



Cangur i GeoGebra

Visualització denunciats, i de gràfics de la prova Cangur, amb idees per a obtenir la solució o per a explicar-la i, d'aquesta manera, revisar eines i procediments del GeoGebra

Creiem que en el context d'aquest taller escau començar amb una reflexió que va fer Miguel de Guzmán en l'article *Tendencias innovadoras en educación Matemática. (1992) (*)*

El acento habrá que ponerlo /.../ en la comprensión de los procesos matemáticos más bien que en la ejecución de ciertas rutinas que en nuestra situación actual ocupan todavía gran parte de la energía de nuestros alumnos, con el consiguiente sentimiento de esterilidad del tiempo que en ello emplean. Lo verdaderamente importante vendrá a ser su preparación para el diálogo inteligente con las herramientas que ya existen, de las que algunos ya disponen y otros van a disponer en un futuro que ya casi es presente.

Siendo así las cosas, es claro que nuestra enseñanza del cálculo, del álgebra, de la probabilidad y estadística, ha de transcurrir en el futuro por otros senderos distintos de los que hoy seguimos. Habrá que poner el acento en la comprensión e interpretación de lo que se está haciendo, pero será superflua la energía dedicada a adquirir agilidad en las rutinas que la máquina realiza con mucha mayor rapidez y seguridad. En la programación de nuestra enseñanza habremos de preguntarnos constantemente dónde vale la pena que apliquemos nuestro esfuerzo inteligente y cuáles son las rutinas que podemos confiar a nuestras máquinas. /.../ Con ello podemos liberar lo mejor de nuestra capacidad mental a la resolución de los problemas que todavía son demasiado profundos para las herramientas de que disponemos. No temamos que tales problemas vayan escaseando.

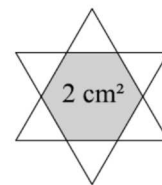
Si no heu llegit aquest article us el recomanem de tot cor.
Convencem-nos que el GeoGebra ajudarà a pensar als nostres alumnes.

(*) El podeu trobar a Internet, a la web de la web de la Universitat Complutense Madrid, Cátedra Miguel de Guzmán i d'allà ho hem reproduït <http://blogs.mat.ucm.es/catedramdeguzman/tendencias-innovadoras-en-educacion-matematica/>

Curiosament l'article es va publicar primer en català que en castellà, a partir d'una conferència que Miguel de Guzmán va fer a l'IEC. El podeu trobar a la web de la SCM <http://revistes.iec.cat/index.php/BSCM/article/view/9885/9879>

(proposta 1)

Prenent com a base cadascun dels costats d'un hexàgon regular d'àrea 2 cm^2 , construïm sis triangles equilàters cap a l'exterior de l'hexàgon. Quina és l'àrea total de l'estrella que ha quedat dibuixada (zona grisa més zona blanca)?



- A) 4 cm^2 B) $\frac{7}{2} \text{ cm}^2$ C) $\frac{5}{2} \text{ cm}^2$ D) 3 cm^2 E) $\frac{9}{2} \text{ cm}^2$

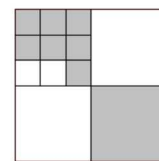
Proposem que dediqueu cinc minuts a la resolució i tot seguit posarem en comú les idees que hagin sorgit. Les imatges següents en concreten dues que naturalment empen l'eina de Polígon Regular.



(proposta 2)

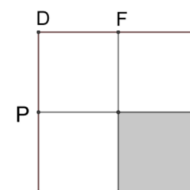
9. Un quadrat gran es divideix en quadrats més petits, tal com indica la figura. Quina fracció de l'àrea del quadrat gran està en gris?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{5}{12}$



És clar que en aquest cas per a l'obtenció ràpida i raonada de la solució hem de fer que la mainada reflexioni: si dividíssim els quatre quadrats grans en 9 parts cadascun hi hauria 36 quadradets, dels quals 16 serien grisos, però ens ha semblat interessant revisar com es pot fer la construcció acurada.

Podeu obrir **proposta2.ggb** on ja hi teniu fets els quatre quadrats grossos i aprofitarem per comentar com es divideix un segment en tres parts iguals i el fet que el GeoGebra incorpora el treball de l'espai afí: es pot operar amb els punts de manera equivalent als seus vectors de posició.

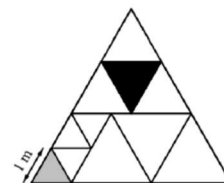


Vegeu els dos punts **D** i **F**. Escriviu a la línia d'entrada **D + (F - D) / 3** i després **D + 2 (F - D) / 3** i ja tindreu el segment DF dividit en tres parts. Per fer els nou quadradets podeu aportar idees (segurament a partir de dibuixar polígons regulars, o de partir el segment DP també en tres parts iguals i paral·leles perpendiculars i interseccions...).

- Si interessés partir un segment en **n** parts iguals per a un valor donat de **n**, podríem fer ús d'una seqüència:
Seqüència [A + i (B-A) / n, i, 1, n-1]

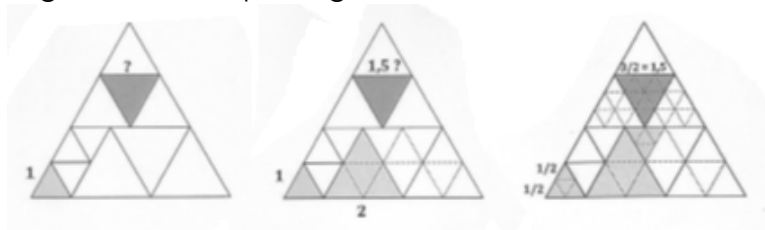
(proposta 3, complementària)

El triangle equilàter gran de la figura està dividit en onze triangles equilàters. El costat del triangle petit de color gris mesura 1 m. Quina és la mesura del costat del triangle negre?



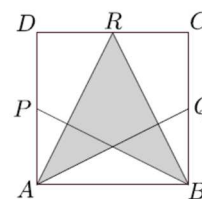
- A) 1,5 m B) 1,25 m C) $\sqrt{2}$ m D) 2 m E) $\sqrt{3}$ m

Es va incloure la idea següent en una publicació que es va repartir als concursants amb menció en el Cangur 2020. I ara que ja sabeu dividir un segment en tres parts iguals...teniu una bona manera de visualitzar la solució!



(proposta 4, possiblement complementària)

29. El diagrama mostra el quadrat $ABCD$ amb P , Q i R els punts mitjans dels costats DA , BC i CD respectivament. Quina fracció de l'àrea del quadrat $ABCD$ està ombrejada?



- A) $\frac{5}{8}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{7}{16}$ E) $\frac{3}{4}$

Com segurament ja hem fet en la proposta 1 aquí es demana de comparar àrees. Teniu la figura feta en la **proposta 4. ggb**. Com veiem la proporció d'àrees? Recordeu que el nom del polígon també ens dona el valor numèric de l'àrea i, per si no el coneixíeu, practicarem amb el comandament

TextFracció.

També reflexionarem que un dibuix acurat fet amb GeoGebra ens pot ajudar per a trobar un camí raonat de solució. Naturalment fer el dibuix en una quadricular pot anar molt bé i en aquets cas, en general, veure quina relació hi ha entre l'altura del triangle blanc de baix i el costat del quadrat/altura del triangle ABR (que té d'àrea la meitat de la del quadrat) també serà ben interessant.

(Proposta 5)

Un grup de simpatitzants del Cangur anomena *rugnac* la seva mascota, un curiós animal que han dissenyat. Arriba una amiga i els pregunta: «Quantes potes tenen, en total, sis gatets i set *rugnacs*?». Obté les respostes 44, 51, 64, 76 i 80 però ella sap que quatre li han dit una mentida i un la veritat. Quantes potes té un *rugnac*?

- A) 3 B) 6 C) 8 D) 7 E) 5

Atenent al fet que a la secundària no es treballen equacions diofàntiques aquest problema s'ha de fer investigant amb detall les possibilitats. És a dir que sigui com sigui, haurem d'imaginar la llista **seqüència** ($6 \cdot 4 + 7 \cdot r$, r , 1 , 15) en la qual, potser pensant una mica podríem posar menys de 15 elements.

(proposta 6, complementària)

1. La cangur Lola fa salts endavant d'1 m cadascun. Però si fa tres salts seguits cap endavant, immediatament en fa un altre d'1 m endarrere. Si la Lola vol moure's exactament 10 m cap endavant, quants salts ha de fer?

- A) 12 B) 10 C) 18 D) 19 E) 16

Proposta per reflexionar sobre el fet que no és gens immediat crear una llista recursiva amb comandes del GeoGebra. La cosa que sí que podem fer és anar al full de càlcul, és clar! O mirar de deduir el terme general i llavors sí que podem crear la successió amb el comandament **seqüència**. És clar que en aquest cas "la gràcia" rau en saber expressar el terme general. Així

Seqüència (2*quocient (n, 4)+residu (n, 4), n, 1, 40)

obtenim la llista de les distàncies que la separen del punt inicial després de n salts (el 40 del final és arbitrari) i si posem

Seqüència ((n, 2*quocient (n, 4)+residu (n, 4)), n, 1, 40)

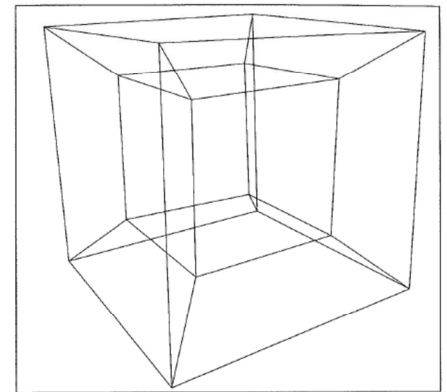
així obtenim la indicació de quin nombre de salt és i la distància. Naturalment també cal comentar que ben segur que els concursants ho van fer escrivint la llista a mà.

(proposta 7)

Hem construït una estructura metàl·lica. Consta de dos cubs de mida diferent, posats un a l'interior de l'altre, amb les arestes fetes cada una amb un filferro. A més, cada vèrtex d'un dels cubs està connectat amb un vèrtex de l'altre, també per un filferro. Quants filferros componen aquesta estructura?

- A) 18 B) 36 C) 32 D) 12 E) 24

Exercici que proposem com una visualització, amb la idea que pot ser una eina "per a repassar el Cangur a classe: que la mainada facin el dibuix!" Un bon exercici 3D. Tot i que l'enunciat no ho diu, com que no hi ha una resposta que digui "depèn de la posició dels cubs us proposem que poseu els dos cubs amb les arestes paral·leles



En un espacio cuatridimensional, moviendo un cubo tridimensional a lo largo de una dirección perpendicular a estas tres dimensiones se obtiene un hiper-cubo. Éste tiene 16 vértices, 32 lados, 24 caras y está delimitado por 8 cubos.

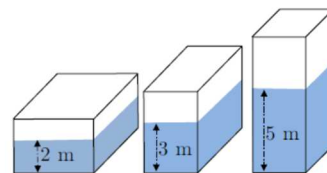
Eines:

- La icona **cub** (potser definint abans els plans on volem cada "base"). D'aquesta manera podrem moure els punts que defineixen cada cub.
 - O bé el comandament **Cub(<Punt>, <Punt>, <Punt>)** o bé **Cub(<Punt>, <Punt>, <Direcció>)** amb el benentès que si ometem al tercer paràmetre el GeoGebra "se l'inventa" (per exemple si donem dos punts amb la mateixa z és un pla horitzontal). En aquest cas si no tenim definits com a punts els que fem servir per a crear el cub no queden creats... i els haurem de crear per dibuixar els segments, preferiblement doncs, feu-ho abans de definir el cub
 - Propietats dels cubs. Segurament us anirà bé color, opacitat 0.
 - Naturalment, l'eina **segment**.
-

(proposta 8)

13. Un dipòsit en forma de prisma rectangular està parcialment ple amb 120 m^3 d'aigua. La profunditat de l'aigua és o bé de 2 m, o bé de 3 m, o bé de 5 m, depenent de quina cara del prisma està tocant a terra, com es mostra a la figura (que no és a escala). Quin és el volum del dipòsit?

A) 220 m^3 B) 240 m^3 C) 160 m^3 D) 200 m^3 E) 180 m^3



Exposarem com podem resoldre el problema amb un sistema d'equacions en l'entorn de treball del CAS i com podem aprofitar les solucions per a càlculs posteriors.

Després veurem com es poden dibuixar els tres paral·lelepípedes. Farem ús de les eines de transformacions geomètriques a l'espai i també de l'eina **crear un prisma a partir de la base**. Podeu obrir **proposta8.ggb**.

Constatarem que de vegades cal anar amb precaució, a l'espai, sobre la manera de donar l'altura d'un prisma (pot fer falta donar-la negativa segons "el sentit" amb què el GeoGebra interpreta una àrea (pot fer falta donar l'altura negativa) i també veurem algun problema amb els colors de figures que quedin "una a dintre de l'altra".

(Proposta 9; per si pot interessar un problema d'equacions)

Per a una equació concreta es pot trobar la solució des de la línia d'entrada, amb el comandament **resol** (equació) o amb el comandament **solucions** (equació) però, atenció, a la línia d'entrada no totes les lletres serveixen com a variables (**x, y, z, t** sí.). Al CAS sí que podem fer servir la lletra que ens interessi com a incògnita en una equació.

Pel que fa als sistemes d'equacions **resol** ({llista d'equacions}) o bé **solucions** ({llista d'equacions}) serveixen a la línia d'entrada si les variables s'expressen amb les lletres indicades. AL CAS podem indicar la llista de les variables que volem aïllar.

(11.1)

15. La Joana està jugant a bàsquet. Després d'una sèrie de 20 tirs, ha tingut un percentatge d'encert del 55%. Després de 5 tirs més, el seu percentatge d'encert ha pujat fins al 56%. Quants dels seus darrers 5 tirs ha encertat?

A) 4 B) 1 C) 3 D) 5 E) 2

(11.2)

25. Quan la Rita i la Fàtima van comparar els seus estalvis, van trobar que la proporció era de $\frac{5}{3}$. A continuació, la Rita va comprar una *tablet* per 160 € i la ràtio dels seus estalvis va canviar a $\frac{3}{5}$. Quants euros tenia la Rita abans de comprar la *tablet*?

A) 192 B) 200 C) 250 D) 420 E) 400

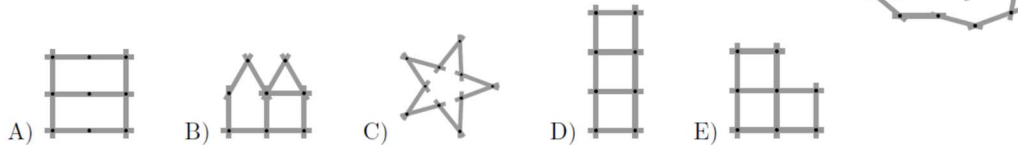
(11.3)

15. Si augmentem el numerador d'una fracció en un 40%, en quin percentatge hem de reduir el denominador per a obtenir una nova fracció que sigui el doble de la inicial?

A) 30% B) 40% C) 25% D) 50% E) 70%

(proposta 10)

13. La Pia juga amb un joc de 10 pals articulats que no es poden separar. Quina de les figures següents no es pot formar amb aquest joc?



Explicarem com es pot construir una poligonal de 10 segments, cadascun d'ells de longitud 1. En teniu una a l'abast si obriu **proposta10.ggb**
Us proposem que l'aneu movent, que jugueu!!! Potser alguns podeu fer la A, uns altres la B, uns altres la C, uns altres la E. La D és la que no es pot fer. Tingueu present que no cal que la figura acabi al mateix lloc que comença

(proposta 11, possiblement complementària)

4. En una llar d'infants hi ha 14 nenes i 12 nens. Si la meitat dels infants surten al pati, com a mínim quants d'ells podem assegurar que són nenes?

A) 3 B) 5 C) 2 D) 4 E) 1

Es podria fer un segment del (0,0) al (14,0). Un d'un altre color del (14,0) al (26,0) Fer córrer per baix un segment de longitud 13 que comenci en el punt (a,-1) (a donat per un punt lliscant que haurem de pensar quins valors pot tenir) i que se'ns digui en cada moment quants nens i quantes nenes q2 corresponen al segment mòbil (segurament caldrà fer perpendiculars i definir nous segments).

(proposta 12)

22. Quin és el conjunt de tots els valors del paràmetre a pels quals l'equació $2 - |x| = ax$ té exactament dues solucions?

A) $-1 < a < 1$ B) $1 \leq a < +\infty$ C) $a = -1$ o $a = 1$ D) $a = 0$ E) $-\infty < a \leq -1$

Ho podeu fer amb un punt lliscant que doni la **a**.

Dibuixeu la funció $f(x) = 2 - |x|$, la recta $y = ax$, (alerta amb l'espia per indicar el producte; si us agrada més per tal d'evitar embolics podeu posar $y = a * x$.Moveu el valor de **a** i observeu.

(proposta 13)

25. Quatre línies rectes diferents passen per l'origen de coordenades. Les rectes intersequen la paràbola $y = x^2 - 2$ en vuit punts. Quin és el producte de les vuit coordenades x d'aquests punts?

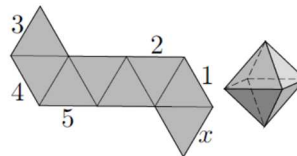
A) -8 B) -16 C) 8. D) 16 E) El producte pot tenir diversos valors.

La primera reflexió és prèvia al càlcul: si l'enunciat parla de quatre rectes qualssevol és fàcil pensar que per una sola recta qualsevol també podem arribar a una conclusió.

Així doncs: dibuixeu la paràbola; poseu un punt sobre la paràbola (que després podreu moure); feu la recta que l'uneix amb l'origen; definiu l'altre punt d'intersecció i feu el càlcul que demana l'enunciat.

(proposta 14)

14. El dibuix mostra un desenvolupament pla d'un octàedre. En construir l'octàedre, quin dels segments retolats amb 1, 2, 3, 4 i 5 coincidirà amb el segment indicat amb la lletra x ?



- A) El 2 B) El 5 C) L'1 D) El 3 E) El 4

Es tracta de presentar el comandament **desplegament** i veure'n les immenses possibilitats de visualització.

Observació prèvia: per a una pràctica eficaç el desplegament es fa respecte una cara que estigui en el pla XY, cosa que no passa amb l'octaedre que tenim dibuixat més amunt, però de fet la figura de l'octaedre plegat no és substancial.

- Per dibuixar un octaedre s'ha de fer amb el comandament **octaedre**. Com ja hem vist amb el cub basta donar dos punts, que situarem en el pla coordinat XY (horitzontal). Podeu fer, per exemple, $\mathbf{A}=(2, 0, 0)$; $\mathbf{B}=(-2, 0, 0)$, $\mathbf{M}=\text{octaedre}((-2, 0, 0), (2, 0, 0))$
- Ara podeu accedir a les icones dels políedres i hi trobareu la icona dels **desplegament**. Apliqueu-la al políedre **M** i observeu. En particular constateu que s'ha creat un punt lliscant que permet fer visual la generació del desplegament/plegament.

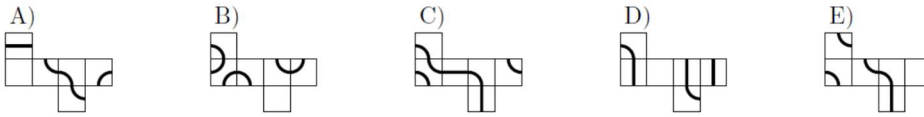
Ja veieu que el desplegament no ha resultat el que es presentava en el Cangur. Tanmateix el comandament **desplegament** permet seleccionar les arestes de tall successius i així es pot trobar el desplegament que interressi. Però aquesta és una acció subtil i laboriosa, per als ponent, difícil d'explicar. Si a algú li interessa, podrà investigar "a casa!".

- Si obriu **proposta14.ggb** allà hi teniu fet el desplegament que es donava a l'enunciat
- Sobre el desplegament podem construir-hi elements gràfics, lligats als punts que el defineixen, i aquests elements passaran a la finestra gràfica 3D quan fem el plegament.
- Us proposem que doneu sis colors diferents a les arestes que en l'enunciat estan indicades com 1, 2, 3, 4, 5 i x .
- I ja podeu fer el plegament i observar quina és la solució!!!

En aquest cas la feina que fa el procediment desplegament/plegament és, exactament, la que ha de fer un concursant per a imaginar la solució del problema. És clar, doncs, que el GeoGebra ens pot ajudar molt a visualitzar aquest tipus de problemes,

(proposta 15, complementària)

24. Una formiga vol caminar per una línia marcada a la superfície d'un cub i tornar al punt de partida. Quin dels desenvolupaments següents d'un cub permet que aquest viatge sigui possible?



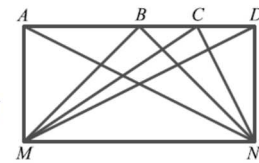
Si obriu la **proposta15.ggb** teniu un cub preparat perquè doni el desplegamet tal com es mostra en aquest enunciat. Podeu provar de dibuixar la línia d'una de les opcions de resposta. Per facilitar la feina en la figura que obrireu ja hi teniu destacats els vèrtexs i els punts mitjans de les arestes. Els que teniu en el desplegamet els necessitareu per dibuixar la línia (amb les icones de **segment** i de **arc amb centre donat**)

Nota: en algun cas els arcs dibuixats sobre el desplegamet a la finestra 2D donen "sorpreses desagradables" quan es passa al cub plegat. Podeu fer-les directament sobre el desplegamet en 3D

(proposta 16, ràpida)

9. En el rectangle $ADNM$, B és el punt mitjà del costat AD , i C és el punt mitjà del segment BD . Quin dels triangles AMN , BMN , CMN i DMN té l'àrea més petita?

- A) AMN B) CMN C) DMN D) BMN
E) Els quatre triangles tenen la mateixa àrea.



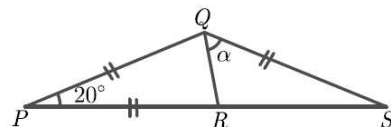
Podeu obrir **proposta16fet.ggb** i podreu comprovar que amb un punt mòbil sobre un costat d'un paral·lelogram o una de les bases d'un trapezi passa el mateix. A l'applet indicat hi teniu construït un trapezi, amb un punt P situat en el costat de dalt. Està construït el triangle MNP i, si moveu el punt P , és clar, veureu que l'àrea és sempre la mateixa.

(Proposta 17. Dues variants)

(17.1)

12. En el diagrama donat es compleix $PQ = PR = QS$ i l'angle en el vèrtex P fa 20° . Quina és la mida de l'angle α ?

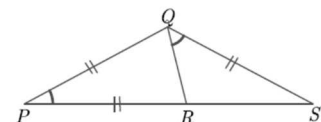
- A) 65° B) 70° C) 60° D) 50° E) 75°



(17.2)

21. En la figura tenim que $PQ = PR = QS$ i els angles \widehat{RPQ} i \widehat{RQS} també són iguals. Quin és el valor d'aquests dos angles coincidents?

- A) 40° B) 20° C) 30° D) 36° E) 45°



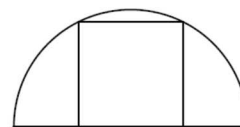
Per fer la construcció acurada (els dibuixos del cangur es donen sovint "amb trampa" perquè no agafin un transportador i ho mesurin).en aquest cas el procediment és mica subtil. Haureu de treballar amb **angle amb amplitud donada**. Ànim... i si feu la construcció només caldrà observar.

Propostes finals. Per veure la solució amb una construcció

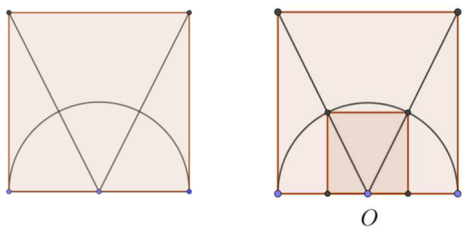
(Proposta 18, complementària)

21. Un quadrat té dos vèrtexs en una semicircumferència i els altres dos en el diàmetre, tal com mostra el dibuix. El radi de la circumferència és 1 cm. Quina és l'àrea del quadrat?

- A) $\frac{4}{5}$ cm² B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm² C) $\frac{\pi}{4}$ cm² D) 1 cm² E) $\frac{4}{3}$ cm²



Per a la solució hem de fer un raonament per Pitàgores, o amb el GeoGebra podríem fer una construcció i temptejar, o é fer la construcció exacta... que no és immediata!



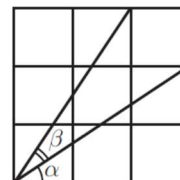
El quadrat que busquem és homotètic, amb centre en O, del quadrat construït sobre el diàmetre. Però no cal fer servir l'eina d'homotècia, només la idea conceptual. Podem acabar-lo de construir amb els punts d'intersecció i l'eina polígon regular. I aleshores observem l'àrea!

Per si fes falta, per exemple si preguntessin el costat del quadrat inscrit a la semicircumferència. coneixeu el comandament **TextValorExacte**?

(Proposta 19, complementària)

8. En la figura dibuixada sobre una quadrícula de 3×3 , quina de les afirmacions següents és certa?

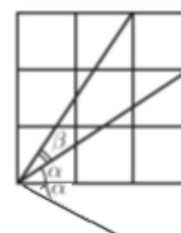
- A) $2\alpha + \beta = 90^\circ$ B) $\alpha + \beta = 45^\circ$ C) $\alpha + \beta = 60^\circ$
D) $\alpha = \beta$ E) $2\beta + \alpha = 90^\circ$



És interessant comprovar gràficament que la resposta correcta és la A. Feu la construcció de la dreta, que visualitza l'angle $2\alpha + \beta$ i observeu.

SónPerpendiculars (segment, segment)

Coneixieu aquest comandament?
Us pot anar bé!



Gràcies per la vostra atenció.

Bernat Ancochea bancoche@gmail.com
Toni Gomà agoma@xtec.cat

Atendrem amb gust les vostres consultes.