrías S_1, S_2, S_3 y S_4 cuyos ejes son, respectivamente, las rectas de ecuaciones $y = 0$, $x = 0$, $y = 4$, $x = 4$. Hállese la transformación producto $S_1S_2S_3S_4$, en la que los factores se han tomado de izquierda a derecha. Encontrar los elementos dobles de la misma y el transformado en ella del punto A (0, 2).

160d Dado el cuadrado LMNP se llaman Q, R, S, T a los respectivos puntos medios de los lados LM, MN, NP y PL. Se pide:

a) Calcular el ángulo del giro necesario para colocar en posición homotética los cuadrados LMNP y QRST.

b) Determinar el centro del giro que transforma el vector $\overrightarrow{LQ}$ en el $\overrightarrow{RN}$.

c) Determinar el centro, y calcular la razón, de la semejanza que transforma el vector TQ en el vector MN.

160[e] Dos rectas a y b se cortan formando un ángulo de 40°. Tomando las rectas a y b como ejes de abscisa y ordenada, respectivamente, se considera el punto P que, en este sistema, tiene por coordenadas (4 — 3).

Se pide:

a) Si S_a y S_b son las simétricas respecto de a y b, *respectivamente*, calcular las coordenadas del punto P'' transformado del punto P en el movimiento producto de la simetría S_a por la simetría S_b.

b) Calcular el ángulo del giro equivalente al producto de S_a por S_b.

c) Si P' es el simétrico de P respecto de S_a, calcular el volumen del cuerpo de rotacion obtenido al girar el triánguo P P' P'' alrededor de la recta a un ángulo de 360.

160[f] A un triángulo equilátero ABC se le aplica una rotación de centro A y amplitud 90°, en sentido positivo. Se pide:

a) Descomponer dicha rotación producto de dos simetrías, siendo el eje de la primera la altura del triángulo relativa al lado BC.

b) Designando por ε la longitud del lado del triángulo y por B' y C' los puntos respectivamente homólogos de los vértices B y C, en el giro, calcular el área del trapecio BCC'B'.

160[g] Siendo A (1, 0), se hace corresponder a cada punto P del plano el punto P' tal que el triángulo APP' sea equilátero y el ángulo PAP' de sentido contrario al de las agujas del reloj.

1.° ¿Qué transformación geométrica es la así definida?

2.° Suponiendo que P recorre la recta $x = 0$, hallar la ecuación del lugar geométrico de P'

3.° La transformación anterior se puede descomponer en el producto de dos simetrías respecto de dos rectas. Si la primera de éstas es el eje OX, hallar la ecuación de la segunda.

160[h] 1.° Dada la ecuación $z^4 - 1 = 0$, representar gráficamente sus raíces.

2.° A los puntos obtenidos se les aplica el giro de + 45° y de centro el origen: Hallar las coordenadas de los puntos transformados.

3.° A continuación se aplica a estos últimos la traslación definida por el vector $\overline{OA}$, siendo O(O, O) y A($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$). Hallar las coordenadas de los nuevos puntos

160 Se considera un punto A, una circunferencia α, una recta r y un vector $\vec{V}$. Se pide.

a) Construir un triángulo ABC con $B \in \alpha$, $C \in r$ y $\overrightarrow{BC} = \vec{V}$.

b) Buscar el lugar geométrico de los centros de inversión que dejan los tres puntos A, B y C alineados.

VECTORES

161. d En el triángulo plano ABC se tiene: vector AB $= \vec{c}$, vector AC $= \vec{b}$. Obtener las expresiones vectoriales siguientes:
1.° del vector AM (siendo M el punto medio del lado BC);
2.° del vector AG (siendo G el baricentro del triángulo ABC);
3.° del vector BG y del vector CG.

161ª Se tiene tres vectores no coplanarios $\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{OB} = \vec{\beta}$ y $\vec{OC} = \vec{\gamma}$. Designados por M el punto medio del segmento rectilíneo AB y por G el baricentro del triángulo ABC, se pide obtener razonada y sucesivamente:

1.° Expresión de $\vec{OM}$ en función de $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$.

2.° Expresión de $\vec{MC}$ en función de $\vec{OM}$ y de $\vec{\gamma}$, así como la de $\vec{GC}$ en función de $\vec{MC}$.

3.° Expresión de $\vec{OG}$ en función de $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ y $\vec{\gamma}$

161ᵇ De un cuadrado ABCD se conocen los números complejos representativos del vértice, A, que es $1 + 2i$ y de su opuesto C, que es $9 + 6i$.
Se pide:

a) Calcular el número complejo correspondiente al vector libre $\vec{AC}$.
b) Calcular el número complejo correspondiente al vector libre $\vec{AM} = \vec{MB}$ siendo M el centro del cuadrado.
c) Calcular los números complejos correspondientes a los vectores libres $\vec{MB}$ y $\vec{MD}$.
d) Calcular los números complejos cuyos afijos son B y D.

161ᶜ Si A y B son los afijos de los complejos $3 + 2i$ y $4 + 5i$,
1.° Construir gráficamente el punto C tal que $(CAB) = -2/3$.
2.° Hacer el número complejo cuyo afijo es dicho punto C

RAZON DOBLE

162. Dadas las rectas a y b de ecuaciones respectivas:
$2x-3y= 2, x+ 2y =2$. Se consideran las rectas c y d del haz que ambas determinan y de ecuaciones:
$3x-y = 4, 2x-3y-2+u\ (x + 2y-2)= 0$
Hallar:

1.° La razon doble $(abcd)$
2.° Determinar u, para que $(abcd) = -1$, y hallar la recta del del haz correspondiente a este valor de u.

163. Dada la ecuación:

$$x^3 + 7x^2 - 21x - 27 = 0.$$

1.° Hallar sus raíces.
2.° Tomando estas soluciones en orden creciente, como abscisas de los puntos A, B y C de una recta, hallar la abscisa del punto D que forme con aquellos una cuaterna armónica.
3.° Estudio y representación de la función $y = P(x)$, siendo $P(x)$ el primer miembro de la ecuación dada.

164. Dada la ecuación

$$x^3 + 7x^3 - 21x - 27 = 0$$

1.° Encontrar sus raíces.
2.° Tomando estas soluciones en orden creciente, como abscisas de los puntos A, B, C, de una recta, encontrar la abscisa de otro punto, D, que forme la cuaterna armónica (ABCD)=—1.
3.° Calcular el área comprendida entre la curva

$$y=x^3 + 7x^2 - 21x - 27,$$

y la cuerda AB.

165. En un eje se tienen los puntos A (—3) B (3), C (x) y D (y).
Ecuación que relaciona x e y, siendo (ABCD) $= -1$
Siendo $x = 0$, calcular y. Siendo $x = \infty$, calcular y.

166. En un eje se tienen los puntos O, U, M cuyas abscisas respectivas son 0.1 y x.
Calcular la abscisa y del punto N conjugado armónico del M respecto de O y U.
Encontrar valores de y correspondientes a los valores

$$x=O, \frac{1}{2}, 1 \text{ e } \infty$$

167. Desde un punto P exterior a una circunferencia de centro O y radio r, se trazan la tangente PT y la perpendicular TH al diámetro AB que pasa por P. Se pide:
a) Demostrar que ABHP es una cuaterna armónica.
b) Siendo PA'B' una secante cualquiera trazada por P, demostrar que las bisectrices de los ángulos HA'B' pasan por un punto fijo, cualquiera que sea la secante, y que la recta AB es bisectriz exterior del ángulo A'HB'

167° En un eje de abscisas, se tienen los siguientes puntos con sus abscisas correspondientes: A(3), B(— 1), M(x). Encontrar:
1.° La expresión de la razón simple (ABM) en función de x.
2.° Siendo otro punto N(y) y (ABM) = — (ABN) encontrar la ecuación que relaciona x e y.

3.° Encontrar las abscisas comunes de M y N, cuando estos sean coincidentes.

HOMOTECIA

+168. En la homotecia plana cuyo centro es el origen O de coordenadas y los puntos A(0,2) y A'(0,4) homólogos hallar:

a) El homólogo de P (3,0) y la recta homóloga de $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

b) La ecuación de la circunferencia homóloga de la de centro (1,1) y radio 5.

169. Un cono de revolución tiene de altura 16 cm. y de diámetro básico 24 cm.

1.° Por el vértice, V, del cono, y por la circunferencia de su base, pasa una superficie esférica, S; y si se transforma por una homotecia directa, de razón 2, y centro V, en otra superficie, S', calcalcular la distancia de V al punto de intersección de S' con el eje del cono.

2.° Calcular el área y el ángulo del sector que es desarrollo de la superficie lateral de ese cono.

3.° Si un plano paralelo a la base divide a la superficie lateral en dos partes de igual área, hallar la distancia de ese plano al vértice.

170. Se tiene un tetraedro regular ABCD.

a) Demostrar que existe una homotecia que transforma sus vértices en los centros de las caras opuestas.

b) Deducir el centro de homotecia y la razón de homotecia.

+ 171. La base menor AB de un trapecio rectángulo ABCD mide 7 cm.; la mayor DC, 10 cm., y la altura AD, 4 cm. En la semirrecta AD, se toma un punto O, distante de D 5 cm. Se pide:

a) Construir la figura F' homotética del trapecio dado F, siendo O el centro y la razon de homotecia igual a $-\frac{2}{3}$.

b) Colocar F y F' en posición homotética directa y con un par de lados parcialmente superpuestos, mediante un producto de operaciones.

c) Calcular la medida de los cuatro lados del nuevo cuadrilátero, así como del segmento que une los puntos medios de las bases.

172. De un trapecio rectángulo de 4 dm. de altura se conoce la base

mayor B = 10 dm. y la paralela media p = 35 cm.

Se pide:

a) El área del trapecio semejante al dado, cuyo perímetro mide 52 cm.

b) Dibujado este trapecio, determinar el punto conjugado armónico de O (punto de intersección de las diagonales) respecto a los extremos de la diagonal mayor.

c) Construye la figura homotética del referido trapecio respecto al punto O como centro de homotecia y razón ½.

173. Se tiene las esferas cuyos radios son r = 9 cm. y r' = 5 cm. Encontrar la distancia de los centros de homotecia de ambas esferas, siendo 20 cm., la distancia de los centros de aquellas.

b) Si C y C′ son los centros de las esferas y H y H′ los centros de homotecia, calcular el valor de la razón doble (C C′ H H′).

174. Se considera la homotecia directa H, cuyo centro es el origen y la razón de homotecia $\frac{3}{2}$. A' es el transformado del A (0, 2). Por otra homotecia directa H_1 el punto A' se transforma en el A'' (4, 1), la correspondiente razón es k_1.

Hallar el centro de ésta, H_1, si:

a) $k_1 = \frac{2}{3}$; b) $k_1 = \frac{1}{3}$

En ambos casos, determinar la transformación producto $H_1.H$.

175. Construir un triángulo ABC, supuestas conocidas las tres medianas. Construir el triángulo $A'B'C'$, homotético del ABC en la homotecia de centro el baricentro de ABC y de razón $-\frac{1}{2}$. Construir la figura homotética de $A'B'C'$ en la homotecia de centro A y razón 2.

176. Las hipotenusas de dos triángulos rectángulos semejantes están sobre dos rectas, m y m', que se cortan en un punto, P, y forman un ángulo de 30°. Los vértices B y C del primero distan de P, PB = 1, PC = 6, y los B′ y C′ del segundo, homólogos de B y C, del PB′ = 2 y PC′=4,5. Los catetos del primer triángulo miden b=4 y c=3. Sabiendo que la semejanza entre los dos triángulos es directa, se pide:

a) Hallar el centro o punto doble de la semejanza.

b) Dibujado el primer triángulo A B C, hallar A′ homólogo del vértice A del ángulo recto del primero, utilizando el giro y la homotecia, de cuyo producto resulta la semejanza.

177. Por homotecia, resolver el problema siguiente: Dada una circunferencia de centro O y los radios OA y OB que no están en prolongación, trazar una cuerda MN (de aquella circunferencia) que sea dividida por OA y OB en tres segmentos iguales:

$$MA'=A'B'=B'N.$$

178. Sea un tetraedro regular de arista a. Consideremos los baricentros de sus caras como vértices de un nuevo tetraedro. Se pide:

1.° Demostrar que los dos tetraedros son homotéticos. Hallar el centro y la razón de homotecia.

2.° Hallar el volumen del segundo tetraedro en función de a.

179. Los puntos A (0, $2a$) y B (0, a) se transforman por una semejanza, en los A' (0, 0) y B' (a, 0). Hallar las coordenadas del centro de semejanza, y especificar un giro (del cual se determinará su centro y su amplitud) y una homotecia (de la cual se determinará su centro y su razón) cuyo producto sea la semejanza anterior.

180. Se da la circunferencia C de ecuación

$$x^2+y^2-5x=0.$$

La homotecia directa de razón $k=\frac{5}{6}$ y centro el orgien 0, la transforma en otra C_1. La homotecia inversa del mismo centro 0 y razón $-k$ la transforma en otra C_2. Hallar los centros de homotecia inversa que transforma C en C_1 y de la homotecia directa que transforma C en C_2.

181. Designemos por (F) la familia de circunferencias de un plano que son vistas desde un punto fijo P de este plano bajo un ángulo constante α.

Llamemos C a una de esas circunferencias, A y B, a los extremos del diámetro de C que pasa por P, y Q al conjugado armónico de P respecto de A y B.

Dados P y Q y α, se pide:

a) Construir la circunferencia C de centro O.

b) Probar que O y Q son puntos homólogos en una homotecia de centro P y razón $1/\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

182. Considérese un triángulo escaleno. Tracémosle la circunferencia circunscrita al mismo y la circunferencia que pasa por los pies de las medianas.

a) Demostrar que dichas circunferencias son hemotéticas.

b) Hallar el centro y la razón de homotecia. Determinar la posición de las circunferencias anteriores respecto al centro de homotecia.

183. A la circunferencia k, de ecuación $x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$, se le da un giro G de 60° alrededor del origen de coordenadas, transformándose así en la circunferencia k'. A ésta se aplica una homotecia H, de razón 2, cuyo centro está en el centro de la primera circunferencia, transformándose k' en la circunferencia K''. Obtener la ecuación de esta última circunferencia y las coordenadas del centro de homotecia negativa de las circunferencias K' y K''.

184. Dadas las circunferencias: $x^2 + y^2 = 0{,}49$ y $x^2 + y^2 - 2x + 0{,}96 = 0$, hallar:

a) Las coordenadas de los centros de homotecia directa e inversa.

b) Sin tablas, calcular la longitud de la correa de transmisión que enlaza las dos ruedas representadas por dichas circunferencias, cuyos radios supondremos expresados en metros.

185. Dadas las circunferencias $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$; $x^2 + y^2 = 9$, se pide:

a) Calcular las coordenadas de sus centros de homotecia y la distancia d entre ambos puntos.

b) Area de superficie esférica que tiene como secciones producidas por dos planos paralelos, que distan entre sí dos unidades, dos circunferencias iguales a las dadas.

186. Dadas dos circunferencias secantes, trazar por uno de los puntos P de intersección una recta tal, que la longitud de una de las cuerdas sea $\dfrac{1}{3}$ de la otra.

187. Sea la circunferencia de centro el punto C (4, 0) y que pasa por el origen de coordenadas O. Dos cuerdas variables, OA y OB, perpendiculares entre sí, se toman como diámetros de sendas circunferencias, que se cortan en O y en otro punto P. Probar que el punto P pertenece a la recta AB, y determinar el lugar geométrico de P.
Construir la figura homotética del lugar geométrico hallado, en la homotecia que tiene por centro el punto O y por razón -2.

188. Contestar a las siguientes partes:

1.° Sabiendo que la ecuación:

$$x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0,$$

tiene una solución real triple y dos imaginarias puras encontrar sus soluciones.

2.° Dibujando en el plano cartesiano los puntos A, B, C, correspondientes a tres raíces distintas, calcular las coordenadas de los vértices del triángulo homotético del anterior respecto del origen de coordenadas, cuyo lado mayor mide 6.

3.° Calcular también el perímetro y el área de este último triángulo.

188ª Sean las rectas r_1, r_2 y r_3, cuyas ecuaciones respectivas son:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$$y = \sqrt{3x}$$
$$y + x = 8$$

y los dos ejes de coordenadas. Se pide:

1.º Construir gráficamente un cuadrado con un lado en el eje x y con vértices sobre las rectas r_1 y r_3.

2.º La recta r_3 corta al eje x, a r_1 y r_2 en los puntos M, A y B respectivamente. Hallar la razón simple (MAB)

188ᵇ Se considera el círculo cuyo centro es el origen de coordenadas y de radio 1, así como los puntos *A* (—1, 0) y *C* (2, 0). Siendo *MM'* un diámetro variable de esa circunferencia y *P* el punto de intersección de las rectas *AM'* y *CM*, se pide:

1.º Obtener la razón *CP* : *CM*, y

2.º Hallar el lugar geométrico de los puntos *P* al variar el diámetro *MM'*.

188ᶜ Dado un triángulo ABC, cuyo baricentro es G, y la homotecia de centro G y la razón —½, se pide:

a) Hallar el transformado del triángulo ABC en la homotecia dada.

b) Hallar las rectas homoteticas de las alturas del triángulo ABC (consideradas como rectas).

c) Como consecuencia, demostrar que el baricentro, el ortocentro y el circucentro de un triángulo están en la misma recta.

188ᵈ Dada la circunferencia de ecuación:

$$x^2 + y^2 - 6x = 0.$$

se pide:

a) Ecuación de la figura homotética en una homotecia cuyo centro es el origen de coordenadas y razón — 5/3.

b) Coordenadas del centro de la homotecia de razón negativa que transforma la circunferencia anterior en la dada.

188ᵉ Se da una circunferencia C de centro O, tangente en B a una recta *r*. Un punto A de esa circunferencia es centro de una homotecia cuya razón es 1/2.

a) En esa homotecia, determínese la figura C' homotética de la dada, y unidos los puntos B' y O', homólogos de los B y O, esta recta corta además a C' en M, y en N a la recta *r*. Demostrar que el cuadrilátero AMNB es inscriptible en una circunferencia.

b) Si el radio de la circunferencia dada es 7,5 cm., y la distancia $\overline{AB}$ = 12 cm., determinar la medida del segmento $\overline{BN}$.

188^f Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4x$, obtener:
1.° La ecuación de la circunferencia homotética de la anterior en la homotecia de centro el origen de coordenadas y razón 1/2.
2.° El área comprendida entre ambas.

188^g Se da un triángulo equilátero de lado $l = 10$ cm. A partir de sus vértices y en un mismo sentido se acortan estos lados en una longitud x, uniendo los nuevos vértices obtenidos.
a) Hallar el valor que debe tener x, para que el área del nuevo triángulo obtenido sea los 3/4 del primitivo.
b) Tomando como centro el baricentro del triángulo dado, determinar la tangente trigonométrica del ángulo de giro preciso para colocar el nuevo triángulo en posición de homotético respecto al dado.

188^h Sean A′, B′, C′, los puntos medios de los lados a, b, c, del triángulo ABC. Sea P un punto genérico de su circunferencia inscrita. Hallados los simétricos de P respecto de A′, B′, C′, se obtienen P′, P″ P‴ respectivamente.
a) Transformar el triángulo P′P″P‴ en el triángulo ABC, mediante una homotecia, cuyo centro y razón se determinarán, así como la transformada en ella del lugar descrito por P.
b) Siendo el círculo de centro O, inscrito en el triángulo dado ABC, la base de un cono de revolución de 176 dm^3, hallar el volumen del cono cuyo vértice es O, y cuya base es el paralelo medio del cono dado.

188^i En una homotecia que tiene por centro el origen de coordenadas, el homólogo del punto A (2, 1) está en la recta $x + 3y = 15$. Hallar las coordenadas del punto B′ homólogo del B (3 — 1) y cacular la razón de la homotecia.

INVERSION

189. Dos circunferencias tangentes exteriormente, son inversas respecto del origen de coordenadas como centro de inversión. La mayor tiene por ecuación:

$$x^2 + y^2 - 26x + 144 = 0.$$

Calcular: *a)* la potencia de inversión.
b) Radio y centro de la circunferencia menor.
c) ¿Cuál es la figura inversa de la recta perpendicular al eje X, trazada por el punto inverso del centro de la circunferencia dada?
d) Coordenadas de los puntos dobles situados en dicha recta.

190. En una inversión en el plano, de centro el origen de coordenadas y potencia $K = 9$, se da la circunferencia de centro C (2, 0) y radio 1. Hallar:

1.° La ecuación de la figura inversa de dicha circunferencia.
2.° Se traza por el origen de coordenadas una tangente a la circunferencia dada. Hallar las coordenadas del punto P de contacto y las de su inverso P', así como las coordenadas del punto C', inverso del centro C de la circunferencia dada.

191. El centro de una inversión ϕ es el origen de coordenadas, y dos puntos homólogos son $A(2, 0)$ y A_0 $(4, 0)$. Una homotecia ω está definida por su centro S $(10, 0)$ v la razón $r = 2$.
1.° Encontrar la transformada de la recta $x = 2$, al aplicarle la transformación producto $\phi\ \omega$.
2.° Si c es la circunferencia correspondiente a la recta $x = 2$ en la inversión ϕ y c' la circunferencia homóloga de la c en la homotecia ω, encontrar las coordenadas de los puntos de contacto de la tangente común trazada desde S a las dos circunferencias.
3.° Calcular el volumen del cono de vértice S, de superficie circunscrita a la esfera, cuya circunferencia es c, y limitado por la circunferencia de contacto.

192. Se tienen dos circunferencias tangentes en un punto A y otras dos circunferencias que pasan por A y son ortogonales cada una de ellas a aquéllas.
a) ¿Dónde están los centros de estas otras circunferencias?
b) ¿Qué figura forman las transformadas de las cuatro circunferencias en una inversión de polo A?

193. Dada la circunferencia de ecuaciones: $x^2 + y^2 - 2x = 0$; $(x - 3)^2 + y^2 = 5$.
a) Hallar las coordenadas de sus centros de semejanza directa e inversa.
b) Hallar los centros y las potencias de las inversiones que transforman una en otra las circunferencias.

194 En una circunferencia de radio r, consideramos inscrito un triángulo equilátero. En la inversión α, cuyo centro es el del polígono, y de potencia r^2, hallar:
a) El ángulo que forman los elementos transformados por α, del contorno de uno de los segmentos circulares que el triángulo y la circunferencia determinan.
b) El área de la figura en que α transforma a uno de los segmentos a que se refiere la primera parte.

195. Sean O y O' los centros de dos circunferencias C y C' situadas en un plano. $R = 4$ cm. y $R' = 2$ cm., los radios de estas circunferencias. $OO' = 9$ cm. la distancia de los centros.
Determinar numéricamente las posiciones de los centros de las inversiones que transforman C en C' y las potencias de estas inversiones.

196. Las raíces de la ecuación

$$x^3 - 8 = x^2 + x - 6$$

corresponden a los afijos de los vértices de un triángulo.

a) Hallar la figura inversa de ésta en una inversión de centro O (0, 0) y potencia 2.

b) Hallar el área del triángulo rectilíneo cuyos vértices son los del triángulo transformado.

197. Los puntos A y B, vértices contiguos de un trapecio, cuya altura AB es igual a 8 cm. y cuyas bases AD y BC miden 6 cm. y 4 cm. respectivamente, son centros de dos circunferencias de 3 cm. y 2 cm. de rad.o.

Se pide:

a) Hallar utilizando lugares geométricos, la circunferencia que pasando por D y C corte ortogonalmente a las dos circunferencias dadas.

b) Determinar la figura inversa de esa circunferencia hallada, siendo C el centro de inversión y $\overline{CT}^2$ la potencia. $\overline{CT}$ es la tangente trazada desde C a la circunferencia dada de centro A).

198. Se considera una inversión de centro O (0, 0) y potencia 4, las rectas r y s de ecuaciones $x = 1$ y $x = 4$ y las circunferencias Cn, tangentes simultáneamente a r y s, cuyos centros son los puntos Cn (5/2, [n — 1] 3) en donde n es natural.

Se pide:

a) Las ecuaciones de las inversas de r, s y C.

b) Establecer que el inverso del punto de contacto de Cn y Cn + 1 cualquiera que sea n, están en una circunferencia que es ortogonal a las inversas de las circunferencias Cn.

199. El vértice B del triángulo ABC, rectángulo en A, cuyos lados miden: AB = 3, AC = 5; se toma como centro de una inversión de potentencia 15.

Hallar la distancia entre los puntos A′ y C′ inversos respectivamente, de los A y C.

Dibujar la región del plano en que se transforma el triángulo mediante la inversión.

200. Explicar cómo se construyen mediante el método de inversión las circunferencias que pasando por un punto P son tangentes a una recta r y a una circunferencia γ exterior a r.

201. 1. Sea la circunferencia (*C*) de ecuación:

$$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$$

1.° Hallar la potencia de la inversión, de centro el origen de coordenadas, que transforma la circunferencia (*C*) en sí misma.

2.° Hallar el lugar geométrico de los puntos dobles de la inversión; si *A* y *B* son los puntos de dicho lugar situados sobre (*C*), ¿cuánto mide el ángulo $\widehat{AOB}$?

3.° Ecuación de la línea transformada por la inversión de la recta AB y coordenadas del punto inverso del centro de la (C).

202. En una inversión de centro el origen de coordenadas, la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$ es de puntos dobles. Hallar:

1.° La ecuación de la figura inversa de la recta $y = 6$.

2.° El homólogo del punto (0, 1) en la involución subordinada por la inversión sobre la recta $x = 0$.

3.° El segmento áureo del determinado por el punto (3, 0) y su conjugado armónico con relación a los puntos (6, 0) y (6, 0).

203. Dadas las circunferencias c_1 y c_2, de ecuaciones respectivas

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 - 10x + 24 = 0,$$

hallar:

1.° Los centros O_1 y O_2 y las potencias K_1 y K_2 de las inversiones que transformen una circunferencia en otra.

2.° Demostrar que O_1 y O_2 son puntos homólogos en la involución definida sobre la recta que une los centros C_1 y C_2 de las circunferencias c_1 y c_2, y en la que C_1 y C_2 son los puntos dobles.

3.° Probar que la circunferencia de diámetro $O_1 O_2$ pertenece al haz determinado por c_1 y c_2. Hallar el eje radical de dicho haz.

204. En un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, el origen de coordenadas es el centro de una inversión, en la que son homólogos los puntos A (2, 0) y A' (3, 0). Se pide:

a) Hallar la circunferencia de puntos dobles y la constante de inversión.

b) Dibujar la figura inversa del triángulo MNP, cuyos vértices son M (2, 2), N (—1, —1) y P (2, —1).

205. Dado un triángulo rectángulo O A B, cuyos catetos miden

$$OA = 2\sqrt{3}\text{ dm.} \quad AB = 2\text{ dm.},$$

se construye la figura inversa AB' del segmento AB respecto al punto O como centro de inversión y potencia igual a 12. Se pide:

a) La longitud del arco de curva AB'.

b) Las longitudes de los segmentos de recta AB' y B'B.

c) El volumen del cuerpo engendrado por el triángulo mixtilíneo OAB' (OA y OB' rectas, AB' arco de curva) al girar alrededor de OA una vuelta completa.

206. Dadas las circunferencias

$$x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0, \quad x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0,$$

hallar las coordenadas del centro de inversión positiva que transforma una circunferencia en la otra, y el valor de la potencia de esta inversión.

207. En una inversión con centro en el origen de coordenadas, son homólogos los puntos A (1, 2) y A' (2, 4). Se desea obtener:

1.° La potencia de la inversión y la ecuación de la circunferencia de puntos dobles.

2.° Los puntos bases del haz de circunferencias inversas de las rectas del haz con vértice en el punto (0, 5).

3.° La ecuación de este haz de circunferencias.

208. Dada una inversión de centro 0 (0,0) potencia $k = 36$, se pide:

a) La ecuación de la circunferencia de puntos dobles (principal) y la figura transformada de la recta $x=9$.

b) El área del huso esférico de un radián de amplitud, correspondiente a la superficie esférica que engendra al girar sobre el eje $0x$ la circunferencia principal. (Unidad: el centímetro.)

c) La longitud del segmento de una de las tangentes trazadas a dicha circunferencia principal desde el punto A (9,0), comprendido entre A y el punto de tangencia y el volumen del cono de revolución que tiene este segmento como generatriz y por eje el de abscisas.

209. Tomando como centro de inversión el origen de coordenadas y potencia $p = 63$, hallar: 1.° La ecuación de la circunferencia inversa de la $x^2+y^2-10x+21=0$.
Coordenadas del punto inverso de cada uno de los centros de dichas circunferencias.
Volumen del tronco de cono resultante al girar alrededor del eje X la figura limitada por las circunferencias engendradas por los puntos de contacto de las tangentes comunes exteriores.

210. Se da un círculo de centro O, de radio R, un punto fijo A, situado a una distancia del centro AO $= d$, ($d <$ R), y se pide:

a) Construir el círculo inverso de la tangente MT en un punto M del círculo, tomando el punto A como polo, y como potencia de inversión la potencia del punto A con respecto al círculo O. Lugar del centro del círculo inverso cuando el punto M describe el círculo O.

b) Una secante cualquiera que pase por A, corta al círculo en dos puntos B y C; encontrar el lugar del segundo punto de encuentro, N, de los dos círculos que pasan por A y son tangentes al círculo O, uno en B y otro en C, cuando la secante gira alrededor de A.

c) Si O_1 y O_2 son los centros de los dos círculos definidos en el apartado *b)*, demostrar que la figura $AO_1 OO_2$ es un paralelogramo y que la suma de los radios x e y, de los dos círculos, es igual a R.

211. Se considera un cuadrado de lado 3 cm. Construir gráficamente la figura transformada de dicho cuadrado en una inversión positiva que tenga por centro uno de los vértices y por potencia 9. Rayar la parte del plano en que se transforma por la citada inversión la superficie del cuadrado.

212. Las circunferencias h y k de ecuaciones $x^2 + y^2 + 9x - 36 = 0$ y $x^2 + y^2 - 16x - 36 = 0$, pueden transformarse, por medio de una inversión, en dos rectas h' y k'. — Obtener las coordenadas de los posibles centros de inversión y, eligiendo el de la ordenada mayor y tomando por potencia de la inversión el número 144, obtener las ecuaciones de las rectas h' y k' y calcular el ángulo que forman las circunferencias h y k.

213. Se tiene la circunferencia: $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ y la recta $x + y = 2a$. Se efectúa la inversión de centro en el origen, deja invariable el punto A (a, a). Razonar cuál es la figura transformada por la inversión del menor de los segmentos circulares determinados por la circunferencia y la recta dadas; hallar el área de esta transformada.

214. Construir un triángulo ABC, rectángulo en A, del que se conoce la hipotenusa a y la suma de los catetos. Dibujar la figura inversa de dicho triángulo, en la inversión que tiene por centro A y por potencia $-a^2$.

215. Sea un triángulo A B C rectángulo en A. Una perpendicular a BC encuentra a la recta AB en D y a la recta AC en E.
a) Hallar el lugar geométrico del punto de intersección de CD y BE.
Construir las figuras inversas del lugar geométrico hallado respecto de las inversiones de polo A y potencias $\overline{AB}^2$ y $\overline{AC}^2$.

215 Tomando como centro de inversión el origen de coordenadas, son inversas una de otra las circunferencias de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 24x + 108 = 0$$

1.° ¿Cuál es la potencia de esta inversión y cuáles las coordenadas del inverso del centro de cada una de ellas?
2.° Determinar los centros y las razones de las homotecias que transforman una en la otra.
3.° Ecuación de la figura inversa de la recta $x = 6$.

215ᵇ En una inversión cuyo polo es el origen de coordenadas, la circunferencia de centro $(-2, 0)$ y radio 2 es inversa de la recta $x + 3 = 0$. Determinar:
1.° La circunferencia de puntos dobles.
2.° La figura transformada del polígono regular inscrito en ella, cuyo lado es la cuerda que en la primera circunferencia determina la recta dada.
3.° El área de dicha figura transformada.

215ᶜ Por uno de los puntos A de intersección de dos circunferencias O y O' trazar una recta secante MN tal que el producto de los segmentos AM y AN que las circunferencias determinan sobre ella, tenga un valor dado K. Discusión del problema.

215[d] Hallar las coordenadas de los polos de las dos inversiones que transforman las circunferencias:

$$c_1: \quad x^2 + y^2 + 9x - 36 = 0$$
$$c_2: \quad x^2 + y^2 - 16x - 36 = 0$$

en dos rectas r_1 y r_2 respectivamente. Eligiendo de entre los dos el de mayor ordenada y como potencia 144, hallar las ecuaciones de r_1 y r_2 y como aplicación el ángulo de las dos circunferencias dadas.

215[e] Determinar el polo y la potencia de la inversión que transforma la recta $x = 0$ en la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

y hallar en esta inversión la figura C inversa de la bisectriz del primer cuadrante.
Calcular el área del menor de los recintos limitados por C y el eje OY.

215[f] Dibujar la figura inversa del segmento rectilíneo AB, siendo $A(2, 1)$ y $B(2, 3)$, en la inversión del centro el origen de coordenadas y de potencia $p = 6$, expresando las características de dicha figura. Hallar las coordenadas del punto doble del segmento dado.

215[g] Se considera el triángulo determinado por los afijos de la ecuación

$$x^3 - 1 = 0.$$

Hallar la figura inversa, siendo $O(0, 0)$ el centro de la inversión y la potencia -1. Area limitada por el contorno de la figura transformada en la inversión y que contiene a O.

215[h] Si designamos C_1 y C_2 a dos circunferencias secantes en los puntos A y B, y por C una circunferencia ortogonal a C_1 y C_2, toda inversión de centro A y potencia arbitraria k transforma la circunferencia C en una circunferencia C′ y el punto B en otro punto B′. Demostrar que B′ es el centro de C′ cualquiera que sea la potencia k.

215[i] Los puntos $A(1, 2)$ y $A'(2, 4)$ son homólogos en una inversión de polo $O(0, 0)$:

1.° Hallar la potencia de la inversión y la ecuación de la circunferencia de puntos dobles.

2.° Demostrar que las circunferencias inversas de todas las rectas que pasan por el punto $P(0, 5)$ pasan por dos puntos fijos, y hallar éstos.

215 *a*) Construir la figura inversa del contorno de un triángulo equilátero, tomando como polo el centro de éste y siendo homólogos un vértice y el punto medio del lado opuesto.

b) Calcular el área del recinto limitado por la figura inversa obtenida.

215[k] Se tiene la ecuación $z^3 + i = 0$.
1.° Comprobar que i es raíz de dicha ecuación
2.° Separar dicha raíz y resolver la ecuación de segundo grado que resulta, de coeficientes complejos.
3.° Representar gráficamente las tres raíces obtenidas, y aplicar la inversión cuyo polo es el origen de coordenadas y cuya potencia es -1, al triángulo determinado por esas raíces.

215[l] Dadas dos circunferencias de centros O_1 y O_2, determinar:
1.° El centro P y la potencia de la inversión que transforma cada circunferencia dada en sí misma.
2.° Trazar una circunferencia que sea tangente a las dadas y pase por el punto P hallado.

215[m] Dadas las circunferencias C_1 y C_2 cuyas ecuaciones son,

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4 \quad y \quad (x - 4)^2 + y^2 = 16,$$

respectivamente se considera una inversión cuyo polo es el origen de coordenadas, y la circunferencia de puntos dobles tiene de radio la cuerda común de las circunferenias C_1 y C_2.
Determinar analítica y gráficamente:
1.° Las figuras inversas de C_1 y C_2.
2.° El ángulo α bajo el cual se cortan dichas circunferencias.
3.° La figura inversa de la parte común a C_1 y C_2

215[n] Dadas las circunferencias secantes, de centros O y O′ se traza por uno de sus puntos de intersección P, una recta que las vuelve a cortar en los puntos distintos A y A′, respectivamente. Se pide:
a) Trazar por P otra recta que corte a las circunferencias en otros dos puntos distintos, M y M′, respectivamente, que sean concíclicos con A y A′.
b) Si los radios de las dos circunferencias miden 3 cm. y 5 cm. respectivamente, y si la distancia entre los centros es de 7 cm., calcular la medida del segmento cuyos extremos son P y el punto medio de OO′.

215[o] Se designa:
Por *P* la condición de que una circunferencia pase por un punto dado; por *r* la condición de que una circunferencia sea tangente a una recta dada; por *C* la condición de que la circunferencia sea tangente a una circunferencia dada. Tres de las condiciones anteriores determinan, en general, un número finito de circunferencias.
Se pide:
a) Expresar por símbolos tales como *PPP*, *Prr*, *r CC*......, todos los casos posibles de determinación de circunferencias mediante las condiciones dadas y calcular el número de casos posibles.
b) Resolver el caso representado simbólicamente por PrC.

215[p] Dado el triángulo equilátero ABC, de lado igual a 2, se construyen: el arco circular BC de centro A y el arco circular AC de centro B. Se traza la semicircunferencia de diámetro AB situado en el semiplano que contiene a C. Los arcos BC y AC juntamente con la semicircunferencia forman un triángulo curvilíneo. Se pide:

a) Trazar la circunferencia tangente a los tres lados del triángulo curvilíneo (empléese el método de inversión).

b) Calcular el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo curvilíneo.

215[q] Dada la circunferencia

$$C: \; x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$$

y la recta

$$r: \; x - 2y + 2 = 0$$

a) Hallar la ecuación de la circunferencia C′ que pasa por el origen de coordenadas y por los puntos de intersección de C y r.

b) Hallar el centro de inversión de potencia positiva que transforma C en C′, y el valor de esta potencia.

215[r] *a*) La recta *r* pasa por los puntos A(4, 0) y B(0, 3). Una inversión con centro en el origen de coordenadas O transforma esa recta en una circunferencia que pasa por B y que corta al eje de las *x* en el punto C. Hallar la potencia de la inversión y las coordenadas de C.

b) A la circunferencia obtenida anteriormente se le aplica una homotecia de centro A que transforma C en O. Hallar la pendiente de la tangente en dicho punto O a la circunferencia transformada.

215[s] Dada la recta *r* de ecuación y = 4, sea *C* la figura inversa de *r* en la inversión de polo el origen de coordenadas y potencia 16 y *r′* la homóloga de *r* en la traslación definida por el vector de componentes (0, —1). Calcular el área comprendida entre *C* y *r′*.

215[t] Los puntos *A* y *B*, de coordenadas (0, 5) y (0, 12), respectivamente, son inversos en una inversión de polo el origen de coordenadas. Obtener el centro y el radio de la circunferencia inversa de aquella otra cuya ecuación es

$$\left(x - \frac{11}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

215[u] Por el origen de coordenadas de un sistema cartesiano rectangular pasan circunferencias que contienen a los puntos P (d, 2), Q (d, —2).

1.° Determinar sobre la figura inversa de una de esas circunferencias, lo correspondiente a *d* = 1, en una inversión de centro O y de potencia 30, los puntos, si existen, desde los cuales se vea dicha curva bajo un ángulo de 60°.

2.° Siendo *d* = 1 el radio del círculo inscrito en un triángulo rectángulo de ángulo $B = 60°$, y determinados los simétricos I_a, I_b e I_c del incentro I respecto de la hipotenusa a y los catetos b y c, hallar los valores de los lados de aquel triángulo rectángulo, el de los segmentos I_a, I_b e I_a, I_c así como los ángulos del triángulo I_a, I_b, I_c.

215' Se tienen dos circunferencias de centros A y B tangentes en un punto O y una tercera circunferencia de centro C, exterior a aquéllas.

Al conjunto de esas tres circunferencias se aplica la inversión de polo O y potencia p (igual a la potencia de O respecto de la circunferencia C).

Se pide:

1.° Figuras inversas de la circunferencia C y de las A y B.

2.° Construcción de las circunferencias tangentes a las figuras inversas obtenidas: discusion.

AREAS Y VOLUMENES DE POLIEDROS

216. Dado un tetraedro regular de arista a, calcular el volumen del tetraedro que resulta al trazar por cada uno de los vértices del tetraedro dado el plano paralelo a la cara opuesta.

217. Las tres aristas de un ortoedro que concurren en un vértice están en progresión aritmética y suman 78 metros. El volumen del ortoedro es 16.640 m^3. Hallar:

1.° Las longitudes de dichas aristas.

2.° El área del triángulo que tiene por lados segmentos iguales a las aristas del ortoedro.

218. Una pirámide cuadrangular regular, su arista básica mide 10 cm., siendo el valor del diedro formado por dos caras laterales contiguas de 120°. Calcular el volumen de la pirámide.

219. Sabiendo que la suma de las longitudes de todas las aristas de un icosaedro regular vale 450 cm., calcular:

1.° El área del icosaedro.

2.° La arista del tetraedro regular que tiene igual área que el icosaedro dado.

3.° El volumen de la esfera circunscrita a dicho tetraedro regular.

220. Resolver las siguientes cuestiones:

a) Calcular el radio de la esfera tangente a las aristas de un tetraedro regular, sabiendo que la longitud de una de dichas aristas es 12 centímetros.

b) Calcular el volumen del tetraedro que resulta al trazar por cada uno de los vértices de un tetraedro regular el plano paralelo a la cara opuesta.

221. Dado un ortoedro cuyas dimensiones son tres números naturales en progresión aritmética de diferencia 2, determinar su volumen, sabiendo que su área total mide 142 m^2.
Describir el cuerpo que se obtiene al unir los centros de sus caras, y calcular su volumen.

222. En un octaedro regular de arista 1 m. se inscribe el poliedro cuyos vértices son los centros de las caras del octaedro. En el poliedro resultante se inscribe otro en igual forma, y así se continúa indefinidamente.
Hallar la suma de los volúmenes de los infinitos poliedros obtenidos de este modo.

223. Un prisma cuadrangular regular cuya arista básica mide 3 m. y su altura 5 m., es cortado por un plano que pasa por una arista de la base superior y forma un ángulo de 60° con ella. Se pide:
a) Hallar el área de la sección producida por el plano.
b) El volumen del tronco de prisma resultante.

224. Se tiene el tetraedro regular ABCD de arista igual a 1 dm. Siendo M el punto medio de la arista AB, y N el punto medio de la CD, se pide encontrar:
a) Lados del triángulo ABN.
b) Medida de MN.
c) Probar que los tres segmentos determinados por los pares de puntos medios de las aristas opuestas pasan por un punto.

225. Se tiene un rectángulo de dimensiones a y b, por sus vértices A, B y C se trazan perpendiculares al plano del rectángulo y en ellas se toman segmentos
$$A A' = 5a, \quad B B' = 3b, \quad C C' = 3a + b$$
El plano A′ B′ C′ corta a la perpendicular en D en el punto D′.
Calcular:
1.° Naturaleza del cuadrilátero A B C D.
2.° Longitud de D D′.
3.° Area lateral del tronco de prisma A B C D A′ B′ C′ D′.
4.° Volumen del tronco de prisma.

226. Un tronco de prisma recto tiene como base el rectángulo ABCD tal que AB = 12, AD = 8 cm.
Tres de las aristas laterales de ese tronco son:
$$AA' = 2 \text{ dm.}, \quad BB' = 23 \text{ cm.} \quad y \quad CC' = 25 \text{ cm.}$$
Calcular:
a) La medida de la cuarta arista lateral DD′
b) Area lateral del tronco de prisma.
c) Volumen del tronco.

227. Un paralelepípedo tiene por base un rombo ABCD de lado a, formado por dos triángulos ABC y CBD. La tercera arista AA′ que

parte de A, forma con cada una de las AB y AD ángulo de 60° y su longitud es a.
Demostrar:

1.° Que todas las caras del paralelepípedo son iguales. Calcular el área total del paralelepípedo.
2.° Que existe una esfera inscrita en el paralelepípedo; es decir, tangente a las seis caras.

227ª Una pirámide de vértice V tiene por base un cuadrado ABCD. La arista VA es perpendicular al plano p de la base. En cada una de las caras VAB y VAD se trazan las alturas AH y AK a los lados opuestos VB y VD, respectivamente.
Se pide:

a) Demostrar que: 1.° La resta AH es perpendicular a la recta BC.
2.° La recta AK es perpendicular a la recta DC.
3.° El plano AHK es perpendicular a la recta VC.

b) Tomando VA = AC = 1 se corta la pirámide por un plano paralelo al plano p, a una distancia x de este plano. Calcular, en función de x, el área de polígono sección, estudiando su variación a variar x y dibujando la curva representativa de esta variación.

227ᵇ Dibuja un icosaedro regular. Sean A y B dos vértices opuestos del icosaedro. Suprimiendo las dos pirámides P_1 y P_2 cuyas caras laterales tienen en común los vértices A y B, respectivamente, resulta un poliedro Q.
Se pide:

a) Cuántas caras, cuántos vértices y cuántas aristas tiene el poliedro Q.

b) Cuántas diagonales posee el poliedro Q. (Diagonal de un poliedro es un segmento cuyos extremos son dos vértices del poliedro y que no tiene más punto común con sus caras que dichos vértices).

c) ¿Cuántas rectas existen con la propiedad de que un giro de 72° alrededor de ellas superponen al poliedro Q consigo mismo?

227ᶜ Demostrar que si todas las aristas de un tetraedro son iguales, estas seis rectas son perpendiculares dos a dos.

VOLUMENES DE CUERPOS DE FORMAS PARTICULARES

228. En el espacio, dos segmentos, AB y CD, se cruzan. Dichos segmentos tienen igual longitud 2 m., y son perpendiculares entre sí. El segmento de perpendicular común coincide con el segmento que une los puntos medios M_1 y M_2 de dichos segmentos AB y CD, y mide también 2 m. Calcular la longitud de las aristas, el área total y el volumen del tetraedro $ABCD$.

229. Se da el rectángulo *ABCD*, cuyas diagonales, que se cortan bajo ángulo de 60°, mide cada una $2a$.
Hallar el volumen del prismatoide de altura $h = 2 \cdot AB$ (siendo AB el lado mayor del rectángulo) una de cuyas bases es *ABCD* y la otra es el cuadrilátero cuyos vértices se proyectan ortogonalmente sobre los puntos *MNPQ* que son los medios de los lados del rectángulo citado.

230. Se da una pirámide SABC. Su base ABC es un triángulo equilátero, de lado a; las otras caras son iguales, y la altura de la pirámide es h. Se corta esta pirámide por un plano paralelo a su base. Sea DEF la sección obtenida y x su distancia al vértice S. Se pide:
a) Calcular el volumen V_s de la pirámide SDEF. El volumen V_h de la pirámide HDEF, cuyo vértice H es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.
b) Estudiar la variación de la razón $y = V_h/V_s$ cuando x varía de O a h.
c) Calcular x para que el volumen del cuerpo obtenido, restando de la pirámide dada SABC las dos pirámides SDEF y HDEF, sea igual al volumen del sólido formado por estas dos últimas pirámides. ¿Cuál es entonces el área del triángulo DEF?

231. Se considera una pirámide SABC, cuya base es un triángulo equilátero ABC, de lado a y cuya altura es SA $= a$.
a) Calcular el volumen de la pirámide, la superficie de SBC y la distancia del punto A al plano SBC.
b) Se toman sobre SB y SC longitudes iguales BM $=$ CN $= b$ y se considera el plano AMN, que corta a la pirámide en dos partes, de las que se calculará el volumen respectivo.
c) Calcular el perímetro del triángulo AMN.

232. Contestar a las siguientes cuestiones:
a) Un recipiente en forma de prisma de base cuadrada, de lado 4 cm, está inclinado de tal manera que el líquido contenido en él alcanza en las aristas laterales las alturas de 7 cm, 8 cm, 11 cm y 10 cm. ¿Qué cantidad de líquido contiene el recipiente?

233. Las bases de un prismatoide son: un cuadrado DEFG y un triángulo isósceles ABC. La proyección ortogonal de la base superior, ABC, sobre la inferior es el triángulo DEH (H es el punto medio del lado FG del cuadrado). Las caras laterales se forman uniendo A con D y G; B con E y F, y C con F y G. Hallar el volumen del prismatoide, siendo la altura del mismo y el lado del cuadrado de la base iguales a 4 m.
Nota.—Las proyecciones de A y B sobre la base inferior son, respectivamente, los puntos D y E, y la de C es el punto H. El vértice F de la base inferior es contiguo al E y opuesto al D.

234. Las bases de un prismatoide son dos cuadrados. Las proyecciones ortogonales de los vértices de la base superior sobre el plano de la inferior son los puntos medios de los lados de ésta. Las aristas laterales unen cada vértice de la base superior con los dos vértices más próximos de la inferior. El lado de la base menor mide $8\sqrt{12}$ cm., y la altura del prismatoide es de 9 cm Calcular el volumen.

235. Sobre las tres aristas de un triedro trirrectángulo de vértice V se toman segmentos $VA = a$ cm., $VB = b$ cm. y $VC = c$ cm. Se pide:

1.° Area total del tetraedro $VABC$.

2.° Volumen del tetraedro.

3.° Distancia de V al plano ABC.

Aplicación al caso en que $VA = 9$ cm., $VB = 13$ cm. y $VC = 16$ cm

236. Se considera un semicirculo de diámetro AB = 2R. Sea M un punto de este semicírculo, H su proyección sobre AB. Se designa con x el segmento AH.

Sobre la perpendicular en M al plano de este círculo, en una de las semirrectas, se lleva MS = MH y se construye el tetraedro SMAB.

a) Calcular, en función de R y de x, las aristas de este tetraedro y demostrar que el ángulo diedro de arista AB, del tetraedro, tiene un valor constante cuando x varía.

b) Demostrar que la suma de los cuadrados de las longitudes de dos aristas opuestas tiene un mismo valor y, para los tres pares de aristas opuestas, AB y SM, SB y AM, SA y BM.

c) Representar gráficamente los valores de y cuando x varía de 0 a 2R.

237. En un plano horizontal se da un triángulo equilátero ABC de lado a.

Sobre la vertical que pasa por B, y en sentido ascendente, se marca el punto D, definido por $BD = x$, y sobre la vertical que pasa por C, y en sentido ascendente, se marca E, definido por $CE = y$.

a) Calcular x e y para que el triángulo DAE sea rectángulo en A y la hipotenusa DE tenga una longitud dada 21. Discusión. *b)* Calcular el área del triángulo DAE. Valor mínimo de este área. Suponiendo el caso del valor mínimo, calcular el coseno del ángulo del plano DAE con el plano horizontal y demostrar que este ángulo es igual al ángulo que forma la diagonal de un cubo con una arista.

237ª Se dan los puntos O y A, siendo OA = d.

a) Determinar el radio x de una circunferencia de centro O, tal que si se trazan por A las tangentes AT y AT′ a la misma, la cuerda de los contactos TT′ tenga una longitud dada 21. Discusión.

b) Aplicación numérica al caso d = 5 m., 1 = 2,4 m.

237ᵇ Una pirámide VABC tiene la arista VB perpendicular al plano de la base ABC. La arista VC mide 65 cm. y el triángulo de la base, ABC, es rectángulo en A, su lado AB mide 15 cm. y tg. ABC $= 4/3$.

a) Calcular el volumen del cono, que proyecta desde *V* la circunferencia inscrita en el triánguo ABC.

b) En el plano ABC se toman como ejes de coordenadas las rectas AC y AB. Hallar las coordenadas del centro de la circunferencia homotética de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en la homotecia plana de centro A y razón $-1/2$.

AREAS Y VOLUMENES DE LOS CUERPOS DE REVOLUCION

238. Hallar el área de una superficie esférica, sabiendo que el área total del cono equilátero circunscrito a ella es 81 m².

239. Dada una esfera de radio R, y uno de sus diámetros A B, se considera el cilindro circunscrito a la esfera que tiene A B por eje, y el cono que tiene por vértice A y AB por eje y cuya base es el círculo obtenido cortando el cilindro por el plano normal a AB en B. Se cortan los tres sólidos por un plano perpendicular a AB en un punto H. Se hará AH $= x$. El plano corta al cono, la esfera y el cilindro, según tres círculos de áreas respectivas S_1 S_2 y S_3. Se pide:

a) Calcular S_1, S_2 y S_3. Estudiar las variaciones de S_2 y de S_2/S_1 cuando x varía de 0 a 2R.

b) Determinar x para que S_1, S_2, S_3 estén en progresión aritmética.

c) Determinar x para que S_1, S_2, S_3 estén en progresión geométrica.

240. Supuesto que la mínima distancia a que puede encontrarse un satélite artificial en su órbita alrededor de la Tierra es de 200 Km., calcular el área del casquete terrestre que se divisará desde el satélite en ese momento.

241. Sobre una esfera de radio igual a 1 metro se considera un casquete de altura igual a medio metro.

Se pide:

1.° Area del casquete esférico.

2.° Volumen del sector esférico correspondiente a ese casquete.

3.° Volumen del cono cuyo vértice es el centro de la esfera y cuya base es el círculo base del casquete.

4.° Volumen del segmento esférico limitado por el casquete y su base.

242. En un triángulo equilátero de lado a, se trazan por un punto P de uno de sus lados, BC, paralelas a los otros dos. Se pide:

a) Determinar la posición de P, para que el volumen engendrado, por el paralelogramo formado en la figura al trazar las paralelas y el engendrado por el triángulo dado, girando ambos alrededor de BC, estén en la razón de 2 a 3.

b) Calcular la distancia del punto P al pie de la altura del lado AB.

243. Razón entre los volúmenes de las esferas inscrita y circunscrita a un octaedro regular. Volumen del cono que tiene por vértice uno del octaedro y que está circunscrito a la esfera inscrita. Arista del octaedro, un metro.

244. Un cilindro inscrito en una esfera de radio R tiene su área lateral igual a la de un círculo máximo de la esfera dada. Hallar:

a) Las áreas laterales y total de dicho cilindro.

b) Volumen de uno de los segmentos esféricos de una sola base, cuya base es la del cilindro.

245. Sean dados una circunferencia de centro O y radio R y un punto P de su plano tal que $PO = d$. Trazando una tangente PT se obtiene el triángulo mixtilíneo PTA. Calcular en función de R y d el área total y el volumen del cuerpo engendrado por dicho triángulo mixtilíneo al girar alrededor de la recta PO ($d > R$).

246. Por un punto de la base de un triángulo equilátero de lado a se trazan paralelas a los otros dos lados. Determinar la distancia de este punto al vértice más próximo para que el volumen engendrado por el paralelogramo formado sea los $\dfrac{2}{3}$ del volumen engendrado por el triángulo cuando la figura gira alrededor de la base.

247. Por un punto de la base de un triángulo equilátero de lado a se trazan paralelas a los otros dos lados. Determinar la razón entre los segmentos en que este punto descompone a la base, para que el volumen engendrado por el paralelogramo obtenido sea la mitad del volumen engendrado por el triángulo, cuando la figura gira alrededor de la base.

248. Se da un cuadrilátero ABCD cuyo ángulo A es recto, cuyos lados AB y AD tienen 1 m de longitud y cuyos otros dos lados B C y DC son iguales cada uno a la diagonal BD. Se pide:

Calcular el volumen que engendra este cuadrilátero al dar una vuelta entera alrededor de AB.

249. Se da una esfera de radio R y se construye un cono de revolución, cuya base sea un círculo máximo de dicha esfera y cuyo volumen sea la mitad del de la esfera. Se pide:

a) Altura de dicho cono.

b) Radio de la circunferencia menor, según la cual se cortan la esfera dada y el cono.

250. Se considera un primer cono de revolución tal que su sección por un plano meridiano sea un triángulo equilátero de lado $2a$. ¿Cuál es su volumen?

En este primer cono se inscribe un segundo cono cuyo vértice está en el centro de la base del primero, cuyo eje de revolución coincide con el eje de revolución del mismo, y cuya sección por un plano meridiano es del mismo modo un triángulo equilátero. ¿Cuál es el volumen de este segundo cono? ¿Cuál es el volumen del sólido limitado por la superficie lateral del primer cono, la superficie lateral del segundo y la base del primero?

En el 2.° cono se inscribe un 3.°, definido con respecto al 2.° como el 2.° fue definido con respecto al 1.°, y así sucesivamente. ¿Cuál es la sucesión de los valores de los conos así obtenidos? ¿Cuál es la suma de los volúmenes de los n primeros? Si se continuara indefinidamente la construcción de estos conos, se obtendrían cada vez más pequeños, pero que todos tienen en su interior un punto cuya definición se pide.

251. Desde un punto que dista 13 dm. del centro de una circunferencia de 5 dm. de radio se trazan las tangentes a la misma, limitándolas en los puntos de contacto. La figura así obtenida gira alrededor del diámetro que pasa por el punto primeramente indicado Calcular el área y el volumen del cuerpo engendrado.

252. Calcular el volumen de la esfera inscrita en un octaedro regular de arista 8 dm.

253. Dos circunferencias de radios 4 cm. y 1 cm. son tangentes exteriores en el punto A. Se traza una tangente común exterior, cuyos puntos de contacto respectivos son T y T'. Calcular el área y el volumen del cuerpo engendrado por el triángulo mixtilíneo ATT' al girar 360° alrededor de la línea de los centros (Tómese para π el valor 3,14).

254. Los radios de las bases de un tronco de cono miden a metros y b metros. Se consideran los dos conos que tienen por bases las del tronco y por vértice el centro de la otra base. Estos dos conos se cortan según un círculo. Calcular el área de este círculo. Aplicación al caso particular en que a = 30 cm, b = 20 cm.

255 Se dan un cono recto y una esfera colocados sobre un mismo plano. Cortar ambos cuerpos por un plano paralelo al anterior, de modo que las dos secciones sean iguales. El radio de la base del cono es 5 m., y la altura del cono y el diámetro de la esfera son ambos iguales a 10 m.

256. Sea un triedro SXYZ, cuyas caras miden: XYS = 120°, YSZ = 90°, ZSX = 90°. Sobre SX y SY se llevan longitudes SA y SB iguales a 6 cm. Determinar la longitud SC que se debe tomar sobre SZ para que el triángulo ABC sea equilátero. Calcular el radio de la esfera circunscrita al tetraedro SABC.

256[a] Sea A el afijo de $3 + i$ en el plano de los numeros complejos. Se pide:

a) El número complejo cuyo afijo es el punto B simétrico de A respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

b) Hallar el número complejo y su afijo C, de la suma del número complejo $3 + i$ y el número complejo de afijo B.

c) Volumen del cuerpo engendrado al girar 360° el triángulo OAB alrededor de OC.

256[b] Dada la circunferencia C de radio r y una recta S tangente en P a la circunferencia, se pide:

a) Construir una circunferencia, de radio $\frac{r}{3}$ tangente a C y a S en puntos distintos del punto P.

b) Suponiendo $r = 3$ cm., calcular el volumen del cuerpo engendrado por el triángulo STM al girar 360° alrededor de S, siendo S y T, respectivamente, los centros de las homotecias de razones positiva y negativa que transforma la circunferencia dada en la circunferencia construída y M el punto de intersección del eje radical de estas circunferencias con la recta *s*.

256[c] En un cuadrado ABCD, cuya diagonal es de 32,2 cm. está inscrito otro cuadrado MNPQ, de modo que cada vértice de éste se encuentra en un lado de aquél al que divide en dos segmentos en la razón 8/15. Calcular:

1.° El lado y la diagonal de MNPQ.

2.° El volumen del sólido engendrado por este cuadrado en una rotación de 180 grados alrededor de una de sus diagonales.

256[d] Un triángulo isósceles ABC, rectángulo en A, en el cual $AB = AC = 1$ gira alrededor de un eje BX situado en su plano y que pasa por el vértice B sin atravesar el triángulo. Se pide:

a) El volumen engendrado por este triángulo en función del ángulo α que forma la hipotenusa BC con el eje BX.

b) Determinar α de manera que haga máximo el volumen engendrado y obtener la expresión de este volumen.

TRIGONOMETRIA PLANA Y ESFERICA

257. Determinar dos arcos cuya suma vale *a*, y *s* la suma de sus senos. Aplicar el resultado al caso en que $a = \frac{\pi}{2}$, $s = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

258. Sabiendo que el diedro de un icosaedro regular mide 138° 11′ 24″, calcular el volumen de un icosaedro regular de 6 cm. de arista.

259. En una esfera de radio R = 2 dm. se consideran los puntos medios A, B y C de los lados de un triángulo esférico trirrectángulo formado por dos cuadrantes de meridiano y un cuadrante de ecuador. Calcular sin tablas:

a) Las medidas en radianes de los lados del triángulo esférico A B C.
b) Los cosenos de los ángulos de dicho triángulo.
c) El área del triángulo rectilíneo plano A′ B′ C′, siendo A′ y B las proyecciones ortogonales de A y B sobre el plano del ecuador que pasa por C.

260. Calcular:

1.° El área de un triángulo esférico ABC cuyos lados tienen 6,583 m., 8,512 m. y 10,622 m. de longitud, respectivamente, sabiendo que el radio de la esfera mide 8 m.
2.° El área del triángulo rectilíneo ABC.
3.° El volumen del tetraedro OABC, siendo O el centro de la esfera.

261. En una esfera de radio r se tiene un triángulo equilátero esférico, cuya superficie es 1/16 de la esfera. Se pide:
a) La medida de sus ángulos y lados.
b) El radio de la circunferencia inscrita y el radio esférico de la misma.

262. Haciendo centro en un vértice de un tetraedro regular de 5 metros de arista, se construye una superficie esférica de 2 metros de radio, la intersección de la superficie esférica y el tetraedro es un triángulo esférico.
a) Hallar el diedro del tetraedro utilizando el triángulo esférico.
b) Hallar, en m.^{2}, el área del triángulo esférico.

263. El tetraedro regular OABC tiene de arista 1 m.
Calcular el área del triángulo esférico que el triedro del tetraedro de vértice O determina en la esfera de centro O y radio 1 m. Calcular también el área del triángulo esférico polar.

264. En una esfera de 1 m. de diámetro se tiene un triángulo esférico ABC equilátero, cuyo perímetro es π radianes.

Calcular:

a) Exceso esférico del triángulo A′ B′ C′, recíproco del ABC.
b) Area del triángulo esférico A′ B′ C′.

265. Calcular el volumen de una esfera, sabiendo que el área de un triángulo esférico trazado sobre ella, cuyos ángulos miden 55°, 67° y 78°, tiene de área 314 cm^2.

266. El triángulo esférico *ABC* tiene sus ángulos iguales y cada uno mide

$$A = B = C = 120^\circ.$$

El radio de la esfera es $r = 1$. Hallar:

1.° El área del triángulo esférico ABC.
2.° Su lado, determinado por alguna razón trigonométrica.
3.° El volumen del tetraedro $OA'B'C'$, formado por el centro O de la esfera y los vértices $A'B'C'$ del triángulo polar del ABC.

267. Resolver el triángulo esférico ABC, conocidos:
$a = 58^\circ\ 23'$; $A = 42^\circ\ 51'$; $B = 102^\circ\ 47'$.

268. De un triángulo esférico trazado en una esfera de 1,6 m de radio se conocen:
B $= 108^\circ\ 32'\ 14''$ C $= 71^\circ\ 45'\ 58''$ A $= 90^\circ$
Se pide:

1.° Resolver el triángulo.
2.° Hallar su superficie en dm^2.
3.° Volumen de la piramide esférica con vértice en el centro de la esfera y base el triángulo.

269. Resolver el triángulo ABC, definido por:
$a = 90^\circ$; $b = 49^\circ\ 35'\ 30''$; $B = 45^\circ\ 2'\ 30''$.

270. De un triángulo esférico trazado en una superficie esférica de radio 9 dm. se conocen:
$a = 75^\circ\ 20'\ 00''$ $c = 54^\circ\ 28'\ 32''$ A $= 90^\circ$
Se pide:

1.° Resolver el triángulo.
2.° Hallar su superficie en m^2.
3.° Volumen de la pirámide esférica con vértice en el centro de la esfera y base el triángulo.

271. De un triángulo esférico trazado en una esfera de 6 decímetros de radio se conocen:
$b = 140^\circ\ 52'\ 40''$ $c = 114^\circ\ 15'\ 54''$ A $= 90^\circ$.
Se pide:

a) Resolver el triángulo.
b) Hallar su superficie en m^2.
c) Volumen de la pirámide esférica cuyo vértice es el centro de la esfera y base el triángulo.

272. En un dodecaedro regular de 12 cm. de arista, calcular:

1.° El diedro formado por dos caras contiguas.
2.° El radio de la esfera inscrita.
3.° El área total y el volumen de este cuerpo.

273. En un dodecaedro regular, calcular:

a) La medida de su ángulo diedro.
b) Su volumen, siendo 8 cm. la longitud de la arista.

274. De un triángulo esférico trazado en una superficie de radio 8 dm. se conocen:

$b = 146° \ 11' \ 24''$ $\quad C = 126° \ 13' \ 14''$ $\quad A = 90°$.

Se pide:

a) Resolver el triángulo.
b) Hallar su área en m².
c) Volumen de la pirámide esférica con vértice en el centro de la esfera y base la del triángulo.

275. Resolver el triángulo esférico rectángulo dado por: $A = 90°$, $a = 83° \ 4' \ 25''$, $b = 142° \ 17' \ 10''$.

276. Resolver el triángulo esférico *ABC*, conocidos:

$a = 42° \ 15' \ 30''$ $\quad b = 76° \ 20'$; $\quad A = 25° \ 18' \ 14''$.

277. En un icosaedro regular convexo de 8 cm. de arista, calcular:

1.° El diedro formado por dos caras contiguas.
2.° El radio de la esfera inscrita.
3.° El área total y el volumen de este cuerpo.

278. 2.° Calcular el área y el diedro básico de una pirámide hexagonal regular, cuya base tiene de lado 3 metros y el diedro formado por dos caras laterales consecutivas es de 150°. En los cálculos se tomará por valores aproximados de

$$\sqrt{2} = 1{,}40 \quad \text{y} \quad \sqrt{3} = 1{,}72.$$

278ª El paralelo terrestre de la latitud igual a 60° N se tienen los puntos A de longitud 30° Oeste y B de longitud 30° Este y se pide:

a) Medida lineal en Km. del arco de paralelo AB.
b) Resolver el triángulo PAB, siendo P el polo Norte terrestre, para obtener el coseno del arco AB de circunferencia máxima.
c) En posesion de una tabla de logaritmos calcular la graduación del arco AB de círculo máximo y su medida lineal en Km.

278ᵇ Sabiendo que el área de un triángulo esférico equilátero es igual a un círculo máximo, calcular los ángulos de dicho triángulo.

278ᶜ Calcular el área del triángulo esférico que determina en una esfera de 6 cm. de radio un triedro equilátero cuyas caras miden 60° y cuyo vértice es el centro de dicha esfera.

278ᵈ Dado el triángulo esférico equilátero ABC de lado igual a 60° sobre una superficie esférica de radio 1, se pide:

a) Calcular el coseno del ángulo A.
b) Calcular el coseno de 3 A.
c) Calcular el exceso esférico de ABC.
d) Calcular el área del triángulo ABC.

ASTRONOMIA

279. Desde un punto, M, de la tierra, cuya longitud es 0° y la latitud 45° N., parte un avión hacia otro punto, A, que está equidistante de los dos polos de la tierra y del punto M; pero se ve obligado a aterrizar a los 2/3 de su camino y al Este de M. Hallar:

1.° Las coordenadas geográficas del punto de aterrizaje.
2.° El tiempo que tardó en efectuar éste, si llevó una velocidad de 800 Km/h.
3.° El área del huso de ángulo EAP.

280. Las coordenadas geográficas de dos lugares situados sobre la superficie terrestre supuesta esférica, son, respectivamente:

$$A \begin{cases} l = 23^{\circ}\ 42'\ \text{E.} \\ \lambda = 62^{\circ}\ 18'\ \text{N.} \end{cases} \qquad B \begin{cases} l' = 113^{\circ}\ 42'\ \text{E.} \\ \lambda' = 18^{\circ}\ 26'\ \text{N.} \end{cases}$$

Hallar:

1.° La diferencia de hora solar en ambos lugares.
2.° La distancia esférica entre A y B y el área del triángulo esférico PAB, siendo P el polo Norte.
3.° El volumen del cono que tiene por vértice el punto A y por base el ecuador.

281. Desde dos puntos del ecuador cuyas longitudes difieren 90°, parten simultáneamente hacia el polo Norte, y siguiendo sus meridianos, dos móviles, A y B, con velocidades de $666 \frac{2}{3}$ Km/h. y 1.000 Km/h., respectivamente.
Calcular:

1.° La distancia que separa a estos móviles al cabo de cinco horas, medida sobre el arco de círculo máximo que los une.
2.° Los ángulos que este círculo máximo forma con los meridianos de A y de B.
3.° Area del huso de ángulo A.

282. Un avión sale de Buenos Aires en dirección a Madrid. Las coordenadas geográficas de estas dos ciudades son:

Buenos Aires: $l_1 = -58^{\circ}\ 10'$ $\lambda_1 = -32^{\circ}\ 30'$.
Madrid: $l_2 = -3^{\circ}\ 42'$ $\lambda_2 = 40^{\circ}\ 20'$.

¿Qué dirección ha de tomar a la salida? ¿Qué dirección lleva a la llegada?
(Entiéndase por dirección de salida o de llegada el ángulo que forma la trayectoria con el respectivo meridiano).

283. Un avión parte de un punto del ecuador terrestre situado a 80° W de Greenwich para seguir un arco de circunferencia máxima que forma con el ecuador un ángulo α, tal que $\cos \alpha = \dfrac{1}{3}$. ¿Cuánto tiempo deberá volar, a la velocidad constante de 500 Km/h., para alcanzar el meridiano 70° E? ¿Qué latitud tiene el punto con el cual lo alcanza?

284. Dos puntos, A y B, sobre la superficie de la Tierra considerada esférica, tienen igual latitud, 45°. La longitud de A es 25° 18′ Oeste y la de B, 34° 42′ Este (ambas con relación a un mismo meridiano) Se pide:

a) Longitud en kilómetros del arco de paralelo que los une.
b) Longitud del arco de circunferencia máxima que los une.
La circunferencia máx ma de la Tierra tiene de longitud 40.000 kilómetros, aproximadamente.

285. Dos puntos del paralelo 20° N. tienen longitudes respectivas: 23° 42′ E. y 18° 26′ O. Se desea calcular:

a) La distancia esférica entre ambas.
b) Su distancia en el espacio.
c) La distancia polar de cada uno.
d) La diferencia de hora local.

286. La latitud de un trópico es de $\alpha = 23° \; 27' \; 30''$ y la del círculo polar ártico $90° - \alpha$.

Hallar la razón entre el área determinada por ambos círculos y la zona de la Tierra, supuesta esférica.

287. Dos puntos C y F de la superficie terrestre están situados en el mismo paralelo 45° y tienen: F 30° de longitud oriental y C 30° de longitud occidental. Calcular en km la diferencia de distancias que los separa según se vaya de uno a otro siguiendo el paralelo o el círculo máximo que los une.

288. Un avión que sale de Madrid a las 0 horas (locales) de un día, tarda 18 horas 30 minutos en llegar a un punto B, cuya longitud referida al meridiano de Madrid es 75° Oeste.
¿A qué hora (local de B) llega el avión a dicho punto B?

289. Calcular la distancia entre dos ciudades situadas en el paralelo de latitud 60°, sabiendo que sus longitudes son: 10° E y 30° E. (Tómese para valor del radio terrestre $20.000/\pi$ Km).

290. Determinar razonadamente entre qué valores ha de estar comprendida la latitud de un lugar, para que la sombra de una persona,

al paso del sol por el meridiano del lugar, tenga longitud nula dos veces al año. Hallar la latitud de un lugar para que lo más arriba dicho suceda una sola vez al año.

291. La latitud de Madrid es 40° 24′ 30″, y la declinación máxima del Sol es de 23° 27′. Calcular la altura meridiana del Sol al mediodía verdadero local, cuando la declinación alcanza ese valor. (Se recomienda explicar el problema mediante un dibujo).

292. Un punto, A, de la isla de Fernando Poo está a 3° 30′ de latitud N, y a 8° 40′ de longitud E. Supuesta la tierra esférica (y exacta la definición clásica del metro como parte alícuota del meridiano), se pide:

1.° ¿A qué altura habrá de ascender sobre el nivel del mar para llegar a ver un punto del ecuador?

2.° ¿Qué longitud tiene el arco de círculo máximo que une A con el punto O de intersección del meridiano de Greenwich con el ecuador?

3.° Distancia rectilínea entre los referidos puntos A y O.

293. Un punto, A, de la isla de Fernando Poo está a 3° 30′ de latitud N. y a 8° 40′ de longitud E. Supuesta la Tierra esférica (y exacta la definición clásica del metro como parte alícuota del meridiano), Se pide:

1.° ¿Cuál será la hora solar en A cuando el Sol atraviese el meridiano de Greenwich?

2.° ¿Cuál será la declinación del Sol los días en que pase por el cenit de A?

3.° Calcular el valor del área de la zona esférica limitada por el paralelo de A y el ecuador. (Deben utilizarse tablas).

294. La altura del sol sobre el horizonte de Nüremberg a las 6 horas de la mañana de cierto día es de 17° 18′. La latitud de esa población es de 48° 20′ N. Calcular la declinación del sol en ese día.

295. En el día del solsticio de verano hallar la latitud mínima de un lugar de la Tierra para que no tenga noche. En dicho día, y para otro lugar de la Tierra cuya latitud es de 45° N, hallar la duración del día y de la noche.

296. Obtener razonadamente la altura meridiana del Sol el día del solsticio de verano en un lugar cuya latitud sea 53° 27′. En ese instante del paso meridiano, ¿qué sombra arroja un poste vertical de tres metros sobre un plano horizontal?

297. ¿Qué angulo forma con la meridiana una calle de Madrid que a las 18 horas de tiempo solar verdadero, el día 1 de abril no proyecta sombra en ninguna de las aceras?

Latitud de Madrid: 40° 12′ 31″.
Declinación del Sol el día 1 de abril: 10°.

298. ¿A qué hora de tiempo solar verdadero sale y se pone el Sol en un lugar de 45° de latitud N. el día en que la declinación de ese astro es de 20°? ¿Cuál es la duración del día y de la noche en dicho lugar en esa fecha?

299. Calcular la declinación de un astro que en Berlín alcanza su culminación a los 80°.
Decir si dicho astro es circumpolar en esa latitud.
(*Nota.*—Culminación: Máxima altura sobre el horizonte).
Latitud de Berlín: 52° 29′ 7″.

300. La ascensión recta de una estrella de 30° de declinación, a las 9 horas, de tiempo sidéreo, es 75°. Calcular la altura de esa estrella sobre el horizonte en ~~el~~ momento en que su acimut es de 90°.

301. Un marino calcula una noche la altura de la estrella polar, que son 45°. Sabe que el Sol se ha puesto a las 7 h. de la tarde y desea hallar la declinación del Sol en el instante de su puesta. ¿Cómo lo calcula?

302. En el día del equinoccio de primavera se ha medido en Madrid la sombra de un lápiz, en posición vertical, de 15 cm. La medición fue efectuada después del mediodía y dio 25 cm. ¿Qué hora era?
Latitud de Madrid, 40° 24′ 29″.

303. La latitud de un lugar de la tierra es de 48° 19′, La altura del Sol, a las 6 horas de la mañana, es de 10° sobre el horizonte. Calcular la declinación de ese astro en ese día.

303^{a} Calcular las horas del orto y del ocaso del Sol en un lugar de la Tierra de 45° de latitud N. el día en que la declinación del Sol es de 15°; hallar también la duración del día y de la noche en esa fecha y lugar.

303^{b} En el lugar de latitud 60°, calcular la longitud de la sombra arrojada al mediodía por un mástil vertical de 10 metros de altura en el día más largo del año.

303^{c} En un lugar del hemisferio Norte se observa mirando hacia el punto Sur que la altura de una estrella en el instante de su culminación es $a = 65°$. La declinación de dicha estrella es $\delta = 30°$. Con la ayuda de un esquema de la esfera celeste, determinar la latitud ϕ de aquel lugar.

303^{d} Calcular el tiempo que el Sol se encuentra sobre el horizonte en un punto de la Tierra, de 45° de latitud norte, el día del solsticio de verano. (sen 23° 27′ = 0,39794).

303^{e} Hallar la distancia media sobre la superficie terrestre entre dos puntos de la misma de coordenadas A (23° N, 60° E), B (57° 6′ S, 30° W).

303^{f} Calcular razonadamente mediante la figura correspondiente la altura que alcanza el Sol al pasar por el meridiano de un lugar el día en que la declinación del Sol es 20° N. Latitud de lugar: 40° N.

REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES

304. Representar gráficamente la función: $y = x^3 + bx^2 + cx + d$, sabiendo:

a) Que la ecuación $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tiene por raíces m, n y p.

b) Que estando en el sistema de base dos, un número escrito con cinco cifras iguales, en el sistema de base n está escrito con tres cifras iguales a las anteriores.

c) Que p es el valor que anula al determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & p & 16 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & p & 0 \end{vmatrix}$$

y *d)* Que el polinomio $3x^3 - x^2 + mx + p$ es divisible por $x - 2$.

305. Estudiar y representar la función

$$y = \frac{x}{1 - x^2}$$

306. Estudiar la función

$$y = \frac{x}{x^2 + 2}$$

y construir la curva correspondiente.

307. *a)* Estudiar la función que expresa la suma de los tres términos de una progresión geométrica de razón x, siendo a su primer término.

b) Determinar x de modo que la suma de los cuadrados de los términos extremos aumentada en el doble del cuadrado del término medio sea igual a $m^2 a^2$. Discusión.

c) ¿Qué valores hay que dar a x^2, cuadrado de la razón de la progresión, para que se pueda construir un triángulo rectángulo con tres segmentos medidos por los tres términos de esta progresión? Se da $a = 137$.

307 Se tiene la ecuación:

$$y = \begin{vmatrix} x+3 & 1 & 2 \\ x+3 & x & 1 \\ x+3 & 2 & x \end{vmatrix}$$

y se pide:

a) Intersección con el eje x de la curva correspondiente a aquella ecuación.

b) Ecuación de la tangente a esa curva en dicha intersección.

c) Intersecciones de esa tangente y de dicha curva.

307[b] Gráfica de la curva representada por $y = x\, e^x$, hallando el área del recinto limitado por la misma, el eje X y la recta paralela al eje Y que pasa por el mínimo de la curva.

307[c] En una circunferencia de radio r se consideran dos arcos consecutivos cuya suma es un cuadrante y cuyos ángulos centrales respectivos miden α y $\pi/2 - \alpha$, $(0 \leq \alpha \leq \pi/2)$.

Hallar:

a) El máximo de la suma de sus cuerdas.

b) El máximo del área del triángulo determinado por los extremos de dichos arcos.

307[d] Dos nadadores, colocados en puntos opuestos de dos calles de una piscina de 90 m. de longitud, comienzan a nadar simultáneamente a lo largo de la piscina. Uno a 3 m/s y el otro a 2 m/s.

a) ¿Cuántas veces se encontrarán en 12 minutos, suponiendo que no pierden tiempo en las vueltas?

b) Representar gráficamente los movimientos de los dos nadadores tomando en el eje x los espacios recorridos y, en el eje y, los tiempos.

307[e] Desde un punto P, variable en una semicircunferencia de diámetro $AB = 2r$, se trazan las perpendiculares PC y PD al diámetro AB y a la tangente en B a la circunferencia, respectivamente.
Se pide:

a) Expresar, en función de r y de $AC = x$, el volumen V del cuerpo engendrado al girar el trapecio APDB alrededor de AB

b) Tomando $r = 1$, estudiar la variación de la función:

$$y = \frac{3\,V}{2\,\pi}$$

307[f] *a*) Calcular x e y de modo que los cuatro números:

$$y^2 - x, \quad 5x + 1, \quad 2y, \quad y + x - 1$$

tomados en el orden dado, estén en progresión aritmética.

b) Siendo a la medida en grados sexagesimales del ángulo interior de un polígono regular convexo de n lados, b la medida en grados centesimales del ángulo interior de un polígono regular convexo de m lados y

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{10}\,\frac{y}{x},$$

siendo x e y los números obtenidos en a), determinar m y n. Discusión.

307[g] Dado un triángulo ABC de lado $a = 5$ cm., cuyo perímetro es de 15 cms., y cuya bisectriz del ángulo A divide al lado a en dos segmentos que se hallan en la razón 2/3, se pide:
a) Calcular los otros dos lados
b) Estudiar la función

$$y = \log . (x^2 - mx + n),$$

en la que m y n son la mitad del mayor y del menor número, respectivamente, de los obtenidos en a).

307[h] Dada una esfera de radio r, se pide:
a) Calcular el volumen mínimo de los conos de revolución circunscritos a la esfera. (La esfera es interior al cono y tangente a la base y a la superficie lateral).
b) Razón del área total y del volumen del cono al área y volumen de la esfera, respectivamente.

307[i] Dada la función:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

que admite el máximo $y = 1$ para $x = -1$ y el mínimo $y = -2$ para $x = 2$.
Se pide:
a) Calcular a, b, c y d.
b) Coordenadas del punto de inflexión de la curva representada por la ecuación dada.
c) Representación gráfica de la curva.

307[j] Estudiar la variación de la función:

$$y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x + 6}$$

y dibujar la gráfica correspondiente.

307[k] Se tiene la función: $y = \sqrt[x]{x}$, $(x > 0)$
y se pide:
a) Derivar logarítmicamente la ecuación que relaciona x e y.
b) Calcular máximos y mínimos de la función y, estudiando los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

307' Sabiendo que el precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso, demostrar que, partiendo el diamante en dos, disminuye su valor. ¿Cómo ha de hacerse esta partición para que la depreciación sea máxima?

307ᵐ *a*) Encontrar dos números naturales cuyo producto sea igual a la mitad del producto de los números obtenidos aumentando cada uno de aquéllos en tres unidades.

b) Estudio y representación gráfica de la función:

$$y = 3 + \frac{18}{x - 3}$$

que aparece en la resolución del apartado anterior.

307ⁿ Dado un segmento AB de longitud igual a 12 cm.

a) Determinar gráficamente el punto P de la recta AB, extérior al segmento dado, tal que se verifique la relación $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{7}{12}$, justificando el procedimiento empleado y calculando la longitud del segmento PA.

b) Siendo ese segmento AB base de un triángulo isósceles cuya altura correspondiente mide 5 cm., hallar un punto de ésta tal que la suma de sus distancias a los tres vértices sea mínima. (Elíjase un sistema conveniente de ejes coordenados).

LIMITES

308. A) Los números $a = \lim_{n \to \infty} a_n$; $b = \lim_{n \to \infty} b_n$ y $c = \lim_{n \to \infty} c_n$ son las abscisas de los puntos A, B y C, de una serie rectilínea. Hallar dichos números así:

$$a_n = \frac{2n(n+1)(n+3)}{n^3 - 5n^2 + 7}, \quad ; \; b_n = 16\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right); \quad c_n = 12\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots\ldots + \frac{n}{n^2}\right)$$

B) Hallar la abscisa de punto D, conjugado armónico de C respecto de A y B.

C) Construcción gráfica de dicho punto D.

308ª *a*) Calcular:

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$$

b) Si *r* es el número inverso del límite anterior, calcular *a* de modo que sea incompatible el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a\,x - 6\,y = 5\,a - 3 \\ r\,x + (a - 7)\,y = -7\,a + 29. \end{cases}$$

308ᵇ Sea

$$S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + ---- + \frac{1}{(n'\,n + 1)}$$

a) Calcular S_n para $n = 1, 2, 3, 4$.

b) Observados los resultados de a), calcular la suma del segundo miembro de S_n demostrando, por inducción, la fórmula obtenida.

c) Calcular

$$\lim_{n \to \infty} S_n.$$

RELACIONES METRICAS EN EL TRIANGULO

309. En un triángulo, el lado $a = 10$ cm., el semiperímetro es 12 cm., y el producto de los números que miden los tres lados vale 480. Hallar:
   1.° Las longitudes de los lados *b* y *c*.
   2.° El radio r_a de la circunferencia exinscrita tangente al lado mayor.
   3.° La longitud de la bisectriz interior del ángulo *A*.

310. Dada la circunferencia de centro $(0, 2\sqrt{3})$ y radio 2, hallar las coordenadas de los vértices de los triángulos equiláteros que, teniendo un vértice en O (0, 0) y otro perteneciente a $y = 0$, el tercero se halla en la circunferencia dada.

311. Resolver, sin tablas, el triángulo del que se conoce: $A = 45°$, $b = 4$ dm. y el radio del círculo circunscrito, $R = 4$ dm.

312. Los lados de un triángulo miden: $a = 4$ cm., $b = 5$ cm., $c = 6$ cm. Calcular el área del triángulo, la longitud de la altura que parte de *A*, la longitud de la mediana que parte de *B* y la longitud de la bisectriz interior que parte de *C*.

313. Los lados de un triángulo miden: $a = 10$ dm., $b = 12$ dm., $c = 16$

dm. Calcular el radio del círculo inscrito, los radios de los círculos exinscritos y las longitudes de las bisectrices (interior y exterior) que parten del vértice A.

314. Las alturas de un triángulo miden 20 cm., 24 cm., y 24 cm., y el perímetro 80 cm. Calcular los lados del triángulo, su área y los radios de las circunferencias inscrita y exinscrita.

315. Construir un triángulo conociendo $h_a = 1$ *m*, $a = 1$ *m* y $b = 3$ *m*. Calcular los ángulos B y C del triángulo anterior.

316. Los lados de un triángulo *ABC* miden: $a = 4$ cm., $b = 5$ cm., $c = 6$ cm. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los tres ex-incentros del triángulo.

317 En un triángulo, el lado $a = 10$ cm., el semiperímetro es 12 cm., y el producto de los números que miden los tres lados vale 480. Se pide:

1.° Longitud de la mediana que parte del vértice *B*.
2.° Longitud de la bisectriz exterior del ángulo *A*.
3.° Dibujar la figura inversa del triángulo, en la inversión de centro el vértice *A* y potencia 48.

318. Se da un triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, cuyos catetos *AC* y *AB* miden, respectivamente, 16 cm. y 12 cm. Se traza la mediana *AM*, y desde *B* la perpendicular *BD* a *AM*, que corta a la altura *AH* en *G* y al lado *AC* en *E*. Se une *M* con *G*. Y se pide:

1.° Demostrar que *MG* es paralela a *CA*.
2.° Calcular *CA, AH, BD, EB, DE, AE, CE, MG* y el área del trapecio *MGAC*.

319. Sea el triángulo *ABC*, rectángulo en *A* y la altura *AH*. Se da:

$$BH = 3{,}6 \text{ m. y } CH = 6{,}4 \text{ m.}$$

Calcular:

1.° Las longitudes *AB, AC* y *AH*.
2.° Las distancias del punto *H* a los lados *AB* y *AC*.
3.° El radio del círculo inscrito en el triángulo *ABC*.

320. El radio del círculo inscrito de un triángulo es de 0,8 cm, y el perímetro de este mide 12 cm.
Se pide:

a) Construir el triángulo.
b) Calcular los lados y el área del referido triángulo.

321. Construir un triángulo rectángulo, conocidos los dos segmentos en que la bisectriz interior de un ángulo agudo divide al cateto opuesto. Obtenida esta construcción, se supone el caso particular en que los segmentos miden 8,5 cm. y 22,1 cm. Se pide calcular la hipotenusa y el otro cateto.

322. Un triángulo ABC tiene los lados

$$a = 7 \quad b = 10 \quad c = 4$$

Calcular la distancia de los pies M y N de las dos bisectrices interior y exterior, AM y AN correspondientes al vértice A.

323. Se dan dos círculos, de diámetros $AB = 2R$ y $AC = 2\ r\ (R > r)$, siendo el menor interior y tangente en A al mayor. Sobre la tangente común, a un lado y otro del punto A, se toman $AM = AN = 2\ r$. Las tangentes trazadas desde M y N a la circunferencia menor se cortan en E, sobre el diámetro AB. Se pide:

1.° Calcular la longitud de BE.

2.° Hallar el área del triángulo MNE.

324. De un triángulo se conoce $a = 15$ cm., $B = 45°$, $C = 75°$. Se desea hallar, sin utilizar tablas:

a) La altura h_a.

b) La mediana m_a.

c) La distancia del baricentro del triángulo al lado a.

324ª En un triángulo ABC, cuyos lados miden a = 3 cm., b = 5 cm., y c = 6 cm., trazamos su círculo inscrito, cuyos puntos de contacto con a y c son M y N respectivamente.

a) Siendo O el punto de intersección de las rectas AM y CN, determinar la distancia de A al pie, sobre el lado b, de la recta BO.

b) En el cuerpo engendrado por el triángulo ABC, al girar alrededor de BC, se traza el plano perpendicularmente a BC, por el punto N. Hallar el área de la sección determinada por dicho plano. (Giro de 360°)

324ᵇ Los lados de un triángulo ABC son:

$$a = 10 \text{ cm.},\ b = 14 \text{ cm.},\ c = 15 \text{ cm.}$$

En el lado AB se tiene el punto M tal que AM = 4 cm., y en el AC el punto N tal que AN = 6 cm. Siendo P el punto de intersección de las rectas MN y BC, se pide encontrar la razón $\dfrac{PB}{PC}$ y la medida de BP.

324ᶜ Construir un triángulo equilátero que tenga un vértice en el origen de coordenadas, otro en la recta $v = 4$ y el tercero en la circunferencia de ecuación $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$.

RESOLUCION DE ECUACIONES

325. Calcular las raíces de la ecuación $x^3 + 1.728 = 0$. Representarlas en el plano complejo y determinar el área del triángulo cuyos vértices son sus afijos.

326. Resolver la ecuación $8x^3 - 12x + 3 = 0$, sabiendo que las raíces están en progresión aritmética.

327. Hallar:

Los valores que han de tomar p y q, para que 21 sea una de las raíces de la ecuación:

$$6x^4 + 5x^3 + px^2 + qx - 2 = 0$$

La distancia AB, siendo los puntos A y B los afijos de los complejos plejos

$$(q - 19) + i, y, 3 + (p + 20) i$$

328. Calcular las raíces comunes a las dos ecuaciones:

$x^6 + x^4 + 9x^3 - x - 10 = 0$; y, $x^5 + 2x^3 + 10x^2 + x + 10 = 0$.

329. Determinar α y β de modo que las dos ecuaciones siguientes admitan las mismas raices

$$(2\alpha + 1) x^2 - (3\alpha - 1) x + 2 = 0$$
$$(\beta + 2) x - (2\beta - 1) x - 1 = 0$$

330. Hallar a y b en la ecuación

$$x^3 + ax^2 + bx + 15 = 0$$

para que tengan por raíces 3 y 5,
Hallar la otra raíz.

330ᵃ Dada la ecuación:

$$(a^2 + 1)^2 x^2 + (a^2 + 1)(a^2 - 2a - 1) x - 2(a^2 - 1) a = 0,$$

se pide:

1.° Comprobar que admite la raíz

$$x_1 = \frac{2a}{1 + a^2}$$

2.° Valor de la otra raíz x_2.

3.° Valor de $x_1^2 + x_2^2$

330ᵇ Si $f(x)$ es un polinomio y la ecuación $f(x) = 0$ tiene como raíz un número complejo, también el conjugado de éste es raíz de la ecuación. Sabiendo esto, resolver la ecuación:

$$14x^4 - 39x^3 + 66x^2 + 1209x - 350 = 0,$$

una de cuyas raíces es $3 + 4i$.

330ᶜ Dada la ecuación.

$$x^6 + 7x^3 - 8 = 0.$$

se pide:

a) Hallar sus seis raíces.

b) Representar gráficamente los dos triángulos cuyos vértices (de cada uno) son los afijos de igual módulo de las raíces de la ecuación dada.

c) Calcular el área de uno de esos triángulos.

330^d Dado el polinomio:

(1) $$x^4 + 4x^3 - x^2 - 10x + 6,$$

se sustituye en él x por $z + h$.

a) Determinar h en

(2) $y = (z + h)^4 + 4(z + h)^3 - (z + h)^2 - 10(z + h) + 6,$

de modo que se obtenga un polinomio en z sin término de tercer grado.

b) Empleando el resultado de a), resolver la ecuación que se obtiene anulando el polinomio (1).

c) Representar gráficamente la curva (2) para el valor de h obtenido en a). Se supone -2 $\quad$ 2).

330^e Dada la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0,$$

se pide:

a) Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes hallar una solución de la ecuación dada sin desarrollar el determinante del primer miembro.

b) Hallar las restantes soluciones de dicha ecuación.

c) Si x_1 y x_2 son dos raíces distintas de la ecuación dada hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, $(1, 3)$).

330^f Tres hombres A, B, C y sus tres esposas D, E, F (enunciadas en cualquier orden) van al mercado y compran un cierto número de objetos. Cada persona paga por cada objeto un número de pesetas igual al número de objetos que compra. Cada hombre gasta 63 pesetas más que su esposa. A, compra 23 objetos más que D y B compra 11 objetos más que E. ¿Quién es la esposa de cada uno de los hombres A, B, C?

330^g Dado el triángulo ABC cuyos lados miden: AB = 13, CA = 14, CB = 15, se toman como ejes de coordenadas: la recta CA como eje *yy*, y la mediatriz del segmento CA como eje *xx*.

Se pide:

a) Calcular las coordenadas de B (Abscisa de B positiva).

b) Hallar un polinomio cuyas raíces tengan por afijos los puntos A, B, C, D, siendo D un punto tal que la figura ACBD sea un trapecio isósceles. (Tómese como eje real el *xx* y como eje imaginario el *yy*).

330^h Un estudiante observó durante los *d* días de sus vacaciones que:

a) Llovió siete veces, por la mañana o por la tarde.
b) Llovió una sola vez cada mañana o tarde lluviosa.
c) Si llovió por la tarde no llovió por la mañana de aquél día.
d) Hubo cinco tardes claras y seis mañanas claras.

Se pide:

1.° Averiguar el número de días de vacación.
2.° Descomponer en factores lineales el polinomio:

$$P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$$

y determinar los valores de x para los cuales es $P(x) < 0$.

330^{i} *a*) Hallar las soluciones enteras de la ecuación:

$$(x - y)^2 - 5x = x - y + 5$$

b) Calcular las raíces de la ecuación:

$$x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 12 = 0$$

sabiendo que $1 - i$, y por tanto su conjugada, son raíces de esta ecuación.

330^{j} Calcular los ángulos de un pentágono convexo sabiendo que sus valores expresados en grados están en progresión aritmética y que su producto vale 12.697.896.960.

330^{k} Dado el polinomio $x^4 - x^3 + x^2 + ax + b$,
a) Determinar a y b de modo que se anule para $x = 1$ y para $x = -2$.
b) Sustituyendo a y b por los valores obtenidos, resolver la ecuación que resulta de igualar a cero dicho polinomio.
c) Calcular el producto de todas las raíces obtenidas y la suma de los productos que pueden formarse con dichas raíces, tomadas tres a tres.

330^{l} Encontrar cuatro números conociendo su suma, *a*; su producto *b*; la suma de los inversos de los dos primeros, *c* y la suma de los inversos de los dos últimos, *d*. Discusión.

330^{m} Resover las ecuaciones

$$x^3 - 7x - 6 = 0, \quad x^3 - 3x + 2 = 0$$

sabiendo que tienen una raíz común.

330^{n} *a*) Hallar los valores de m para los cuales se hace positivo el trinomio:

$$(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6,$$

cualquiera que sea el valor de x.

LUGARES GEOMETRICOS

331. Se dan dos círculos O y O′ situados en un mismo plano, cuyos radios miden, respectivamente, 15 cm y 20 cm. Hallar:

a) El lugar geométrico del centro de un círculo variable que corte dimetralmente a los dos círculos dados.

b) El círculo que corte diametralmente a los dados y a uno de los del lugar.

332. Se da una circunferencia de centro O, y en ella el diámetro AB. Se traza por B una recta, que corta a la circunferencia en M. Sobre dicha recta se toma el segmento $MC = MB$. Las rectas OC y AM se cortan en P. Lugar geométrico del punto P cuando la recta BM gira alrededor de B.
Construir la figura hon ·tica del lugar geométrico hallado, en la homotecia que tiene por centro A y razón $-\frac{3}{2}$

333. Obtener las coordenadas de los puntos M y N de la cuaterna armónica (ABMN) siendo A (5, — 1) B (— 1,2) y AM: MB = 2. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón de distancias a los puntos A y B es igual a 2 y determinar la relación que tiene ese lugar con los puntos M y N.

334. En un plano se tiene un triángulo ABM; sus vértices A y B son fijos, pero su vértice M se mueve sobre una circunferencia situada en dicho plano.
a) Considerando una particular homotecia de ese centro O (punto medio del segmento AB), encontrar el lugar geométrico del punto G, baricentro del triángulo variable ABM.
b) Lugar geométrico del punto G′, tal que la figura AGBG′ sea un paralelogramo.

335. Se da un segmento AB, y sean α y λ los planos perpendiculares a AB en A y B respectivamente. Un punto M del plano α y un punto N del plano λ son tales que el ángulo AMN sea constantemente un ángulo recto. Se pide:

a) Suponiendo fijo el punto M y variable N, demostrar que el lugar geométrico de las posiciones del punto N es una recta, y calcular, en función de la distancia AM $= \alpha$, la distancia de B a esta recta.

b) Suponiendo fijo el punto N, demostrar que el lugar de M es una circunferencia. Determinar la posición del centro de esa circunferencia y calcular, en función de la distancia BN = b, su radio r.

336. Sea un triángulo ABC rectángulo en A. Una perpendicular a BC

encuentra a la recta AB en D y a la recta AC en E.

a) Hallar el lugar geométrico del punto de intersección de CD y BE.

b) Construir las figuras inversas del lugar geométrico hallado respecto de polo A y potencias $\overline{AB}^2$ y $\overline{AC}^2$.

337. Dada una circunferenia de radio R, se consideran dos cuerdas una AB = R fija, y la otra AC variable. Sobre estas dos cuerdas como lados se construye el paralelogramo ABCD. Se pide:

a) Lugar geométrico del punto medio M de AC.

b) Lugar del centro O del paralelogramo.

c) Lugar del vértice D.

338. Se da una circunferencia de centro O; un diámetro fijo de la misma, AB, y la tangente r en B a esta curva. Si N es un punto dado sobre la circunferencia, se pide:

Construir la circunferencia tangente a la dada en el punto N y a la recta r.

Probar que la recta NP, siendo P el punto de contacto de r con la circunferencia pedida en el apartado anterior, pasa por un punto fijo cuando N recorre la circunferencia.

338ª Sean tres puntos fijos alineados A, C, B, dispuestos en este orden. Se toma AC = a, BC = b. Se supone $a \neq b$.

Sea M un punto cualquiera del espacio. Las paralelas trazadas por C a MA y MB cortan a MB y MA respectivamente en K y L.

a) ¿Cuál es el conjunto de los puntos M para los cuales se tiene KL = MC?

b) ¿Cuál es el conjunto de los puntos M para los cuales KL y MC son perpendiculares?

338ᵇ Los puntos A(—2, o) y B(2, o) son vértices de un triángulo ABC cuyo vértice C recorre la circunferencia de ecuación:

$$x^2 + y^2 - 6y = 0$$

Hallar la ecuación del lugar geométrico del baricentro del triángulo ABC al variar C sobre la circunferencia dada.

338ᶜ Para cada punto P del plano se considera el paralelogramo POAP', siendo O el origen de coordenadas y A el punto A(1, o).

1.° ¿Qué transformación geométrica es la que hace corresponder a cada punto P el punto P' así determinado?

2.° ¿Qué transformación geométrica es la que hace corresponder a cada punto P el de intersección Q de las diagonales del paralelogramo anterior?

3.° Suponiendo que P recorre la recta de ecuación x = 2, hallar el lugar geométrico de P' y el lugar geométrico de Q.

338ᵈ Se consideran los puntos fijos *A* (0, 2) y *B* (0, —2) y un punto variable C tal que el área del triángulo ABC es constantemente igual a 6 en todas las posiciones del punto C. Hallar el lugar geométrico del baricentro del triángulo ABC al variar C con la condición anterior.

338[e] De un cuadrilátero ABCD se conocen los vértices A, B y C, la longitud d del lado CD se sabe que AC es una diagonal Se pide:

a) Hallar el lugar geométrico de los vértices D de todos los cuadriláteros que verifican las condiciones dadas.

b) Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las diagonales BD en dichos cuadriláteros.

c) Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos cuyos extremos son los puntos de las diagonales AC y BD de dichos cuadriláteros.

338[f] Un segmento rectilíneo AB, de longitud constante c, se mueve en un plano de modo que sus extremos, A y B, se apoyan constantemente en los ejes XX′ e YY′, respectivamente, siendo estos ejes ortogonales entre sí.

Se pide:

a) Lugar geométrico del punto M de intersección de las paralelas a los ejes trazadas por A y B.

b) Comprobar que el pie, P, de la perpendicular trazada por M a la recta AB, tiene sus coordenadas (x, y) y proporcionales a a^3 y b^3, respectivamente, siendo (a, 0) las coordenadas de A, y (0, b) las de B.

338[g] Dados dos puntos fijos y distintos, A y B de un plano, se define la siguiente correspondencia, T: Dado un punto M del plano, el homólogo M′ = T (M) en el punto de intersección de la perpendicular a la recta MB en B. Se pide:

a) ¿Existen posiciones particulares de M para las cuales no esté unívocamente determinado el punto M. ¿Cuáles son?

b) Hallar la posición límite del punto M′, homólogo del M, cuando M tiende hacia A moviéndose sobre una recta que pasa por A.

c) Hallar el lugar geométrico del punto M′ = T (M) cuando M describe una circunferencia que pasa por A y B.

338[h] Un segmento BC, de longitud igual a 30 centímetros, se mueve apoyando sus extremos sobre los lados de un ángulo recto BAC. ¿Qué línea describe el punto medio del segmento BC?

338[i] Los sucesivos vértices de un cuadrilátero convexo son A, B, C, D, y O es la intersección de los lados AB y CD.

a) Si AB se conserva fijo, pero CD gira alrededor de O permaneciendo invariables las longitudes OD y DC (por tanto OC), deducir el lugar geométrico del punto P, intersección de los lados AD y BC, indicando las características del lugar pedido.

b) En el caso de ser ese cuadrilátero rectángulo en D y C, y los lados AB, AD y CD medir 10 cm., 9 cm. y 6 cm., respectivamente, hallar la figura homotética de ese cuadrilátero tomando como centro de homotecia el punto O y como razón 2/3, determinando además el área de la nueva figura.

338[j] Se da la recta *d* de ecuación x = 2. Dado un punto cualquiera M del plano, se traza la recta OM, que corta a *r* en el punto A, la recta MB, perpendicular a *r*, a la que corta en B, y la recta AC, paralela a MB, siendo C el punto en que corta a OB. Se pide:
a) Coordenadas del punto C en función de las coordenadas de M.
b) Comprobar que la recta MC pasa por un punto fijo cualquiera que sea la posición de M, y hallar ese punto fijo.

338[k] En una circunferencia dada se tienen los puntos fijos A y B tales que el arco AB sea de 90°. En el otro arco AB de graduación igual a 270° se mueve un punto M recorriéndolo totalmente. Se pide:
a) Lugar geométrico del baricentro G del triángulo móvil AMB.
b) Lugar geométrico del ortocentro H del triángulo AMB.

338[l] Dadas una circunferencia *c*, un diámetro fijo AB de la misma y la tangente *r* a esta curva en el punto B. Se pide:
a) Construir la circunferencia tangente a la recta *r* y a la circunferencia dada en uno de sus puntos M. Lugar de los centros de estas circunferencias cuando M describe la circunferencai *c*.
b) Si M y P son los puntos de contacto de una de estas circunferencias con *c* y *r*, respectivamente, y T el punto en que corta a *r* la tangente a *c* en M; encontrar la razón de la homotecia de centro B, y en la cual son puntos homólogos P y T.

INTEGRALES

339. Calcular el valor de $\int_{-1}^{1} a\,(x + b)^n\,dx$, siendo:

a = número de ordenaciones sin repetición que pueden hacerse con las letras de la palabra LUISA, con la condición de que no haya dos consonantes seguidas;

b = solución de la ecuación siguiente: $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 6 & 3 & 2 \\ x & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0;$

n = término independiente del polinomio $x^4 - x^2 + 3x + n$, que se sabe es divisible por el binomio $x + 1$.

339[a] Se tiene la equivalencia: $\cos^3 x \equiv A \cos x + B \cos 3x$. Se pide:
1.° Encontrar los valores de A y de B.
2.° Obtener utilizando el resultado anterior, el valor de

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \, d x$$

339[b] La ecuación $y^2 - 4y - 4x = 0$ representa una parabola.

a) Hallar su ecuación reducida mediante una traslación de ejes.

b) Hallar las coordenadas de su vértice, respecto a los primeros ejes.

c) Hallar el área del recinto comprendido entre la parábola dada y la que resulta de girarla 90° alrededor de su vértice.

339[c] Dada la equivalencia:

$$\frac{2x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} \equiv \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

se pide:

1.° Calcular A, B y C.

Obtener:

$$\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx,$$

utilizando la descomposición anterior.

339[d] Se tiene la equivalencia:

$$\operatorname{sen}^4 x \equiv A \cos 4x + B \cos 2x + C$$

y se pide:

1.° Dar a x tres valores convenientes para obtener tres ecuaciones en las incógnitas A, B y C, que se resolverán.

2.° Calcular

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^4 x \, . \, d x$$

utilizando aquella equivalencia.

339[e] Se tiene la identidad:

$$\frac{x^2 + 1}{x(x + 1)} \equiv A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x + 1}$$

y se pide:

1.° Calcular A, B y C.

2.° Utilizando el resultado anterior, calcular:

$$\int_{1}^{3} \frac{x^2 + 1}{x(x + 1)} dx$$

339^f Dada la equivalencia: vol

$$\frac{x-1}{x^4+x^2} = \frac{A}{x^2} + \cancel{\frac{B}{x}} + \frac{Cx}{x^2+1} + \frac{D}{x^2+1}$$

se pide:

a) Calcular A, B, C y D.

b) Utilizando el resultado anterior, calcular:

$$\int_1^2 \frac{x-1}{x^4+x^2}\,dx$$

339^g Se sabe que:

$$\text{sen}^2 x = A + B \cos 2x$$

Se pide:

a) Derivar esta igualdad, simplificarla y calcular B en la igualdad que resulta.

b) Conocido B calcular A en la igualdad dada (para ello sustitúyase x por algún valor conveniente).

c) Sustituyendo en la igualdad dada A y B por los valores hallados, calcular

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 x\,dx$$

339^h Se tiene la identidad:

$$\frac{x+1}{x(x+2)} = \frac{M}{x} + \frac{N}{x+2}$$

y se pide:

a) Calcular los valores de las constantes *M* y *N*.

b) Obtener la función primitiva de $\dfrac{x+1}{x(x+2)}$ que se anula para $x = 1$.

339^i Dada la equivalencia:

$$\frac{x+1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

a) Obtener A, B y C.

b) Calcular $\displaystyle\int_2^3 \frac{(x+1)\,dx}{x^3-x^2+x-1}$

339ʲ *a*) Dibujar el arco de curva

$$x = y^3 + 1$$

comprendiendo entre los puntos A y B, siendo — 1/2 la ordenada de A y 1/2 la de B.

b) Si C tiene por coordenadas (O, —1/2), la línea formada por el arco AB y el segmento AC engendra, al girar alrededor del eje *y*, una superficie que tiene forma de jofaina. Calcular los litros de capacidad de ésta si se han medido en decímetros las abscisas y ordenadas de los puntos dados.

339ᵏ Dada la parábola $y = 4x^2$ y su homóloga en el giro con centro en el origen de coordenadas y amplitud 90° calcular el área comprendida entre ambas.

339ˡ Hallar: *a*) El valor de la integral

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{2x}{x^2 + 3}\, dx.$$

b) Los valores de x que satisfacen a la ecuación

$$\begin{vmatrix} 15 & -17 & 23 \\ 35 & 40 & 65 \\ 7 & 8 & 13 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ x & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} x + m = 0$$

siendo m el valor de I anteriormente obtenido.

339ᵐ Se tiene la elipse.

$$2x^2 + 3y^2 = 20$$

Calcular los volúmenes de los cuerpos obtenidos girando esa elipse en torno a sus ejes de simetría.

GEOMETRIA ANALITICA

340. Dadas las rectas *r*, de ecuación $2x + y = 6$, y *s*, de ecuación $x + y = 6$, determinar la ecuación de una recta que pase por $O(0, 0)$ y corte a *r* y *s* en dos puntos *A* y *B* tales que $OA = 2\,AB$. Hallar también las coordenadas de dichos puntos.

341. Calcular las coordenadas del punto de la recta

$$r: \quad 3x - 5y = 5,$$

en el que incide un rayo luminoso que partiendo del punto A (1, 2) y reflejándose en la recta *r* pasa después de reflejado, por B (3, 4).

342. En un plano referido a un par de ejes cartesianos rectangulares se tienen los puntos A (— 7, 0,), B (7, 0) y el punto C. de ordenada positiva tal que AC = 15, BC = 13 y se pide:
a) Coordenadas cartesianas del punto C.
b) Ecuaciones de las rectas AC y BC.
c) Valores de tg A. tg B y tg C del triángulo ABC.
Comprobar que satisfacen a la relación:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$$

343. Se da la recta *r* de ecuación y = 1 y el punto A de coordenadas (1, 0). Por el origen O se traza una recta *s* que corta a *r* en el punto R y por ese punto se traza la recta *t* perpendicular a *s*. Llamamos P al punto de insección de la recta *t* con la paralela a *s* trazada por A.
a) Calcular el área del trapecio rectángulo ORPA en función de la pendiente de la recta *s*.
b) Comprobar que, cualquiera que sea la recta *s*, las coordenadas del punto P satisfacen la ecuación

$$y^3 - y^2 + x^2y - x^2 + 2x - xy - 1 = 0.$$

344. Dado el punto *A* (2, 1), hallar las coordenadas de los *B* y *C* de manera que *AOBC*, siendo *O* el origen de coordenadas sea un paralelogramo con $\widehat{AOC} = 60^\circ$ y $\overline{OC} = 2\,\overline{OA}$.

SEMEJANZA

345. En un plano se da un punto *O* y una recta *r*, que no pasa por *O*. Se toma en *r* un punto variable *A* y se construye el triángulo *OAA'* rectángulo en *A* e isósceles, tal que la rotación de *OA* hacia *OA'* se realice en sentido directo y de ángulo de giro igual a cuarenta y cinco grados. Hallar:
1.° El lugar de los puntos *A'*.
2.° El lugar del centro de gravedad *G* del triángulo *OAA'*

346. El cuadrado ABCD, siendo A (0, 0), B (— 5/2, 0), C (— 5/2, 5/2), D (0, 5/2), se transforma, mediante una semejanza directa de centro S (6, 0) en el polígono A'B'C'D', siendo A' $(0, 6\sqrt{3})$.
a) Dibujar A'B'C'D'
b) Determinar un giro y una homotecia cuyo producto, en el orden dado, sea la semejanza dada.
c) Calcular el ángulo de todos los giros y la razón de todas las homotecias cuyo producto es la semejanza dada.

ECUACIONES DIOFANTICAS

347. Un número natural cumple estas dos condiciones: 1.ª Al dividirlo

por 3, 4 y 5 los restos respectivos son 2, 3 y 4. 2.ª Es múltiplo de 7. Se pide:

a) Expresión general de todos los números que cumplen la primera condición. Hallar el menor de ellos.

b) Expresión general de todos los números que cumplen ambas, hallando de entre ellos el mayor formado por cinco cifras.

348. Se han adquirido libros de dos clases, los de una clase a 75 pesetas cada uno y los de la otra, a 127 ptas. abonando por el importe total 18.623 pesetas. ¿Cuántos libros de cada clase se han comprado?

349. Dada la ecuación:

(1) $$7x - 15y = 82$$

se pide:

a) Hallar las soluciones enteras y positivas de la ecuación anterior.

b) Calcular las coordenadas del punto simétrico del P (2, 3) en la simetría cuyo eje es la recta (1).

350. Dada la ecuación diofántica:

$$7x - 12y = 13$$

se pide:

a) Hallar todas sus soluciones pertenecientes al anillo de los números enteros.

b) En el plano cartesiano *x*, *y*, determinar todos los puntos cuyas coordenadas son las soluciones de la ecuación diofántica dada, que se hallan en el interior de la circunferencia de centro (10, 10) y tangente a los ejes de coordenadas.

351. Para abonar una factura de 403 ptas. se entregan dólares y dan la vuelta en francos. Calcular los dólares entregados y los francos que han devuelto (1 dólar = 60 ptas. y 1 franco = 11 ptas).

352. Descomponer la fracción

$$\frac{126}{299}$$

en suma de dos fracciones cuyos denominadores son 13 y 23.

353. La suma de las tres cifras de un número es 20; si de ese número se resta 205 y se divide la diferencia por 2 se obtiene por resultado el número formado por las cifras del primero escritas en orden inverso. Encontrar el número.

354. Resolver la ecuación:

$$11x + 15y = 878$$

a) **Sobre el anillo de los números enteros.**
b) **Sobre el semianillo de los números naturales.**

TRANSFORMACIONES EN EL ESPACIO

355. Uniendo convenientemente cuatro de los vértices de un cubo de área igual a 144 cm^2, se obtiene un tetraedro regular.
1.° ¿Cuántos planos de simetría del cubo son también planos de simetría del tetraedro?
2.° ¿Cuáles de los giros que transforman el cubo en sí mismo hacen igual en el tetraedro?
3.° Hallar la razón de los volúmenes de los dos poliedros.

356. *a*) Determinar el movimiento del espacio igual al producto de dos simetrías respecto de ejes secantes.
b) Aplicando el resultado de *a*), determinar el producto:

$$S_z \,.\, S_y \,.\, S_x$$

de tres simetrías respecto de tres ejes x, y, z aristas de un triángulo trirrectángulo.

357. Dados un punto O, una recta r que contiene a O y el plano p que pasa por O y es perpendicular a r, se designa:
por S_1 la simetría de centro O,
por S_2 la simetría de eje r,
por S_3 la simetría de plano p.
La transformación idéntica se representa por I.
Se pide:
a) Obtener los productos de dos de dichas simetrías, distintas o no.
b) Explicar por qué I S_1, S_2 y S_3 forman un grupo multiplicativo. Tabla del grupo.

ALGEBRA MODERNA

358. Se tiene el conjunto

$$C = \{ 1, -1, i - i \}$$

en el que i es la unidad imaginaria, y se introduce entre sus elementos la operación de multiplicar.
1.° Comprobar que se cumplen las condiciones para que C sea grupo multiplicativo.
2.° Formar la tabla de este grupo.
3.° Obtener algún subgrupo de él.

359. Dado el triedro trirrectángulo de aristas x, y, z, se consideran las simetrías S_x, S_y, S_z cuyos ejes son aquéllas aristas
a) Calcular $S_y \,.\, S_z$

b) Si I es la transformación idéntica, demostrar que el conjunto $\{I, S_x, S_y, S_z\}$ es un grupo respecto de la multiplicación de transformaciones.
c) Formar la tabla de multiplicar de dicho grupo.

METODO DE INDUCCION

360. a) Demostrar por inducción la fórmula:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

b) Calcular:

$$\lim \frac{1^3 + 2^3 + \dots\dots + n^3}{n^4}$$

c) Calcular las coordenadas de los centros de las dos homotecias que transforman la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$$

en la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1$$

361. c) Observando que:

$$1^2 = 1; \; 2^2 = 1 + 3; \; 3^2 = 1 + 3 + 5; \; 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7\dots,$$

demostrar que la ley observada es general.
b) Si consideramos los números impares agrupados en la siguiente forma:
$(1); \; (3 + 5); \; (7 + 9 + 11); \; (13 + 15 + 17 + 19)\dots,$
formado cada paréntesis por números impares consecutivos y comprendiendo cada uno tanto como unidades expresa el lugar que ocupa, se pide:
Obtener la suma de los términos del enésimo paréntesis y deducir de lo anterior la fórmula que da la suma de los cubos de los *n* primeros números.

CALENDARIO

362. Dada la identidad:

$$4x^4 + 4x^3 - 23x^2 - 12x + 36 \equiv (ax^2 + bx + c)^2$$

Se pide:
a) Calcular los coeficientes *a*, *b*, *c*.
b) Se considera el período comprendido entre los años 1601 y 2000, ambos inclusive, y se pide:
1.° ¿Cuántos años hay en dicho período que son bisiestos según el calendario juliano y que no lo son según el gregoriano?

TEMAS DE LA PRUEBA COMUN

LITERATURA ESPAÑOLA CONTEMPORANEA

1

Del salón en el ángulo oscuro,
De su dueño tal vez olvidada,
Silenciosa y cubierta de polvo
Veíase el arpa.

¡Cuánta nota dormía en sus cuerdas,
Como el pájaro duerme en las ramas,
Esperando la mano de nieve
Que sabe arrancarla!

¡Ay! pensé; ¡cuántas veces el genio
Así duerme en el fondo del alma,
Y una voz como Lázaro, espera
Que le diga: «¡Levántate y anda!»

GUSTAVO A. BÉCQUER: «*Rimas*».

CUESTIONES:

1.ª—Resumen del asunto tratado.
2.ª—Las figuras patéticas en este poema.—La construcción estrófica.
3.ª—Significación de Bécquer en la poesía española moderna.

2

RODRIGO: *¡Jamás podré conseguir*
arrancar de vuestra faz
ese sarcasmo tenaz!
¿Qué me tenéis que decir?
Acabemos, Espinosa:
esa burlona altivez,
que excita en mí alguna vez

una duda misteriosa,
¿qué significa? ¿Parece
que no os habéis convencido
de que juzgado habéis sido,
de que ya no os pertenece
vuestra acotada existencia,
y de que, según la ley,
no falta sino que el rey
confirme vuestra sentencia?

ZORRILLA: «*Traidor, inconfeso y mártir*».

CUESTIONES:

1.ª—¿Qué significa la palabra «sarcasmo»? ¿Cuál era la razón de la «burlona altivez» de Espinosa? ¿Cuál fue su pleito? ¿Quién era entonces rey de España? Historia y leyenda en esta obra de Zorrilla.
2.ª—Versificación: medida de los versos explicando las licencias poéticas que pueda haber en ellos. Estrofas que van formando. ¿Cuáles son los rasgos estilísticos que fácilmente se advierten en estos versos?
3.ª—Obra dramática de Zorrilla. Argumento y personajes principales de «Traidor, inconfeso y mártir». ¿Es ésta la obra más popular de Zorrilla? ¿Conoces alguna otra obra sobre el mismo tema?

3

Venid, yo no hollaré con mis cantares
del pueblo en que he nacido la creencia,
respetaré su ley y sus altares;
en su desgracia a par que su opulencia
celebraré su fuerza o sus azares,
y, fiel ministro de la gaya ciencia,
levantaré mi voz consoladora
sobre las ruinas en que España llora.
¡Tierra de amor! ¡Tesoro de memorias,
grande, opulenta y vencedora un día,
sembrada de recuerdos y de historias,
y hollada asaz por la fortuna impía!,
yo cantaré tus olvidadas glorias;
que en alas de la ardiente poesía
no aspiro a más laurel ni a más hazaña
que a una sonrisa de mi dulce España.

ZORRILLA: «*Introducción a los* Cantos del Trovador»

CUESTIONES:

1.ª—Resumen del tema tratado.
2.ª—La forma estrófica usada.—La adjetivación.—Las figuras patéticas.
3.ª—José Zorrilla dentro del romanticismo español.

4

AUTOR: *¡Cómo está ese hombre esta noche!... Cuando pienso que no quería que hiciese el papel de Conde, me daría de cabezadas contra la pared. Mas ya se ve; ¿quién había de imaginarse un comediante acostumbrado sólo a representar papeles de bufón?... De esta hecha se deja atrás a todos los actores del mundo. Si es mejor que vos.*

WALTON: *¿De veras?* (Procurando disimular su enojo).

AUTOR: *Mucho mejor.*

WALTON: *Y si tal es vuestra opinión, ¿os parece justo ni prudente decírmela a mí cara a cara?* (Cogiéndole de una mano con ira y trayéndole hacia el proscenio).

AUTOR: *Perdonad...* (Asustado) *Creí... La gloria de un compañero...*

WALTON: *¡Sois un mentecato!* (Soltándole con ademán despreciativo).

AUTOR: *¿Cómo es eso?... ¿Mentecato yo?...*

TAMAYO Y BAUS: «*Un drama nuevo*».

CUESTIONES:

1.ª—¿Qué papel desempeña Walton en la obra de Tamayo? ¿Cuál es el motivo de su indignación? ¿Cuáles son las razones de su odio por Yorick? ¿De qué «truco» o recurso escénico se vale Tamayo para que Walton dé fin a sus propósitos?

2.ª—¿Cómo denomina la técnica teatral a esas frases que van entre paréntesis y subrayadas o en cursiva? ¿Qué es el «proscenio»? ¿Qué era un bufón? ¿De dónde, según Shakespeare, había sido Yorick bufón? ¿Cuándo o en qué ocasión pronuncia Hamlet su conocida lamentación: «¡Pobre Yorick!»?

3.ª—*Un drama nuevo:* argumento, personajes principales y su significación en el teatro de Tamayo y en el teatro del siglo XIX.

5

SHAKESPEARE: *¡Señores, ya lo veis!* (Dirigiéndose al público y hablando como falto de aliento y muy conmovido.) *No puede terminarse el drama que se estaba representando. Yorick, ofuscada su razón por el entusiasmo, ha herido realmente al actor que hacía el papel de Manfredo. Ni es ésta la única desgracia que el cielo nos envía. También ha dejado de existir el famoso cómico Walton. Acaban de encontrarle en la calle con el pecho atravesado de una estocada. Tenía en la diestra un acero. Su enemigo ha debido matarle riñendo cara a cara con él. Rogad por los muertos. ¡Ay, rogad también por los matadores!*

TAMAYO Y BAUS: *Un drama nuevo.*

CUESTIONES:

1.ª—Explica el sentido de este parlamento en relación con el resto de la obra.
2.ª—Diferencia en una obra dramática escenas, cuadros y actos. ¿Por qué califica de drama Tamayo su obra y no de tragedia?
3.ª—El teatro de Tamayo y Baus.

6

SHAKESPEARE: *Hemos de convenir, sin embargo, en que la regla que has establecido no deja de tener excepciones.*

YORICK: *Ténelas, a no dudar; y mi mujer y Edmundo lo prueban. Bendito Dios, que me ha concedido la ventura de ver recompensadas en vida mis buenas acciones. Porque fue generoso y caritativo logré en Alicia una esposa angelical, y en Edmundo, un am go —¿qué amigo?—, un hijo, lleno de nobles cualidades. ¡Y qué talento el de uno y otra! ¡Cómo presentan los dos el Romeo y Julieta! Divinos son estos dos héroes, a quien dio ser tu fantasía, más divinos aun cuando Alicia y Edmundo les prestan humana forma y alma verdadera! ¡Qué ademanes, qué miradas, qué modo de expresar amor! Vamos, aquello es la misma verdad.*

SHAKESPEARE: *(¡Desdichado Yorick!) ¿Puedo ya retirarme?*

TAMAYO Y BAUS: «*Un drama nuevo*».

CUESTIONES:

1.ª—Comenta el texto brevemente, en relación con el contenido de la obra.
2.ª—¿Quién fue Yorick? ¿Recuerdas la obra y la escena en que Shakespeare nos habla de él? ¿Qué recuerdas de Romeo y Julieta? ¿A qué período del teatro de Shakespeare pertenece? ¿Dónde se inspiró?
3.ª—El teatro de Tamayo y Baus. Significación de «Un drama nuevo» dentro de la obra de Tamayo. Antecedentes del tema. ¿Qué obra del mismo Tamayo tiene cierta relación con él?

7

«Si bien luce algún ingenio todavía de cuando en cuando, nuestra literatura, sin embargo, no es más que un gran brasero apagado, entre cuyas cenizas brilla aún pálida y oscilante tal cual chispa rezagada. Nuestro Siglo de Oro ha pasado ya, y nuestro siglo XIX *no ha llegado todavía.*

En poesía estamos aún a la altura de los arroyuelos murmuradores, de la tórtola triste, de la palomita de Filis, de Batilo y Menalcas, de las delicias de la vida pastoril, del caramillo y del recental, de la leche y de la miel, y otras fontasmagorías por este estilo. En nuestra Poesía, a lo menos, no se hallará malicia: todo es pura inocencia. Ningún rumbo nuevo, ningún resorte no usado.»

LARRA: «*Artículos literarios*».

CUESTIONES:

1.ª—Significación histórica del texto anterior, escrito en 1832, en relación con los movimientos literarios anteriores y posteriores.
2.ª—Observaciones sobre el estilo del autor en este fragmento. Su ironía.
3.ª—Visión pesimista de España en Larra y otros escritores posteriores.
4.ª—Larra y otros costumbristas.

8

El autor del Panorama *ha puesto ante los ojos de nuestra sociedad un espejo donde puede tocarse y hacer desaparecer los lunares que la bondad de la luna debe presentar a su vista.*

Ayudándose de pequeñas tramas dramáticas, cortas invenciones verosímiles, ha sabido ofrecernos el resultado de su observación con singular tino y gracejo y exponer ante nuestra vista el estado de nuestras costumbres ....

....

El señor Mesonero ha estudiado y ha llegado a saber completamente nuestro país; imitador felicísimo de Jouy, hasta en su mesura, si menos erudito, más pensador y menos superficial, ha llevado a cabo, y continúa, una obra de difícil ejecución.

Un mérito más tiene, que no queremos pasar en silencio: es uno de nuestros pocos prosistas modernos; culto, decoroso, elegante, florido a veces, y casi siempre fluido en su estilo; castizo y puro en su lenguaje, y muy a menudo picante y jovial. En general tiene cierta tinta pálida, hija acaso de la sobra de meditación, o del temor de ofender, que hace su elogio, pero que priva a sus cuadros a veces de una animación también necesaria. Esta es la única tacha que podemos encontrarle; retrata más que pinta, defecto en verdad muy disculpable cuando se trata de retratar.

....

....

Escritores nosotros también de costumbres, ramo de literatura en que comenzamos a publicar nuestros humildes ensayos casi al mismo tiempo que El curioso Parlante, *si no pretendemos haber alcanzado igual grado de perfección, tenemos sí la persuasión de poder mejor que otros apreciar las dificultades del género y nos reconocemos con suficiente amor a la justicia, para hacer en sus aras el sacrificio de nuestras propias pretensiones. Los laureles ajenos pueden estimularnos, no inspirar un sentimiento innoble capaz de oscurecer a nuestros ojos el mérito de los que recorren nuestra misma carrera. ¿Cómo pudiera ser de otra suerte? El amor al bien y el deseo de contribuir en la poco que podemos a la mayor ilustración de nuestro país, nos mueve más a escribir que la sed de una gloria que tan difícil sabemos es de conseguir. En este supuesto, no vemos nunca en una obra feliz la gloria que su autor puede adquirir; nos consideramos con él resortes de una misma máquina; el honor que sobre él recae refluye sobre la clase entera; ni son tantos en España los que presentan títulos a la consideración general que puedan estorbarse. Hagamos justicia al talento y démosle el parabién por haber tenido una ocasión más, entre las pocas* *que se nos presentan, de dar descanso a la penca* (1) *satírica, que por lo regular manejamos con más dolor nuestro que de aquellos mismos a quienes nos vemos en la triste precisión de lastimar.*

LARRA: Fragmento de uno de sus artículos de crítica literaria.

CUESTIONES:

1.ª—Como puedes observar, en este texto Larra comenta con elogio el «*Panorama matritense*», de Mesonero Romanos, y alude después a sus propios *artículos de costumbres:* Ampliando los juicios de este fragmento con tus conocimientos de historia literaria, señala las diferencias de ambos escritores contemporáneos, al cultivar ese género, respecto a visión, intencionalidad y estilo.
2.ª—Semblanza de Larra: El hombre y el escritor.—Larra y nuestro pensar y sentir actuales.

9

«Ahora bien: si el romanticismo ha muerto y el clasicismo no ha resucitado, será que la literatura contemporánea encontró otros moldes, como suele decirse, que le vienen más cabales o más anchos. Tengo por difícil juzgar ahora estos moldes: indudablemente es temprano: no somos aún la posteridad, y quizá no acertaríamos a manifestarnos imparciales y sagaces. Sólo es lícito indicar que una tendencia general, la realista, se impone a las letras, aquí contrastada por lo que aún subsiste del espíritu romántico, allá acentuada por el naturalismo, que es su nota más aguda, pero en todas partes vigorosa y dominante ya, como lo prueba el examen de la producción literaria en Europa.»

E. PARDO BAZÁN: «*La cuestión palpitante*».

CUESTIONES:

1.ª—Resumen de las ideas expuestas en este fragmento.
2.ª—Observaciones sobre el estilo del texto reproducido.
3.ª—El realismo en la novela española de los siglos XIX y XX.
4.ª—Doña Emilia Pardo Bazán y su época.

10

«Al ver tanto desastre y el aspecto que ofrece Zaragoza, el ejército imperial, más que vencedor, se considera sepulturero de aquellos heroicos habitantes. Cincuenta y tres mil vidas le tocaron a la ciudad aragonesa en el contingente

(1) *penca* = tira de cuero con que el verdugo azotaba a los delincuentes.

de doscientos millones de criaturas con que la humanidad pagó las glorias militares del imperio francés.

Este sacrificio no será estéril, como sacrificio hecho en nombre de una idea. El imperio, cosa vana y de circunstancias, fundado en la movible fortuna, en la audacia, en el genio militar, que siempre es secundario cuando, abandonando el servicio de la idea, sólo existe en obsequio de sí propio; el imperio francés, digo, aquella tempestad que conturbó los primeros años del siglo y cuyos relámpagos, truenos y rayos aterraron tanto a la Europa, pasó porque las tempestades pasan, y lo normal en la vida histórica, como en la Naturaleza, es la calma. Todos le vimos pasar y presenciamos su agonía en 1815; después vimos su resurrección algunos años adelante; pero también pasó derribado el segundo como el primero en la propia soberbia...

Lo que no ha pasado ni pasará es la idea de nacionalidad que España defendía contra el derecho de conquista y la usurpación. Cuando otros pueblos sucumbían, ella mantiene su derecho, lo defiende, y, sacrificando su propia sangre y vida lo consagra, como consagraban los mártires en el circo la idea cristiana. El resultado es que España, despreciada injustamente en el Congreso de Viena, desacreditada con razón por sus continuas guerras civiles, sus malos gobiernos, su desorden, sus bancarrotas más o menos declaradas, sus inmorales partidos, sus extravagancias, sus toros y sus pronunciamientos, no ha visto nunca después de 1808, puesta en duda la continuación de su nacionalidad, y aun hoy mismo, cuando parece que hemos llegado al último grado de envilecimiento, con más motivos que Polonia para ser repartida, nadie se atreve a intentar la conquista de esta casa de locos.»

B. PÉREZ GALDÓS: «*Zaragoza*».

CUESTIONES:

1.ª—Concrétese en pocas líneas el sentido general del texto. Explíquense sus alusiones: *a)* ¿a qué resurrección del imperio francés se refiere?, *b)* ¿qué pueblos sucumbían cuando España mantenía su derecho?, *c)* Congreso de Viena y *d)* ¿por qué dice el autor lo del *último grado de envilecimiento*, a comienzos de 1874, en que fueron escritas estas líneas?

2.ª—Género literario a que pertenece este fragmento. Rasgos del estilo. Nótese la longitud del párrafo que comienza «El imperio...» y lleva un *digo* intercalado; ¿cómo calificaremos esta prosa? ¿Toda la obra estará escrita así?

3.ª—Importancia de Galdós en las letras españolas. Evolución de su creación literaria.

II

Canta tu estrofa, cálida cigarra,
y baile al son de tu cantar la mosca,
que ya la sierpe en el zarzal se enrosca
y lacia extiende su verdor la parra.

Desde la yedra que a la vid se agarra
y en su cortina espléndida te embosca,
recuerda el caño de la fuente tosca
y el fresco muro de la blanca jarra.

No consientan tus élitros fatiga,
canta del campo el productivo costo,
ebria de sol y del trabajo amiga.

Canta y excita el inflamado agosto
a dar el grado de la rubia espiga,
y el chorro turbio del ardiente mosto.

SALVADOR RUEDA: «*La Cigarra*».

CUESTIONES:

1.ª—Resumen del asunto.
2.ª—Las formas métricas usadas: la estrofa y la rima.—La adjetivación.
3.ª—Significación de Salvador Rueda en los orígenes del modernismo.

12

Hay unas cuantas ciudades que se han ido llevando en España la atención de los visitantes y curiosos, más por hermosas de aparencialidad y vistosas que por recogido encanto, y otras por la facilidad de su acceso. Granada, Sevilla, Burgos, Toledo... Otras sólo figuran en segundo término, y algunas de las más interesantes apenas si merecen mención.

....

....

En el aspecto íntimo del arte, para el que busca sensaciones profundas, para el que tiene el espíritu preparado a recibir la más honda revelación de la historia eterna, os digo que lo mejor de España es Castilla, y en Castilla pocas ciudades, si es que hay alguna, superior a Avila. Váyase a Sevilla, váyase a Valencia, el que quiera divertirse o distraerse el ánimo, el que quiera matar unos días viviendo con la sobrehaz del alma; pero el que quiera columbrar lo que pudo antaño haber sido vivir con el fondo del alma, éste, que vaya a Avila, que venga también a Salamanca.

Lo primero que echará de ver en Avila serán sus murallas, aquellas recias murallas, con sus grandes cubos, que la convierten en fortaleza y en convento, y que impidiéndole crecer y ensancharse por tierra, hacia los lados, parece como que la obligan a mirar al cielo. La catedral misma, aquella su hermosísima catedral, está adherida orgánicamente a la muralla; su ábside es uno de los cubos o torreones de ésta.

Leyendo el libro Las Moradas, *de Santa Teresa de Jesús, al punto se le ocurre pensar a quien haya estado en Avila que todo aquello de los castillos del alma no pudo ocurrírsele a la santa sino al encanto de la visión de su ciudad nativa.*

Nunca olvidaré la tarde, fue en noviembre pasado, en que desde uno de los torreones de las murallas de Avila contemplaba la catedral y la basílica de San Vicente, y cómo sentía entonces henchida mi alma de aliento de eternidad, de jugo permanente de la Historia. No quiero describiros aquéllo; las descripciones son casi siempre una de las mayores calamidades literarias, y el descripcionismo suele ser de ordinario señal clara de decadencia artística. Es, además, cosa de receta, que se aprende con facilidad.

Pero sí quiero trasladar aquí, porque no es descripción, lo que Larreta dice de Avila al final del primer capítulo de su novela: «El sol acababa de ocultarse, y blanda, lentamente, las parroquias tocaban las oraciones. Era un coro, un llanto continuo de campanas cantantes, de campanas gemebundas en el callado crepúsculo. Hubiérase dicho que la ciudad se hacía toda sonora, metálica, vibrante, y ascendía entera hacia los cielos, milagrosamente, en el vuelo de su plegaria.»

Y así es; esa ciudad de Avila, tan callada, tan silenciosa, tan recogida, parece una ciudad musical y sonora. En ella canta nuestra historia, pero nuestra historia eterna; en ella canta nuestra nunca satisfecha hambre de eternidad.

MIGUEL DE UNAMUNO: «*Por tierras de Portugal y España*».

CUESTIONES:

1.ª.—Estudio del texto: vocabulario, estilo, alusiones literarias (¿a qué novela de Larreta se refiere Unamuno?).—Ideas y sentimientos. (De estos últimos, podrías destacar la expresión de uno que llega a hacerse patético en otros escritos de Unamuno).

2.ª.—Exaltación de Castilla por los escritores del 98.

3.ª.—Unamuno en su obra poética y narrativa.—Breve referencia a otros géneros por él cultivados.

13

Un poeta que vivía junto al Mediterráneo ha plañido a Castilla porque no puede ver el mar. *Hace siglos, otro poeta—el autor del* Poema del Cid*—llevaba a la mujer y a las hijas de Rodrigo Díaz desde el corazón de Castilla a Valencia; allí, desde una torre, las hacía contemplar—seguramente por primera vez—el mar.*

Miran a Valençia como iaze la çibdad,
E del otra parte a oio han el mar.

No puede ver el mar la solitaria y melancólica Castilla. Está muy lejos el mar de estas campiñas llanas, rasas, yermas, polvorientas; de estos barrancales pedregosos; de estos terrazgos rojizos, en que los aluviones torrenciales han abierto hondas mellas; de estas quiebras aceradas y abruptas de las montañas; de estos mansos alcores y terrenos, desde donde se divisa un caminito que va en zigzag hasta un riachuelo. Las auras marinas no llegan hasta estos poblados pardos, de casuchas deleznables, que tienen un bosquecillo de chopos junto *al ejido. Desde la ventanita de este sobrado, en lo alto de la casa, no se ve la extensión azul y vigorosa: se columbra allá en una colina una ermita con los cipreses rígidos, negros, a los lados, que destacan sobre el cielo límpido. A esta olmeda, que se abre a la salida de la vieja ciudad, no llega el rumor rítmico y ronco del oleaje: llega en el silencio de la mañana, en la paz azul del mediodía, el cacareo metálico, largo, de un gallo, el golpear sobre el yunque de una herrería. Estos labriegos secos, de faces polvorientas, cetrinas, no contemplan el mar: ven la llamada de las mieses; miran, sin verla, la largura monótona de los surcos en los bancales. Estas viejecitas de luto, con sus manos pajizas, sarmentosas, no encienden, cuando llega el crepúsculo, una luz ante la imagen de una Virgen que vela por los que salen en las barcas; van por las callejas pinas y tortuosas a las novenas, miran al cielo en los días borrascosos y piden, juntando sus manos, no que se aplaquen las olas, sino que las nubes no despidan granizos asoladores.*

No puede ver el mar la vieja Castilla...

AZORÍN: «*Castilla*» (El mar)

CUESTIONES:

1.ª—Resume este fragmento, glosando el contenido emocional de esta evocación de la Castilla pobre y adormecida.
2.ª—Estudio lingüístico y estilístico del mismo: vocabulario, construcción, adjetivación, ritmo, asociaciones y contrastes descriptivos, etc.
3.ª—La personalidad de Azorín y su obra dentro del grupo de escritores del 98.

14

No son éstos los pueblecitos moriscos de Levante, todo recogidos, todo íntimos; son los poblados anchurosos, libres, espaciados, de la vieja gente castellana. Aquí cada imaginación parece que ha de marchar por su camino, independiente, opuesta a toda traba y ligamen; no hay un ambiente que una a todos los espíritus como en un haz invisible; las casas son bajas y largas; de trecho en trecho, un inconmensurable portalón de un patio rompe, de pronto, lo que pudiéramos llamar la solidaridad espiritual de las casas; allá, al final de una calle, la llanura se columbra inmensa, infinita, y encima de nosotros, a toda hora limpia, como atrayendo todos nuestros anhelos, se abre también inmensa, infinita, la bóveda radiante.

AZORÍN: «*La ruta de don Quijote*».

CUESTIONES:

1.ª—Resumen de lo expuesto en este fragmento.
2.ª—Observaciones sobre el estilo.
3.ª—Los pueblos en los escritores de la generación del 98.
4.ª—Azorín.

15

De los dos hijos de Constanza, el que está en Madrid pretendiendo un cargo para pasar a América, ha logrado su deseo. El marido de Constanza ha marchado a la Corte; un mes después, se pone también Constanza en camino para despedir a su hijo. Antes de llegar a Madrid ha querido Constanza pasar por Toledo para visitar el Mesón. El mesón del Sevillano *ha perdido ya su antiguo nombre; otras posadas de Toledo le disputan su antigua clientela. Todo está igual que antes; en el centro, el patio, empedrado de menudos, y blancos guijarros; una techumbre sostenida por viejas columnas sin plinto lo rodea; arriba, se abre la galería repechada por una barandilla de madera. Constanza ha penetrado en el patio; su primera impresión ha sido profundamente extraña; todo es más reducido y más mezquino de lo que ella veía con los ojos del espíritu. Nadie la conoce en la casa ni nadie la recuerda. Ninguna criada ni mozo alguno, de los que en su tiempo servían, permanecen en el mesón.*

AZORÍN: «*Castilla*».

CUESTIONES:

1.ª—¿A qué Constanza, a qué mesón y, en fin, a qué «novela» se refiere?
2.ª—El estilo de Azorín referido al párrafo objeto de este comentario.
3.ª—Azorín: su significación en nuestra literatura. Azorín y los clásicos.

16

Después se levantaron para irse, porque ya rayaba el alba. La campiña de Belén, verde y húmeda, sonreía en la paz de la mañana con el caserío de sus aldeas disperso, y los molinos lejanos desapareciendo bajo el emparrado de las puertas, y las montañas azules y la nieve en las cumbres. Bajo aquel sol amable que lucía sobre los montes iba por los caminos la gente de las aldeas. Un pastor guiaba sus carneros hacia las praderas de Gamalea; mujeres cantando volvían del pozo de Efraín con las ánforas llenas; un viejo cansado picaba la yunta de sus vacas, que se detenían mordisqueando en los vallados, y el humo blanco parecía salir de entre las higueras... Los esclavos negros hicieron arrodillar los camellos y cabalgaron los tres Reyes Magos. Ajenos a todo temor se tornaban a sus tierras, cuando fueron advertidos por el cántico lejano de una vieja y una niña que, sentadas a la puerta de un molino, estaban desgranando espigas de maíz. Y era éste el cantar remoto de las dos voces:

Camiñade, Santos Reyes
por camiños desviados,
que pol' os camiños reaes
Herodes mandou soldados.

RAMÓN DEL VALLE-INCLÁN: «*La adoración de los Reyes*».

CUESTIONES:

1.ª- Cuéntese en pocas líneas el asunto de este fragmento. La campiña de Belén, aquí descrita incluso con sus espigas de maíz, ¿coincide con el paisaje auténtico de Tierra Santa?
2.ª.—Género literario en el que encuadraremos el texto. Epítetos e imágenes que en él encontramos. Lengua del «cantar remoto» con el que termina.
3.ª.—Evolución estética de la obra de Valle-Inclán.

17

¿Por qué, decidme, hacia los altos llanos,
huye mi corazón de esta ribera,
y en tierra labradora y marinera
suspiro por los yermos castellanos?

Nadie elige su amor. Llevóme un día
mi destino a los grises calvijares
donde ahuyenta, al caer, la nieve fría
las sombras de los muertos encinares.

De aquel trozo de España, alto y roquero,
hoy traigo a ti, Guadalquivir florido,
una mata del áspero romero.

Mi corazón está donde ha nacido,
no a la vida, al amor, cerca del Duero...
¡El muro blanco y el ciprés erguido!...

ANTONIO MACHADO

CUESTIONES:

1.ª.—Explica el sentido de esta composición. (¿De qué se lamenta el poeta? ¿Por qué? ¿De qué trozo de España siente nostalgia? ¿Qué quiere decir el poeta en la última estrofa?, etc...).
2.ª.—Medida y rima de los versos. ¿Qué estrofas o composición van formando? ¿Por qué? Figuras poéticas.
3.ª.—La poesía de Antonio Machado.

18

Por esos campanarios
ya habrán ido llegando las cigüeñas.
Habrá trigales verdes,
y mulas pardas en las sementeras,
y labriegos que siembran los tardíos
con las lluvias de abril. Ya las abejas

libarán del tomillo y del romero.
¿Hay ciruelos en flor? ¿Quedan violetas?
Furtivos cazadores, los reclamos
de la perdiz bajo las capas luengas,
no faltarán. Palacio, buen amigo,
¿tienen ya ruiseñores las riberas?
Con los primeros lirios
y las primeras rosas de las huertas,
en una tarde azul, sube al Espino,
al alto Espino donde está su tierra...

ANTONIO MACHADO

CUESTIONES:

1.ª—Esta composición está fechada en Baeza, el 29 de abril de 1913. Pues bien, teniendo esto en cuenta, explica el sentido de esos versos en relación con la vida de Antonio Machado.
2.ª—Caracteres estilísticos de estos versos.
3.ª—La poesía de Antonio Machado.

19

Deshaced ese verso.
Quitadle los caireles de la rima,
el metro, la cadencia
y hasta la idea misma.
Aventad las palabras,
y si después queda algo todavía,
eso
será la poesía.

¿Qué
importa
que la estrella
esté remota
y deshecha
la rosa?
Aún tendremos el brillo y el aroma.

LEÓN FELIPE: De «*Versos y oraciones de caminante*».

CUESTIONES:

1.ª—Con referencia a la idea estética revelada por el autor en estos versos, interpreta el concepto que nos da de una poesía esencial.
2.ª—Aspectos más acusados, de sensibilidad y pensamiento, en la poesía de León Felipe.
3.ª—Evolución de la lírica hispana a partir de Juan Ramón Jiménez. Las figuras más representativas.

20

La fuente aleja su cantata,
despiertan todos los caminos...
¡Mar de la aurora, mar de plata;
qué limpio estás entre los pinos!
Viento del sur, ¿viene sonoro
de soles? Ciegan los caminos...
¡Mar de la siesta, mar de oro;
qué alegre estás sobre los pinos!
Dice el verdón no sé qué cosa...
Mi alma se va por los caminos...
¡Mar de la tarde, mar de rosa
qué dulce estás entre los pinos!

JUAN RAMÓN JIMÉNEZ: «*El mar lejano*».

CUESTIONES:

1.ª—Resumen sobre el tema y asunto tratado.
2.ª—La forma estrófica usada.—La adjetivación, el plenoasmo y las figuras patéticas construidas por el poeta.
3.ª—Significación de Juan Ramón Jiménez en el modernismo español.

21

TERESA: .... *En Roma sí.*
Pero esas casas de aquí,
¿quién las sacará adelante?
PADRE GRACIÁN: *¿Quién, Madre? Bajo sus manos*
de Santa prosperarán.
TERESA: *Mis manos las dejarán*
algún día. Y serán vanos
mis esfuerzos hasta aquí,
mis altares de ermitaña,
¡todos los pasos que di
por tantas sendas de España!
Los conventos que fundé
vendrán al suelo, por fin,
como unos que levanté
de juguete, en el jardín
de mis padres con mi hermano...
¡Toda mi obra ha de pasar,
si no la quiere tomar,
quien yo esperaba en su mano!

EDUARDO MARQUINA: «*Teresa de Jesús*».

CUESTIONES:

1.ª—Destaca y explica los rasgos biográficos que hay en el pasaje que comentamos.—¿Quién era el Padre Gracián? Explica el sentido de los tres últimos versos.
2.ª—A partir de dónde el Padre Gracián comienza a hablar, analiza los versos, explicando qué clases de versos son, qué figuras poéticas encuentras en ellos y qué estrofas van formando, si se ajustan a los modelos más conocidos o introducen alguna variante.
3.ª—El teatro poético en la primera mitad del siglo XX: significación de Eduardo Marquina dentro de ese teatro.

22

Cruzan el cielo nubecillas tenues
que parecen blanquísimas quedejas
cortadas del vellón inmaculado
que dieron en Abril las corderuelas.
El sol bañó el terruño,
se ve crecer la hierba
y huele a tierra húmeda
cargada de promesas.
¡Qué dulce es presidir desde el repecho
la propia sementera
si el cielo es transparente, fresco el aire,
húmeda y fértil la esponjada tierra,
el sol templado, la simiente sana,
robustas las parejas,
alegres los gañanes,
la tonada de arar sentida y lenta,
sabroso el pan de casa
y el agua del regato limpia y fresca!

GABRIEL Y GALÁN: «*Las sementeras*».

CUESTIONES:

1.ª—Resumen del asunto tratado.
2.ª—Formas métricas en este poema.—Formas de evolución rural en el vocabulario.—La adjetivación.
3.ª—La aportación literaria de Gabriel y Galán en la poesía española.

23

BALADILLA DE LOS TRES RIOS

El río Guadalquivir
va entre naranjos y olivos.
Los dos ríos de Granada
bajan de la nieve al trigo.

¡Ay, amor
que se fue y no vino!

El río Guadalquivir
tiene las barbas granate.
Los dos ríos de Granada
uno llanto y otro sangre.

¡Ay, amor
que se fue por el aire!

Para los barcos de vela
Sevilla tiene un camino.
Por el agua de Granada
sólo reman los suspiros.

¡Ay, amor
que se fue y no vino!

F. García Lorca

Cuestiones:

1.ª—Aclara, debidamente, el sentido de todos estos versos.
2.ª—Medida de los versos, rima y composición que van formando. ¿Qué nombre reciben los versos subrayados? Figuras poéticas que hay en ellos.
3.ª—Dentro de la poesía de García Lorca, ¿a qué tendencia pertenece la composición que analizamos? ¿Sabes a cuál de sus libros corresponde? La obra dramática de García Lorca.

24

Cancioncilla sevillana

Amanecía
en el naranjel.
Abejitas de oro
buscaban la miel.

¿Dónde estará
la miel?

Está en la flor azul,
Isabel.
En la flor,
del romero aquel.

(Sillita de oro
para el moro.
Sillita de oropel
para su mujer).

Amanecía
en el naranjel.

F GARCÍA LORCA

CUESTIONES:

1.ª—Señala las rimas, explicando la clase de rima y los versos que van rimando. Mide los versos 1.º, 6.º y 8.º explicando las particularidades que puedan ofrecer.
2.ª—Analiza estilísticamente esta composición, expresando sus claros antecedentes.
3.ª—La poesía y el teatro de Federico García Lorca.
4.ª—Esta composición está dedicada a Solita Salinas, hermana de un poeta amigo y compañero de grupo de Lorca. ¿Quién era ese poeta? Cita alguno de sus libros.

25

Córdoba.
Lejana y sola.

Jaca negra, luna grande,
y aceitunas en mi alforja.
Aunque sepa los caminos
yo nunca llegaré a Córdoba.

Por el llanto, por el viento,
jaca negra, luna roja,
la muerte me está mirando
desde las torres de Córdoba.

¡Ay qué camino tan largo!
¡Ay mi jaca valerosa!
¡Ay que la muerte me espera,
antes de llegar a Córdoba!

Córdoba.
Lejana y sola.

F. GARCÍA LORCA: «*Canciones*».

CUESTIONES:

1.ª—Glosa o interpreta la tensión dramática y el fatalismo andaluz que motivan el tema de esta composición.
2.ª—Aparte el estribillo, explica el metro y rima de los versos.—Aspectos gramaticales y estilísticos de este poema lorquiano.
3.ª—García Lorca como lírico y autor dramático.—Breve referencia a otros poetas de su promoción o grupo.

26

GIRALDA

GIRALDA *en prisma puro de Sevilla,*
nivelada del plomo y de la estrella,
molde en engaste azul, torre sin mella,
palma de arquitectura sin semilla.
Si su espejo la brisa enfrente brilla,
no te contemples—¡ay, Narcisa!—en ella,
que no se mude esa tu piel doncella,
toda naranja al sol que se te humilla.
Al contraluz de luna limonera,
tu arista es el bisel, hoja barbera
que su más bella vertical depura.
Resbala el tacto su caricia vana.
Yo mudéjar te quiero y no cristiana.
Volumen nada más: base y altura.

GERARDO DIEGO

CUESTIONES:

1.ª—Explica el significado de este poema, muy especialmente el de la estrofa segunda y el del verso penúltimo.
2.ª—Medida de los versos, estrofas y composición que van formando y figuras poéticas usadas en esta composición.
3.ª—Gerardo Diego: su peculiar significación dentro de su grupo poético.

27

REFLEJOS

En este río lácteo
los navíos no sueñan sobre el álveo.

Como un guante famélico
el día se me escapa de los dedos.

Me voy quedando exhausto
pero en mi torso canta el mármol.

Una rueda lejana
me esconde y me suaviza
las antiguas palabras.

Cae el líquido fértil de mi estatua
y los navíos cabecean
amarrados al alba.

GERARDO DIEGO

CUESTIONES:

1.ª—Explica el significado de las palabras «lácteo», «álveo», «famélico» y «exhausto».
2.ª—Señala y explica las metáforas, las rimas y los versos que van rimando.
3.ª—Al filo de esta composición, habla de los movimientos poéticos que pudieron tentar a estos poetas del grupo de 1927 y explica la posición de Gerardo Diego respecto a ellos.

28

Para vivir no quiero
islas, palacios, torres.
¡Qué alegría más alta:
vivir en los pronombres!
Quítate ya los trajes,
las señas, los retratos;
yo no te quiero así,
disfrazada de otra,
hija siempre de algo.
Te quiero pura, libre,
irreductible: tú.
Sé que cuando te llame
entre todas las gentes del mundo,
sólo serás tú.
Y cuando me preguntes
quién es el que te llama,
el que te quiere suya,
enterraré los nombres,
los rótulos, la historia.
Iré rompiendo todo
lo que encima me echaron
desde antes de nacer.

Y vuelto ya al anónimo
eterno del desnudo,
de la piedra del mundo,
te diré:
«Yo te quiero, soy yo».

PEDRO SALINAS: «*La voz a ti debida*».

CUESTIONES:

1.ª—Explica la significación de estos versos. ¿Qué quiere decir en ellos el poeta? La clave del poema está en los versos 3.° y 4.°: explícala.
2.ª—De las tendencias que pueden advertirse en la poesía del grupo poético de 1927, ¿en cuál situaríamos la poesía que comentamos? ¿Por qué?
3.ª—Pedro Salinas: su significación en el grupo de 1927.

29

CON EL

Si Garcilaso volviera
yo sería su escudero;
que buen caballero era.

Mi traje de marinero
se trocaría en guerrera,
ante el brillar de su acero;
que buen caballero era.

¡Qué dulce oírle, guerrero,
al borde de su estribera!
En la mano mi sombrero;
que buen caballero era.

RAFAEL ALBERTI

CUESTIONES:

1.ª—¿Quién fue Garcilaso? ¿Qué otros poetas clásicos influyeron especialmente en la poesía de este grupo de 1927?
2.ª—Analiza estilísticamente esta composición (versos, rimas, estrofas, figuras poéticas, tropos, etc...)
3.ª—Los distintos momentos de la producción poética de Alberti. Obras más importantes.

30

EJEMPLOS

La veleta, la cigarra.
Pero el molino, la hormiga.
Muele pan, molino, muele.
Trenza, veleta, poesía.

Lo que Marta laboraba,
se lo soñaba María.
Dios, no es verdad, Dios no supo
cuál de las dos prefería.
Porque El era sólo el viento
que mueve y pasa y no mira.

DÁMASO ALONSO

CUESTIONES:

1.ª—Explica el sentido de esta poesía, aclarando sus alusiones.
2.ª—Medida de los versos y composición o estrofas que van formando. (Debes justificar tus respuestas, explicando las licencias métricas, las rimas y los versos que van rimando).
3.ª—La poesía de Dámaso Alonso (grupo literario a que pertenece y libros más significativos; caracteres especiales de su poesía...)
4.ª—¿Conoces alguna otra actividad literaria de Dámaso Alonso? Cita lo más destacado de esa otra actividad.

31

«¡Los golfos!... ¿No sentís dolor, inquietud, remordimiento, ante estas míseras criaturas hambrientas, ante esta simiente de criminalidad que puede fructificar en el abandono?

Ya sé que sois caritativos, señoras y señores, pero, perdonadme, vuestra caridad no está bien ejercida o es insuficiente mientras haya criaturas que en las noches de invierno duerman en los quicios de las puertas o en las oquedades de los desmontes.

Las plazas de los asilos que sostenéis son para los hijos o los sobrinos de las cocineras, de las planchadoras, de los servidores y paniaguados; en fin: de esos mil funcionarios que forman la trama burocrática que rodea a la beneficencia oficial. A los verdaderos desvalidos no les alcanza nada.

Yo pido para ellos, para esos golfos paludos, roñosos, grotescos, famélicos, abandonados, sin hogar, sin parientes, sin nadie... Para esos míseros chiquillos que a la salida de los teatros y de los bailes carretean alrededor de vuestros carruajes entre la niebla de las noches crudilísimas de invierno, voceando para avisar a chóferes y cocheros, vuestros nombres gloriosos, llenos de prestigio, de poder, de opulencia...»

CARLOS ARNICHES: «*La pareja científica*».

CUESTIONES:

1.ª—Resume en pocas palabras el sentido de estos párrafos de Arniches. En ese discurso del autor que viene a constituir el cuadro segundo de «La pareja científica», se condensa la lección que trató de dar en el cuadro primero, que es, en realidad, el único dramático: explica ahora tú, cuál es la trama dramática de este cuadro primero, quiénes sus personajes y cómo se desarrolla la acción. (Preguntamos todo esto porque es de las obras señaladas como lecturas en los cuestionarios del Curso Preuniversitario).

2.ª.—En esos párrafos de Arniches y, claro es, mucho más aún en el conjunto de esta pequeña pieza teatral se traza un cuadro social de la época. Descríbelo brevemente y relaciona aquella «injusticia social» denunciada por el escritor con nuestra vida actual, exponiendo sus semejanzas y diferencias. ¿Qué opina Arniches sobre la delincuencia? ¿Quién expone sus ideas en «La pareja científica», en el cuadro primero?

3.ª.—El sainete: saineteros más importantes. Los sainetes de Carlos Arniches.

32

REQUENA: (A Mínguez.) *¿Estás viendo cómo no hay tal creminalidad nativa, so buche?*

MÍNGUEZ: *Entonces, ¿por qué roba este golfo, por qué es reicidente, vamos a ver?*

REQUENA: *Pues porque el que no puede ganarlo, o no le han enseñao a que se lo gane, cuando tiene gazuza, y ve un panecillo tira con él..., tenga las narices como las tenga.*

MÍNGUEZ: *De forma que la cencia de mi sobrino...*

REQUENA: *Lombarda cocida.*

MÍNGUEZ: *¿Entonces tú crees que el Tratao...?*

REQUENA: *Cuando se tiene hambre, el tratao... debe ser el panadero, querido Mínguez. Too lo demás, pamplinas.*

PEQUE: (Balanceándose nerviosamente y castañeteando los dientes). *¿Quién ustés que andemos?*

REQUENA: *¿Qué te pasa?*

PEQUE: *Que no me tengo de frío, guardias. ¡Estoy helao!*

REQUENA: *¡Pobre criatura!... ¡Maldita sea!* (En aquel momento, de una calle próxima sale un grupo de gente bullanguera haciendo sonar zambombas, latas y almireces. La voz fuerte y desgarrada de una moza entona un villancico en el silencio de la calle desierta:

Los pastores en Belén
todos juntos van por leña,
para calentar al Niño
que nació la Nochebuena...).

CARLOS ARNICHES: «*La pareja científica*».

CUESTIONES:

1.ª.—¿Qué es lo que se debate? ¿Cuáles son las conclusiones?

2.ª.—¿Cómo está planteado el problema? ¿De qué recursos se vale el escritor?—El lenguaje de Arniches.

3.ª.—El sainete.—El sainete de Arniches: caracteres, y obras más significativas.

33

CRISPÍN: .... *¿Qué os dije, señor? Que entre todos habían de salvarnos... Creedlo. Para salir adelante con todo, mejor que crear afectos es crear intereses.*

LEANDRO: *Te engañas, que sin el amor de Silvia nunca me hubiera salvado.*

CRISPÍN: *¿Y es poco interés ese amor? Yo di siempre su parte al ideal y conté con él siempre. Y ahora, acabó la farsa.*

SILVIA: (Al público.) *Y en ella visteis como en las farsas de la vida, que a estos muñecos, como a los humanos, muévenlos cordelillos groseros, que son los intereses, las pasioncillas, los engaños y todas las miserias de su condición; tiran uno de sus pies y los llevan a sus tristes andanzas; tiran otros de sus manos, que trabajan con pena, luchan con rabia, hurtan con astucia, matan con violencia. Pero entre todos ellos desciende a veces del cielo al corazón un hilo sutil, como tejido con luz del sol y con luz de luna: el hilo del amor, que a los humanos, como a estos muñecos que semejan humanos, los hace parecer divinos, y trae a nuestra frente resplandores de aurora, y pone alas en nuestro corazón y nos dice que no todo es farsa en la farsa, que hay algo divino en nuestra vida que es verdad y es eterno y no puede acabar cuando la farsa acaba.* (Telón.)

J. BENAVENTE: «*Los intereses creados*».

CUESTIONES:

1.ª—Desentraña y comenta las ideas que hay en ese fragmento de «Los intereses creados», objeto de nuestro comentario.
2.ª—Significación de esos tres personajes en la obra citada.—¿Qué otros personajes de «Los intereses creados» recuerdas?—¿De dónde ha tomado algunos de ellos? Dentro de los géneros dramáticos ¿qué es una «farsa»?
3.ª—Significación del teatro de Benavente en nuestra historia del arte dramático.—Clasificación de sus obras dramáticas: «Los intereses creados».
4.ª—Benavente: el «modernismo» y la «generación del noventayocho».

34

SILVIA

La noche amorosa, sobre los amantes,
tiende en su cielo el dosel nupcial.
La noche ha prendido sus claros diamantes
en el terciopelo de un cielo estival.
El jardín en sombra no tiene colores,
y es en el misterio de su oscuridad

susurro el follaje, aroma las flores
y amor..., un deseo dulce de llorar.
La voz que suspira, y la voz que canta,
y la voz que dice palabras de amor,
impiedad parecen en la noche santa,
como una blasfemia entre una oración.
¡Alma del silencio, que yo reverencio,
tiene tu silencio la inefable voz
de los que murieron amando en silencio,
de los que callaron muriendo de amor,
de los que en la vida, por amarnos mucho,
tal vez no supieron su amor expresar!
¿No es la voz acaso que en la noche escucho
y cuando amor dice, dice eternidad?

J. BENAVENTE: «*Los intereses creados*».

CUESTIONES:

1.ª—¿Quién es Silvia? ¿Qué representa en «Los intereses creados»? ¿Qué función corresponde en la obra a Leandro y Crispín? ¿Qué representan Polichinela, Arlequín y Doña Sirena?
2.ª—Estilo de esos versos, justificando debidamente tu respuesta.—Medida de los versos.—Rima y estrofa que van formando, advirtiendo cuanto estimes digno de nota.
3.ª—El teatro de Benavente.

35

ARLEQUÍN: *Bien decís. No la sublime poesía, que sólo canta de nobles y elevados asuntos; ya ni sirve poner el ingenio a las plantas de los poderosos para elogiarlos o satirizarlos; alabanzas o diatribas no tienen valor para ellos; ni agradecen las unas ni temen las otras. El propio Aretino hubiera muerto de hambre en estos tiempos.*

CAPITÁN: *¿Y nosotros, decidme? Porque fuimos vencidos en las últimas guerras, más que por el enemigo poderoso, por esos indignos traficantes que nos gobiernan y nos enviaron a defender sus intereses sin fuerza y sin entusiasmo, porque nadie combate con fe por lo que no estima; ellos, que no dieron uno de los suyos para soldado ni soltaron moneda sino a buen interés y a mejor cuenta, y apenas temieron verla perdida amenazaron hacer causa con el enemigo, ahora nos culpan a nosotros y nos maltratan y nos menosprecian y quisieran ahorrarse la mísera soldada con que creen pagarnos, y de muy buena gana nos despedirían si no temieran que un día todos los oprimidos por sus maldades y tiranías se levantaran contra ellos. ¡Pobres de ellos si ese día nos acordamos de qué parte están la razón y la justicia!*

BENAVENTE: «*Los intereses creados*».

CUESTIONES:

1.ª—Resume los pensamientos expuestos en ese breve fragmento de «Los intereses creados» en relación con la época en que fue escrita y el pensamiento de los escritores de su tiempo.
2.ª—¿Comedia o farsa? ¿Cómo calificaría esta obra de Benavente y por qué? ¿Cuál es el tema de esta obra de Benavente?
3.ª—Significación del teatro de Benavente en la historia del teatro español.

36

Porque las cosas no son grandes ni menudas, sino indiferentes. ¿Qué no? Mire: una hormiga, asustada, se asoma al agujero de sus tinieblas, sale al sol y silencio de una senda campesina; un águila escapa loca de un nidal de los Andes, espantada de una convulsa sacudida geológica que despedaza las cumbres; pues bien: ¿cree usted que las tierras del sendero y las rocas de los Andes que vieron salir a la hormiga y oyeron el grito desdichado del águila han asistido a lo menudo y a lo grande? ¿Lo cree usted? Pues yo, no. Humanizaré el ejemplo. ¿Conocerá usted la Ilíada, *verdad? ¡La conozco yo! Elija usted la hazaña que más le plazca y entusiasme de Aquiles, Héctor o Agamenón, y póngala junto al lanceamiento que hizo Don Quijote en el rebaño que tomara por huestes de Pentapolín, o al lado de otra aventura de nuestro caballero. ¿Son las primeras empresas superiores a las segundas? ¿Distintas, dice usted? ¡Nunca, nunca!... ¡Si para el delirante hidalgo eran hombres enemigos y desaforados los mansos corderos!... Los hechos se trenzan indiferentemente...*

GABRIEL MIRÓ: «*La novela de mi amigo*, I.»

CUESTIONES:

1.ª—Identifíquense los personajes mencionados de la *Ilíada*. ¿A qué aventura de Don Quijote se alude y quién es Pentapolín? ¿Cuál es la idea fundamental del texto.
2.ª—Género literario a que pertenece este fragmento. Rasgos de su estilo. Consecuencias de hablar en primera persona.
3.ª—Gabriel Miró su época y valor de su creación literaria.

37

«*Desde el 1910 me dedico a la Greguería, porque la Greguería me tiene convencido por cómo nació aquel día de escepticismo y cansancio en que cogí todos los ingredientes de mi laboratorio, todos, frasco por frasco, y los mezclé, surgiendo de su precipitación, de su depuración, de su disolución radical, la Greguería. Desde entonces la Greguería es para mí la flor de todo, lo que queda, lo que vive, lo que surge entre el descreimiento, la acidez y la corrosión, lo que resiste todo. La Greguería ha sido perseguida, denigrada, y yo he llorado y reído por eso estremecidamente, porque eso me ha dado pena y me ha hecho gracia.*»

R. GÓMEZ DE LA SERNA: «*Las 636 mejores greguerías*».

CUESTIONES:

1.ª.—Resumen del texto anterior.
2.ª.—Observaciones sobre el estilo de este fragmento.
3.ª.—El humorismo en la literatura española del siglo XX.
4.ª.—Ramón Gómez de la Serna.

38

«Desde luego es análoga la emoción que inicialmente suscitan Hamlet y Don Quijote. Ambos se ganan nuestras simpatías desde el primer momento. Se las ganan porque son generosos y nosotros somos egoístas. Hamlet y Don Quijote, aquel en la Universidad de Wittemberg, éste en los libros de caballerías, han aprendido en los ejemplos de los hombres que se sacrificaron por los hombres a amar sus hazañas y a intentar emularlas. Y nosotros les queremos desde el primer momento, porque Don Quijote se propone realizar «el bien de la tierra» porque Hamlet se muestra fiel a la memoria de su padre, el rey noble y glorioso, y zahiere la ingratitud de su madre con el apóstrofe: ¡Fragilidad, tienes nombre de mujer!

RAMIRO DE MAEZTU

CUESTIONES:

1.ª.—Resume lo que en el párrafo que comentamos nos dice Maeztu sobre Hamlet y Don Quijote.
2.ª.—Hamlet y Don Quijote: analogías y diferencias. Partiendo del estudio de Maeztu, puedes exponer tus propias opiniones.
3.ª.—Ramiro de Maeztu en su época y en el pensamiento actual.

39

«Hay en Castilla grandes virtudes; durante siglos, los poetas las han cantado. Hora es de que te vuelvas, mirada, a estos otros pueblos que dentro de España presentan virtudes y vicios complementarios de los nuestros. Más aún: si hace nueve centurias fue la misión de Castilla reducir a unidad las variedades peninsulares, acaso sea su menester de hogaño hacer que la vida española retorne de esa unidad a una variedad más fuerte y fecunda que la primitiva. Mira y quiere la diversidad en torno tuyo, que puede ser espléndida. Digna de la antigua es esta tu nueva misión de empujar a los pueblos para que cada cual cobre la voluntad de sí mismo. ¡Pupila castellana, abre bien el iris para que España multiforme y entera penetre en tu retina y, si preciso fuere, quiébrate en seis mil facetas como el ojo de las abejas de tu Alcarria!».

ORTEGA Y GASSET: «*Notas*».

CUESTIONES:

1.ª—Explica el pensamiento de Ortega contenido en estas líneas que comentamos contrastándolo con el tuyo.
2.ª—El ensayo. Caracteres generales de este género literario.
3.ª—El pensamiento de Ortega y Gasset.

BIOLOGIA

40

Los ciclos vitales de los elementos. El ciclo del carbono. Fotosíntesis y quimiosíntesis. El ciclo del nitrógeno. La putrefacción.

41

Elementos de genética humana. La herencia biológica en el hombre. Las bases de la herencia. La herencia del grupo sanguíneo, hemofilia y daltonismo. Otras herencias biológicas humanas.

42

Genética. Las bases de la herencia biológica. Las leyes de Mendel. La herencia biológica en el hombre.

43

La reproducción celular. La mitosis normal. Papel de los cromosomas durante la mitosis.—La mitosis heterotípica: Gametogénesis en los animales pluricelulares. Los cromosomas en los gametos. Fecundación biológica.

44

La reproducción sexual. Las gónadas y los gametos o células reproductoras. Los fenómenos de la gametogénesis. La fecundación biológica y la formación del zigoto.

45

La infección microbiana. La penetración de los microorganismos en el cuerpo. Las defensas orgánicas contra las infecciones. La inmunidad biológica. Antígenos y anticuerpos. Los fenómenos de anafilasia y alergia.

46

La infección microbiana y sus formas. Las defensas naturales contra las infecciones. Antígenos y Anticuerpos. La inmunidad y sus modalidades. Los fenómenos de anafilaxia y de alergia.

47

Bacterias y virus.—Constitución de la célula bacteriana.—Estudio y cultivo de bacterias y virus.—Bacterias del suelo y de las fermentaciones. Bacterias patógenas. Inmunidad biológica.

48

La respiración.—Diferentes formas de la respiración.—Los fenómenos bioquímicos de la respiración. Papel de la sangre y el aparato circulatorio en la respiración. Energía y calor animal. Metabolismo de los glúcidos y lípidos.

49

La simbiosis y el parasitismo. Las simbiosis biológicas.—El parasitismo como fenómeno biológico. Clases de parásitos. Efectos de parasitismo. Principales parásitos del hombre.

50

El parasitismo. Tipos de parásitos animales. Ectoparásitos y endoparásitos.—Ciclo biológico de algunos parásitos del hombre. Particularidades biológicas y mortofilógicas de los parásitos.

51

Hormonas y glándulas endocrinas. Los fenómenos de correlación hormonal: Fenómenos de hiperfunción e hiperfunción hormonal.—Las vitaminas y su papel biológico.

52

Las glándulas de secreción interna. Las hormonas. Principales glándulas endocrinas y hormonas en el hombre. La correlación humoral. Los oligoelementos.

53

El medio interno en el hombre. La sangre, linfa y líquidos intersticiales. El plasma sanguíneo. Papel de las sales minerales. Coagulación de la sangre. Los grupos sanguíneos.

54

Anatomía general del corazón humano. Los grandes vasos sanguíneos.—Fisiología general del sistema circulatorio.—La regulación cardíaca.

55

Histología animal.—Principales tejidos del cuerpo humano. Tejidos de protección y recubrimiento. Tejidos conjuntivos. Tejido muscular. Fisiología de la contracción muscular.

56

Histología animal.—Células y tejido muscular.—Fisiología del músculo. Trabajo muscular.—Tejido nervioso. Tipos de células nerviosas. Fibras nerviosas.

57

Estudio de los tejidos óseo y muscular. Estructura de los huesos y su crecimiento.—Forma y estructura de los músculos.—Fisiología muscular: metabolismo del músculo.

58

Fisiología de la digestión. Agrupaciones glandulares que actúan en la digestión.—Fenómenos bioquímicos de la digestión. Absorción y asimilación. Metabolismo general.

59

Fisiología general del aparato digestivo. La digestión estomacal.—El jugo gástrico y la digestión estomacal. La digestión intestinal. Los jugos digestivos intestinales. La digestión de los glúcidos, de los lípidos y de las proteínas. La absorción intestinal.

60

La digestión y la absorción intestinal. Distribución de los alimentos absorbidos. Funciones del hígado y del páncreas.

61

Los alimentos proteicos. Digestión de las proteínas. El metabolismo de las proteínas. Formación de la urea y ácido úrico. El ciclo del nitrógeno.

62

Nociones de Ecología. La adaptación biológica al medio. Los factores del medio biológico. Biocenosis y biotopos.

63

La adaptación biológica al medio ambiente. El medio biológico. Los factores del medio ambiente y su acción sobre los seres vivos. La biocenosis y los biotopos.

64

Ecología. La vida en el medio acuático: el agua y la vida. La vida en las aguas dulces.—La vida en el agua marina.

65

La fecundación biológica. La formación del zigoto o huevo. El desarrollo embrionario en los vertebrados. Las hojas blastodérmicas. El desarrollo del embrión en los mamíferos.

66

El carbono en la naturaleza. Ciclo bioquímico y biológico del carbono.

HISTORIA DE ESPAÑA MODERNA Y CONTEMPORANEA

67

La formación de la unidad española en los aspectos territorial, político y religioso.

68

La política internacional española en tiempo de los Reyes Católicos. Esfuerzos para lograr la Unidad Nacional. La política mediterránea y africana. La acción descubridora y colonizadora.

69

La política de los Reyes Católicos. Planteamiento, significado y desarrollo de la misma.

70

Sociedad, economía y cultura en la España de los Reyes Católicos.

71

Cristóbal Colón. Sus planes y fundamentos científicos.—Capitulaciones de Santa Fe. El primer viaje y sus consecuencias.

72

Las grandes conquistas españolas en América del Sur.

73

Problemas y consecuencias del descubrimiento de América.

74

Actuación de Carlos V en España.

75

Idearium político de Carlos V; su génesis y realización.

76

La primera vuelta al mundo y las exploraciones españolas en el Océano Pacífico.

77

El papel de España en la Contrarreforma.—El Concilio de Trento.

78

La hegemonía española durante el siglo XVI.

79

Política internacional de Carlos I y Felipe II.

80

España y América: las misiones y el arte en los siglos XVI y XVII.

81

Problemas internos e internacionales del siglo XVII.

82

España entre la Paz de Westfalia y la Paz de Utrecht: política interior y política internacional.

83

La pintura española de los siglos XVI y XVII: características generales y secuelas.

84

La época del barroco. La cultura española del siglo XVII. Principales manifestaciones literarias. Las Artes.

85

Arquitectura y escultura del barroco.

86

El reinado de Felipe V. Su reacción política frente al Tratado de Utrecht. Política revisionista de Alberoni y Ripperdá. Los Pactos de Familia.

87

Política internacional de España desde la Paz de Utrecht hasta la Guerra de la Independencia.

88

La Ilustración en España y los grandes ministros de Carlos III.

89

El siglo XVIII español; política interior, cultural y economía.

90

Las Cortes de Cádiz, la Constitución española de 1812 y sucesos posteriores hasta el final del reinado de Fernando VII.

91

Emancipación de la América española.

92

La emancipación de la América española. Aspectos generales y las causas de la emancipación. Caracteres del movimiento. El proceso histórico de la emancipación. Consecuencias de la Independencia.

93

Acción de España en América.

94

La obra de España en América en los aspectos religioso, social y cultural.

95

Del absolutismo austríaco al centralismo borbónico en la política, en la administración y en la economía.

96

El siglo XIX: partidos políticos y cambios de régimen constitucional.

97

La cuestión dinástica: orígenes y consecuencias.

98

La revolución de 1868.

99

La revolución española de 1868. La Primera República.

100

Desde la revolución de 1868 hasta la Segunda República.

101

La Restauración.

102

La Restauración y su significación política. Caracteres generales del panorama político europeo. Cánovas del Castillo y la Constitución de 1876. La acción de los partidos políticos.

103

Problemas del reinado de Alfonso XIII.

104

La cultura española en el período 1875-1936. La revolución intelectual y científica. La generación del 98. Las figuras más representativas del arte pictórico.

105

El Alzamiento Nacional.

106

Política internacional de España en estos últimos años.

107

Estructura económica y social de la España actual.

108

Los planes de desarrollo económico.

HISTORIA DE LA FILOSOFIA Y DE LA CIENCIA

109

El principio de las cosas y el movimiento en los filósofos presocráticos.

110

Los principios de la filosofía occidental: El fisicismo jónico y la escuela pitagórica. Breve exposición del concepto de la realidad en Heráclito y Parménides.

111

La filosofía en el período presocrático.—La antinomia Heráclito-Parménides.—Los pluralistas conciliadores.

112

Caracteres generales de la sofística.—Sócrates.

113

Los Sofistas: Caracterización de su actitud filosófica en contraposición con la de Sócrates. El método socrático y su doctrina moral.

114

Sócrates y los sofistas: Caracterización de ambas actitudes filosóficas, poniendo especial interés en explicar el método socrático y su doctrina moral.

115

Platón: la teoría de las ideas. Evolución histórica del platonismo.

116

Platón: líneas generales de su cosmología (explicación del mundo sensible) y su antropología (concepción del hombre).

117

Aristóteles: breve exposición de su filosofía de la naturaleza (el hilemorfismo) de la metafísica (el ser y sus causas), y la doctrina del conocimiento.

118

Aristóteles: la teoría hilemórfica y el problema de conocimiento.

119

El tema del *conocimiento* en Platón y Aristóteles.—Exposición de las respectivas posiciones y análisis comparativo de las mismas.

120

Entre las doctrinas filosóficas que tienen por objeto la conducta humana están el estoicismo y el epicureísmo. Exponer la filosofía de estas dos escuelas, señalando sus semejanzas y diferencias.

121

La filosofía en el período helenístico: epicureísmo y estoicismo.

122

Epicuro y los estoicos. Haz una breve exposición de ambos sistemas filosóficos, sin olvidar la figura y la obra de Séneca al hablar del estoicismo romano.

123

Séneca y el estoicismo romano.

124

La ciencia en el mundo griego: características generales, etapas en que se divide su desarrollo y representantes principales.

125

San Agustín y el problema de la verdad. El pensamiento agustiniano sobre los temas de Dios y el alma humana.

126

El hombre y Dios en la filosofía de San Agustín.

127

La filosofía escolástica: características generales, problemas más importantes y representantes principales.

128

La filosofía escolástica en el medievo, haciendo especial referencia a estas dos cuestiones: *a)* los universales y *b)* relaciones entre la razón y la fe.

129

Santo Tomás de Aquino: puntos fundamentales de su pensamiento. El sistema aristotélico comista.

130

Santo Tomás de Aquino: *a)* la razón y la fe; *b)* la analogía del ser y el problema de Dios; *c)* doctrina del conocimiento.

131

Las relaciones entre razón y fe en la patrística y en la escolástica medieval.

132

El problema de las *relaciones de razón y fe* en la filosofía medieval. Importancia de esta cuestión y análisis de las distintas posiciones (San Agustín, San Anselmo, Santo Tomás, Escoto, Occam).

133

El *pensamiento oriental medieval* árabe y judío y su transmisión a Europa, tanto en el aspecto *filosófico* como en el *científico.*

134

Los universales son los géneros y las especies, en cuanto se contraponen a los individuos; pero ¿qué son?: ¿Palabras, conceptos, realidades? Exponer sucintamente el nominalismo, el conceptualismo, el realismo moderado y el ultrarrealismo o realismo exagerado.

135

La aportación árabe y judía al pensamiento cristiano medieval en el aspecto filosófico y en el aspecto científico.

136

Los filósofos árabes y judíos de la Edad Media y su relación con el pensamiento cristiano científico y filosófico. La ciencia en la Edad Media.

137

Occam y la filosofía del siglo XV.

138

El desarrollo de la Matemática en la cultura griega y en la Edad Media.

139

El desarrollo de la Astronomía en Grecia y en la Edad Media.

140

La Ciencia en los últimos siglos de la Edad Media y en el Renacimiento.

141

Desarrollo histórico del racionalismo. El racionalismo y el método matemático.

142

Caracteres generales del racionalismo. Descartes: puntos fundamentales de su pensamiento.

143

El racionalismo. Tipos de racionalismo. El racionalismo de Descartes: la duda metódica; la existencia del yo y la de Dios; la existencia del mundo exterior.

144

El racionalismo y Descartes. Sistema filosófico de este pensador: *a)* la duda metódica; *b)* la existencia del yo y la de Dios; *c)* el mundo exterior.

145

La concepción del *hombre* en Platón, San Agustín y Descartes. Exposición de las respectivas posiciones antropológicas y análisis de las relaciones existentes entre ellos.

146

Verdades de hecho y verdades de razón en Leibniz. El optimismo leibziano y el problema del mal.

147

El empirismo: *a)* Bacon y el Método inductivo; *b)* Locke y su doctrina del conocimiento; *c)* el escepticismo de Hume.

148

El empirismo como doctrina opuesta al racionalismo.—Crítica progresiva de la idea de sustancia en Locke, Berkeley y Hume.

149

Análisis comparativo de la concepción de la *sustancia* en el racionalismo (Descartes, Espinoza, Leibniz) y en el empirismo (Locke, Berkeley, Hume).

150

El pensamiento político del empirismo inglés y su influencia en el liberalismo político-europeo.

151

La filosofía de Kant como intento de superación del racionalismo y del empirismo.

152

Kant: Crítica de la Razón Práctica. El imperativo categórico. Los tres postulados de la moralidad.

153

La filosofía de Kant como resultante y superadora de los sistemas racionalistas y empiristas que le precedieron. El idealismo postkantiniano y sus representantes principales.

154

Caracteres generales y representantes principales del positivismo en el siglo XIX. Exposición y crítica del pensamiento de Augusto Comte.

155

El positivismo en el siglo XIX. Sus principales representantes.

156

La filosofía de los valores y su proyección en la filosofía de la cultura.

DOCTRINA SOCIAL CATOLICA

157

a) TEMA A DESARROLLAR:

«Los derechos de la familia».

b) COMENTARIO a estas palabras de la «Pacem in Terris»:

«La familia, fundada sobre el matrimonio contraído libremente, uno e indisoluble, es y debe ser considerada como el núcleo primario y natural de la sociedad. De lo cual se sigue que se debe atender con mucha diligencia, no sólo la parte económica y social, sino también a lo cultural y moral, que consolidan su unidad y facilitan el cumplimiento de su misión peculiar.

Pero antes que nadie son los padres los que tienen el derecho de mantener y educar a sus propios hijos» (PT 13).

158

a) TEMA A DESARROLLAR:

«Cuál es el verdadero sentido del derecho a la propiedad privada, y cuáles son sus exigencias y sus limitaciones.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«De un modo especial se ha de poner de relieve el derecho del obrero a una retribución del trabajo determinada según los criterios de la justicia y, por tanto, que, atendidas las posibilidades de la riqueza, sea suficiente para que el trabajador y su familia se mantengan en un nivel de vida que corresponda a la dignidad humana» (PT 20).

159

a) TEMA A DESARROLLAR:

«Cómo establecer la justa retribución del trabajo: sistema de salariado, participación en los beneficios, etc.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«De la naturaleza humana brota también el derecho a la propiedad privada sobre los bienes, aun sobre los bienes de producción: y, según ya hemos enseñado en otra ocasión, este derecho constituye un medio apropiado para la afirmación de la persona y el ejercicio de la responsabilidad en todos los campos; un elemento de consistencia y de serenidad para la vida familiar y de pacífico y ordenado progreso en la convivencia» (PT 21).

160

a) TEMA A DESARROLLAR:

«Misión y deber del Estado en la defensa y difusión de la propiedad.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«No será tarea difícil orientar de tal modo la política económico-social que se haga más fácil y accesible a todos el camino hacia la propiedad privada de cosas tales como las siguientes: bienes de consumo duradero, casa, tierra, instrumentos necesarios para el debido funcionamiento de la empresa artesana o la empresa familiar agrícola; acciones pertenecientes a sociedades grandes y medianas, etcétera, como en realidad, se ha puesto ya en práctica con feliz éxito, en no pocas naciones económica y socialmente avanzadas» (MM. 115).

161

a) TEMA A DESARROLLAR:

«El hombre por naturaleza es un ser social. La autoridad es necesaria, viene de Dios y debe armonizarse con la libertad.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«La intervención del Estado en el campo económico, por mucho que se ensanche y llegue a los sectores más recónditos de la comunidad, debe, sin embargo, ser tal que no sólo no ahogue la libertad de la iniciativa privada, sino antes la favorezca, a fin de que queden a salvo los derechos fundamentales de toda persona humana» (MM. 55).

162

a) TEMA A DESARROLLAR:

«El bien común temporal y sus exigencias en el plano nacional y en el internacional.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«Deben incluirse entre las exigencias del bien común nacional: el dar ocupación al mayor número de obreros; evitar que se constituyan categorías de privilegiados dentro de la Nación, e incluso entre los mismos obreros; mantener la adecuada proporción entre los salarios y los precios; facilitar el acceso del mayor número posible de ciudadanos a los bienes materiales y a los beneficios de la cultura...» (MM. 79).

163

a) TEMA A DESARROLLAR:

«Dignidad de la persona humana por su origen, por su fin, y sobre todo, por su elevación al orden sobrenatural.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«Y si consideramos la dignidad de la persona humana a la luz de las verdades reveladas, es forzoso que la estimemos todavía mucho más, dado que el hombre ha sido redimido con la sangre de Jesucristo, la Gracia sobrenatural le ha hecho hijo y amigo de Dios y le ha constituido heredero de la gloria eterna» (PT. 8).

164

a) TEMA A DESARROLLAR:

«Qué se entiende por problema social y características especiales con que dicho problema se presenta en la actualidad.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«En los pueblos económicamente más desarrollados no raras veces se da el caso de que ciertos cargos de poca importancia y dudosa utilidad, son retribuidos con sueldos elevados, e incluso exhorbitantes, mientras por el contrario, el trabajo concienzudo y provechoso que realizan las clases laboriosas y honradas se remunera con salarios demasiado bajos, insuficientes para cubrir las necesidades vitales, o, en cualquier caso, inferiores a lo justo, si se tie-

nen en cuenta, como es debido, los beneficios que aportan a la nación, las ganancias de las respectivas empresas y la renta nacional» (MM-70).

165

a) TEMA A DESARROLLAR:

«En qué se funda el derecho de la Iglesia a intervenir en las cuestiones sociales y dentro de qué límites se mantiene dicha intervención.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«No sólo es necesario someter a los preceptos de justicia la distribución de los bienes producidos mediante el trabajo, sino incluso la organización de las empresas en que los hombres contribuyen a producirlos. Porque está en la misma naturaleza del hombre la exigencia de que quien contribuye a la producción puede responsabilizarse de su actividad y perfeccionarse a sí mismo mediante su trabajo» (MM. 82).

166

a) TEMA A DESARROLLAR:

«Los derechos fundamentales de la persona humana y la posibilidad de ejercitarlos en la sociedad actual.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«Es notorio que hoy es cada vez mayor el número de los que, gracias a los seguros contra toda clase de riesgos económicos y las múltiples instituciones de previsión social, puedan mirar hacia el futuro con ánimo tranquilo, tranquilidad que en otro tiempo dependía tan sólo de una propiedad, aun cuando fuera modesta» (MM. 105).

167

a) TEMA A DESARROLLAR:

«El hombre tiende por naturaleza a la sociedad, tendencia que en el orden sobrenatural encuentra pleno cumplimiento.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«Se da también en nuestros días el caso de que los hombres prefieren tener una profesión a poseer bienes, y estiman en más las rentas que proceden del trabajo o de derechos fundados en el

trabajo que las rentas derivadas del capital o de derechos fundados en el capital. Lo cual, en realidad, está en perfecta armonía con la nobleza originaria del trabajo, que, en cuanto procede directamente de la persona humana, debe valorarse en más que el capital, que por su misma naturaleza es un bien instrumental, y esto, ciertamente, es indicio de que la humanidad progresa» (MM. 106, 107).

168

a) TEMA A DESARROLLAR:

«Cómo pueden y deben contribuir los individuos y las asociaciones intermedias al bienestar y a la paz de la sociedad.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«A medida que progresa esta tendencia asociativa de los hombres de nuestro tiempo tanto más fácilmente alcanzarán las naciones el orden adecuado cuanto mejor se equilibren entre sí estos dos principios: de un lado, la libertad jurídica de los ciudadanos y de sus asociaciones, dentro de un espíritu de mutua colaboración, y de otro, la intervención del poder público que coordine y fomente la iniciativa privada» (MM. 66).

169

a) TEMA A DESARROLLAR:

«La igualdad de todos los hombres y las desigualdades existentes en nuestra sociedad. Qué pensar de las «clases sociales» y de la «lucha de clases».

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«En un momento en que la vida económica progresa rápidamente en muchas naciones y, como resultado, se consigue una producción cada vez mayor de bienes, exigen la justicia y la equidad que, dejando a salvo el bien común, se eleve también la remuneración del trabajo. Esto, en realidad, hará posible que los obreros practiquen más fácilmente el ahorro y puedan, por tanto, ir formando un patrimonio» (MM. 112).

170

a) TEMA A DESARROLLAR:

«Origen de la autoridad y su necesidad en toda sociedad bien organizada, dentro del respeto a la libertad de los individuos.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«*Los seres humanos tienen el derecho a la libertad en la elección del propio estado y, por consiguiente, a crear una familia con paridad de derechos y deberes entre el hombre y la mujer, o también a seguir la vocación al sacerdocio o vida religiosa.*»

171

a) TEMA A DESARROLLAR:

«*Qué se entiende por bien común y sus exigencias en el orden nacional e internacional.*»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«*La familia, fundada sobre el matrimonio contraído libremente, uno e indisoluble, es y debe ser considerada como el número primario y natural de la sociedad. De lo cual se sigue que se debe atender con mucha diligencia no sólo a la parte económica y social, sino también a la cultural y moral, que consolidan su unidad y facilitan el cumplimiento de su misión peculiar.*»

172

a) TEMA A DESARROLLAR:

«*El problema del hambre en el mundo y el derecho a emigrar.*»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«*Es característica de nuestra época la tendencia a poner en manos del Estado, o de otras instituciones públicas, la propiedad de un número cada vez mayor de bienes. La explicación de este fenómeno hay que buscarla en la exigencia del bien común, que cada día impone obligaciones mayores sobre la autoridad pública. Sin embargo, también en esta materia es necesario atenerse estrictamente al principio de subsidiaridad*» (MM. 117).

173

a) TEMA A DESARROLLAR:

«*Problemas especiales del sector agrícola en desequilibrio con los demás sectores de la economía.*»

b) **Breve comentario** al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«Al derecho de todo hombre a la existencia corresponde el deber de conservar la vida; al derecho de un nivel de vida digno, el deber de vivir dignamente, y, al derecho a la libertad en la búsqueda de la verdad, el deber de buscarla cada día más amplia y profundamente.»

174

a) **Tema a desarrollar:**

«Derechos inviolables de la familia. Cómo son reconocidos y respetados por los distintos sistemas sociales.»

b) **Breve comentario** al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«Observamos que el número total de habitantes del campo no parece haber disminuido; y, sin embargo, son ciertamente muchos los agricultores que, abandonando su pueblo natal, se establecen en lugares más poblados y en las mismas ciudades, lo cual, como quiera que se repite en casi todas las naciones y, en ocasiones, alcanza proporciones multitudinarias, crea como consecuencia, problemas de difícil solución a la vida y a la dignidad de los ciudadanos» (MM. 123).

175

a) **Tema a desarrollar:**

«El trabajo como servicio a Dios, servicio a la sociedad y derecho y perfección de la persona.»

b) **Breve comentario** al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«La misma experiencia demuestra, cada vez con mayor claridad que no es posible una sociedad próspera y bien ordenada sin la contribución simultánea de los particulares y de los poderes públicos a la vida económica, contribución que debe prestarse con espíritu de cooperación de tal forma que la acción de cada una de las partes responda en la mayor medida posible a las exigencias del bien común, dentro de las variables circunstancias de tiempos y costumbres.»

176

a) **Tema a desarrollar:**

«Eficacia de las asociaciones intermedias en la promoción del bien común y en la defensa de las libertades individuales.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«*La evolución progresiva de la realidad histórica pone cada vez más claramente de manifiesto la necesidad de regular, según las normas de justicia y equidad, no sólo las relaciones entre obreros y empresarios, sino también las que deben existir entre los diversos sectores de la economía, entre zonas de distinto nivel económico, dentro de una misma nación, y, en el conjunto de la comunidad humana, entre las numerosas y diferentes naciones con diverso grado de desarrollo económico y de progreso social*» (MM. 122).

177

a) TEMA A DESARROLLAR:

«*Importancia y gravedad del problema social en la actualidad. Desequilibrios entre el sector agrícola y el industrial, entre las zonas más o menos desarrolladas de un país, y entre los distintos países.*»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«*De ahí que las naciones por sí solas y aisladas de las demás no puedan resolver adecuadamente sus principales problemas, aún tratándose de aquellas que destacan por su cultura y civilización, por el número y actividad de sus habitantes, por el desarrollo de su organización económica, por la abundancia de bienes y por la extensión de sus fronteras. Las naciones, por tanto, sólo pueden promover su propio bienestar a condición de que promuevan también el de las demás, dado que unas y otras han de ayudarse y perfeccionarse. De donde se deduce que una necesidad vital mueve a las naciones a entenderse y a colaborar entre sí*» (MM. 202).

178

a) TEMA A DESARROLLAR:

«*Falsas soluciones que han agravado el problema social. La lucha de clases.*»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«*Advierte, en fin, el Sumo Pontífice, que las doctrinas comunistas y las cristianas son radicalmente incompatibles. En cuanto a las doctrinas del Socialismo tampoco pueden los católicos aceptarlas en modo alguno; ante todo porque, según tal concepción, la vida social no se extiende más allá de este tiempo caduco, y consiguientemente está ordenada a la consecución de un bienestar puramente material; pero además porque, al sostener que la sociedad y la convi-*

vencia humana se ordenan exclusivamente a la producción de bienes materiales, llega a disminuir excesivamente la libertad del hombre, desfigurando la verdadera noción de autoridad social» (MM. 34).

179

a) TEMA A DESARROLLAR:

«Por qué la Iglesia tiene el derecho y el deber de intervenir en la cuestión social.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«Volvemos a afirmar, ante todo, que la doctrina social, enseñada por la Iglesia es parte integrante de la concepción cristiana de la vida» (MM. 222).

180

a) TEMA A DESARROLLAR:

«El grave problema demográfico y sus verdaderas soluciones.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«Juzgamos que este problema sólo puede resolverse mediante un desarrollo económico y social que garantice y multiplique los verdaderos valores, ya de los individuos, ya de toda sociedad humana. Es decir, que en cuanto se refiere a este asunto, debe colocarse en primer término todo cuanto afecta a la dignidad del hombre en general, y a la vida de cada hombre en concreto, supuesto que nada puede haber más valioso. Pero, además, es necesario promover la mutua colaboración entre todas las naciones, con el fin de hacer posible la debida comunicación entre los pueblos, tanto de los conocimientos como de los capitales y de los mismos hombres, con provecho evidente para todos ellos» (MM. 192).

181

a) TEMA A DESARROLLAR:

«Criterios par establecer el salario justo.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«La fijación del salario ni puede abandonarse en absoluto a la libre competencia, ni es lícito que la determine el arbitrio de los poderosos, sino que en esta materia deben observarse estrictamente las

normas de justicia y de equidad. Esto exige que se dé al trabajador un salario tal que le permita llevar una vida digna de persona humana y hacer frente como conviene a sus obligaciones familiares. Mas para determinar con equidad la remuneración del trabajo, es necesario también ponderar otras circunstancias: ante todo, la efectiva aportación de cada uno a la producción, la situación económica de las empresas respectivas, las exigencias del bien común nacional particularmente por lo que se refiere al pleno empleo de la mano de obra, y, por último, las exigencias del bien común internacional, es decir del conjunto de países unidos entre sí, habida cuenta de sus diferencias en cuanto a dimensiones y a recursos naturales» (MM. 71).

182

a) TEMA A DESARROLLAR:

«Concepción cristiana de la empresa al servicio del hombre.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«No dudamos en afirmar que debe darse a los obreros participación activa en los negocios de la empresa en que trabajan, tanto si es privada como pública, por cuanto de ello depende el que las empresas revistan como es debido las características de una auténtica comunidad humana, cuyo espíritu impregne totalmente las relaciones entre todos sus miembros y el desempeño de sus diversas tareas y obligaciones» (MM. 91).

183

a) TEMA A DESARROLLAR:

«La socialización y sus causas. Ventajas e inconvenientes. Condiciones para que sea admisible.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«A medida que progresa esta tendencia asociativa de los hombres de nuestro tiempo, tanto más fácilmente alcanzarán las naciones el orden adecuado cuanto mejor se equilibren entre sí estos dos principios: de un lado la libertad jurídica de los ciudadanos y de sus asociaciones, dentro de un espíritu de mutua colaboración, y de otro, la intervención del poder público que coordine y que fomente la iniciativa privada» (MM. 66).

184

a) TEMA A DESARROLLAR:

«La concepción cristiana del Estado. Su necesaria intervención en el campo económico y el respeto a la iniciativa privada.»

b) BREVE COMENTARIO al siguiente texto de la «Pacem in terris»:

«El hombre, que se compone de cuerpo y alma inmortal, no agota su existencia ni consigue su perfecta felicidad en el ámbito del tiempo: de ahí que el bien común se ha de procurar por tales procedimientos que no sólo no pongan obstáculos, sino que sirvan igualmente a la consecución de su fin ultraterreno y eterno» (PT. 54).

INDICE

Páginas