Título: Un Arbol Natural
Autor: Luis R. Morera González

Resumen

En este artículo se crea un modelo para representar los números naturales mediante un grafo, el cual consiste de de un árbol binario completo y nodos aislados ubicados en cada nivel del árbol ha partir de esto se crea lo que llamaré un árbol natural.

0) Definiciones Preliminares

Definición 1: Un grafo G es una terna ordenada (V(G), E(G), Ψ_G), que consiste de un conjunto no vacío V(G) de "vértices de G", un conjunto E(G) de "aristas de G", y una función incidente Ψ_G que asocia con cada arista de G un par no-ordenado de vértices de G.

Definición 2: Sea u, $v_1, \ldots, v_n$, v $\in$ V(G); $a_1, \ldots, a_{n+1} \in$ E(G).
Si $\{ v_i, v_{i+1}\} = \Psi_G(a_i)$, i = 1, …, n-1, diremos que $a_1, \ldots, a_{n+1}$ es un camino u – v en G. Un Ciclo es u – u camino, para cualquier u $\in$ V(G). Un grafo sin ciclos se denomina acíclico.

Definición 3: Dos vértices u y v en un grafo G están conectados, si u = v, ó $u \neq v$ implica que existe un camino u – v en G.

Definición 4: Un grafo G es conexo si todo par de vértices en G están conectados.

Definición 5: Un árbol es un grafo conexo acíclico. A uno de los nodos se le conoce como la raíz. La noción de nivel se introduce como sigue:

Nivel 0 = {raíz}

Nivel 1 = { nodos conectados por una arista con la raíz }

Nivel 2 = { nodos conectados por una arista con cualquiera del nivel 1}
⋮
Nivel n = { nodos conectados por una arista con cualquiera del nivel n-1}

Definición 6: Un árbol binario es una estructura de datos de tipo árbol en donde cada uno de los nodos del árbol puede tener 0, 1, ó 2 subárboles llamados de acuerdo a su caso como:

a) Si el nodo raíz tiene 0 relaciones se llama hoja.
b) Si el nodo raíz tiene 1 relación a la izquierda, el segundo elemento de la relación es el subárbol izquierdo.
c) Si el nodo raíz tiene 1 relación a la derecha, el segundo elemento de la relación es el subárbol derecho.

Definición 7: Un árbol binario lleno es un árbol en el que cada nodo tiene cero o dos hijos.

Definición 8: Un árbol binario perfecto es un árbol binario lleno en el que todas las hojas (vértices con cero hijos) están a la misma profundidad (distancia desde la raíz, también llamada nivel)

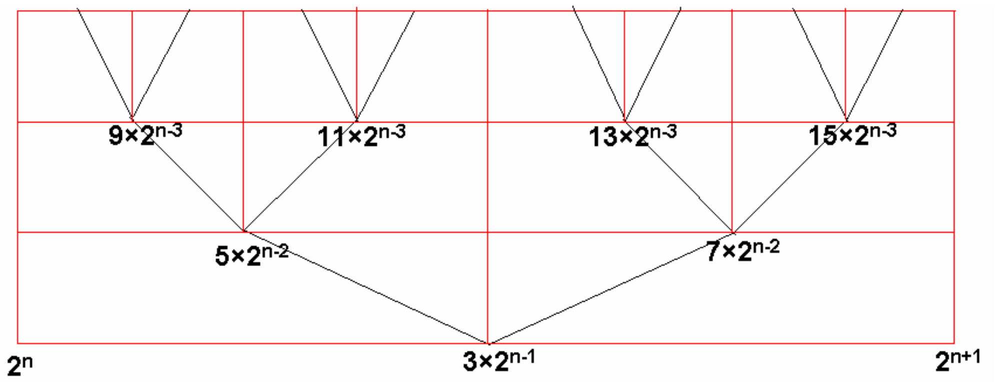
Definición 9: Un árbol binario completo es un árbol en donde cada nodo está conectado exactamente con dos nodos del nivel siguiente (a estos nodos le llamaremos hijos)

1) Modelo para los Números Naturales

A continuación se crea un modelo para representar los números naturales mediante un grafo, el cual consiste de de un árbol binario completo y nodos aislados ubicados en cada nivel del árbol ha partir de esto se crea lo que llamaré un árbol natural. En este modelo se establece una correspondencia entre los números naturales y un par ordenado de números.

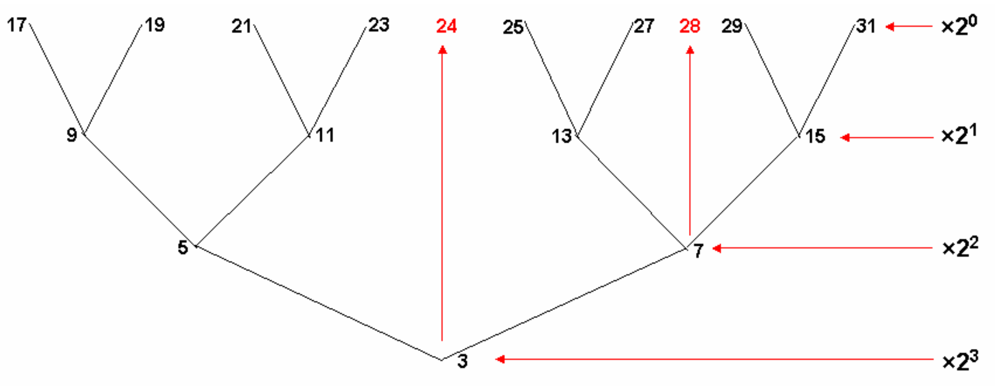
Inicialmente introduciré un modelo para los números naturales, basado en la partición $\sum_{n=0}^{\infty}[2^n,2^{n+1})$. Dado uno de estos intervalos, llamémosle $[2^n,2^{n+1})$, considerando la sucesión de puntos medios que se obtienen bisecando los intervalos, que a su vez, fueron obtenidos de bisecciones previas, tal como se muestra en la en la siguiente figura.

Figura 1



La **Figura 1** sugiere que se puede representar a los números naturales mayores que 1 en uno de los intervalos de la forma $(2^n,2^{n+1})$, donde $n > 0$, por medio de un árbol binario. La siguiente figura muestra la forma de representar a los números naturales en el intervalo $(2^4,2^5)$.

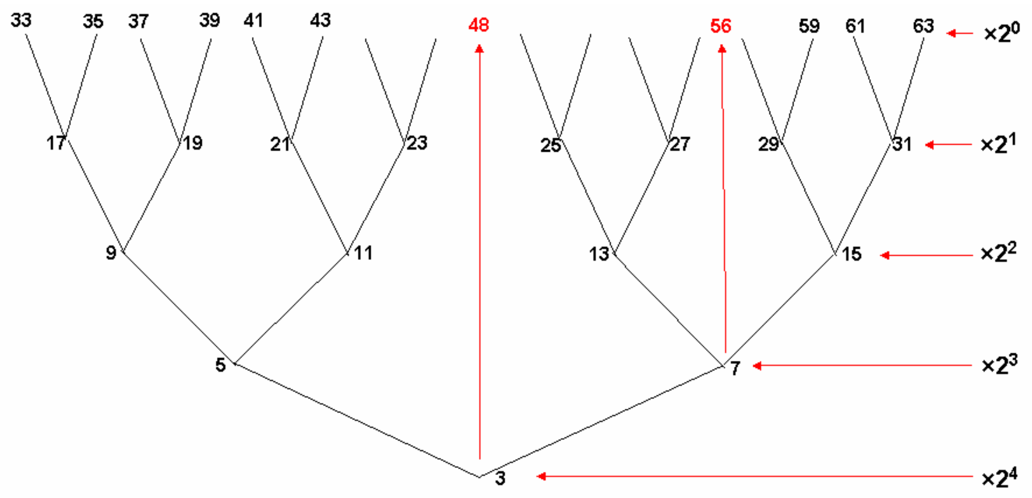
Figura 2



Los números impares en el intervalo son los nodos del árbol binario, mientras que los pares se obtienen aumentando la potencia de 2. Por ejemplo: $24 = 3 \times 2^3$ y $28 = 7 \times 2^2$.

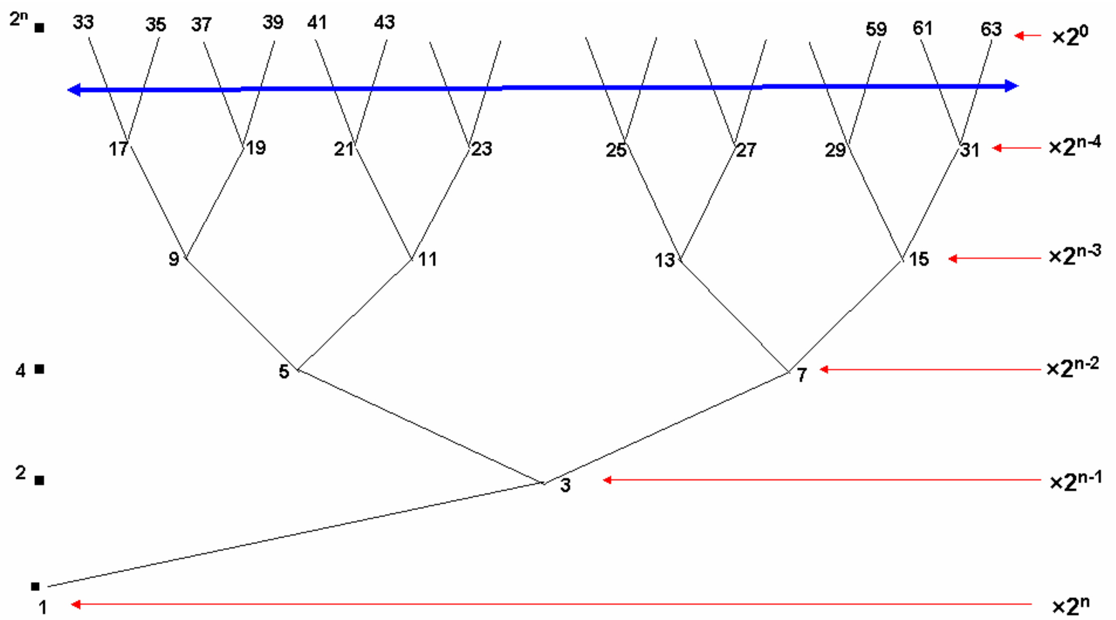
El árbol binario para el intervalo, $(2^5,2^6)$ puede ser obtenido del árbol binario de la **Figura 2**, agregando un nuevo nivel. Las etiquetas asociadas a estos nuevos nodos, son los números impares en ese nivel, mientras que las etiquetas de los otros nodos se obtienen aumentando la potencia de dos en la unidad.
(Cf. **Figura 3**)

Figura 3



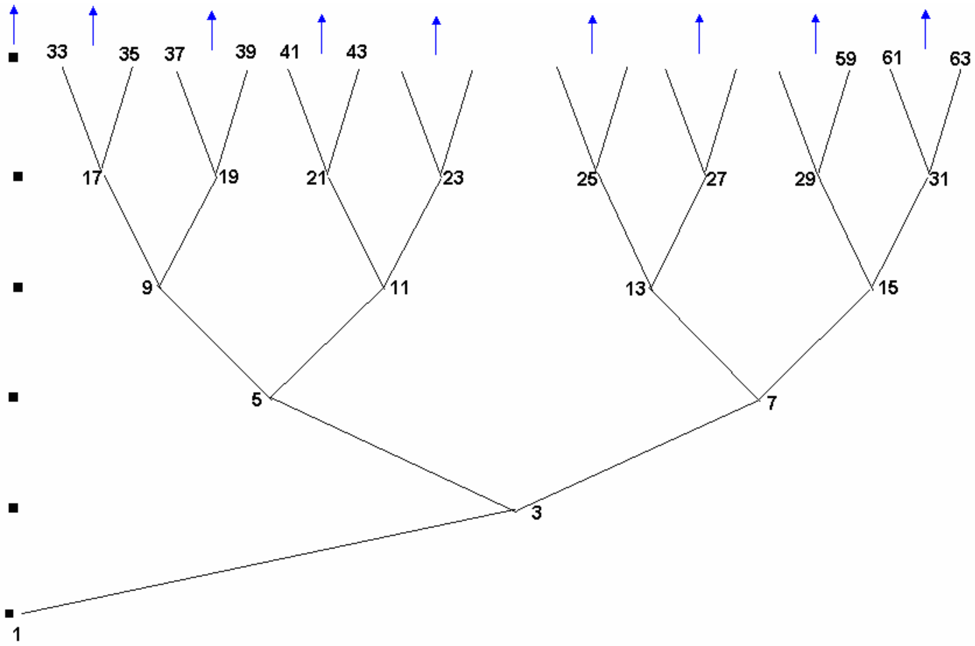
En general, los números naturales del intervalo $[2^n,2^{n+1})$ pueden ser representados por un grafo tal como se muestra en la **Figura 4**, donde se ha agregado un nodo para la raíz, etiquetado con 1, el cual representa el extremo izquierdo 2^n del intervalo usado para las bisecciones.

Figura 4



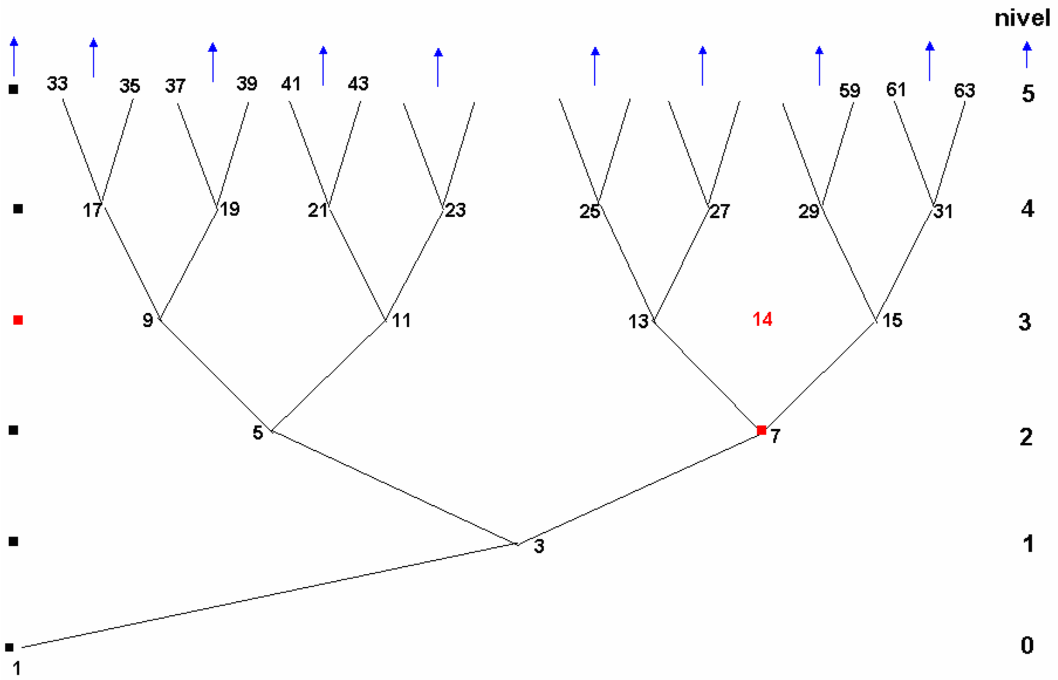
Sóbrela pando los árboles correspondientes a cada uno de los intervalos $[2^n,2^{n+1})$ podemos representar el conjunto de los números naturales mediante un grafo infinito, mostrado en la **Figura 5**. Los nodos aislados se representan como punteros e indican esencialmente el árbol al cual pertenece el nodo dado. Los nodos en el árbol binario son etiquetados con los números impares.

Figura 5



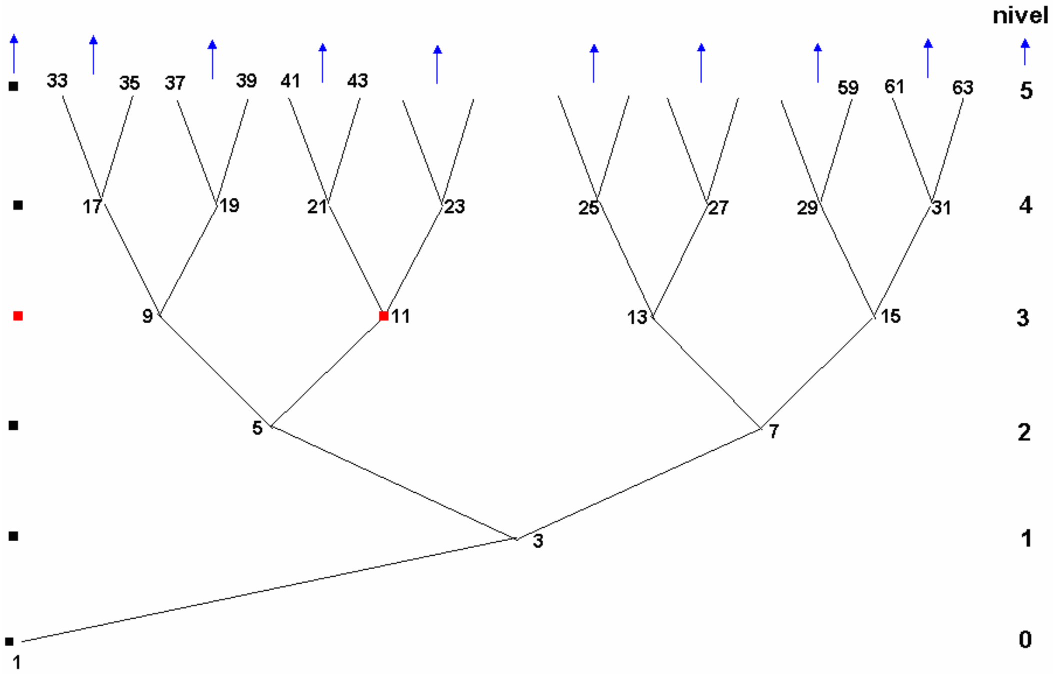
En este modelo cada número natural queda representado por un puntero y un nodo en el árbol natural. Se establece así una correspondencia ϕ entre los números naturales y un par ordenado de números. $\phi : m \rightarrow (n,k)$, donde $m = n \times 2^k$, n impar y $k \in N \cup \{0\}$. El entero no negativo n es esencialmente la etiqueta del nodo, mientras k indica el número de niveles a partir del nodo (dado por n) en donde se encuentra el puntero. En la **Figura 6**, el nodo y puntero señalizados con cuadrados rojos representan el número m = 7 × 2^1 = 14.

Figura 6



En esta representación de los números naturales, un número es par si el puntero se encuentra más arriba (en un nivel superior) del nodo y es impar si el puntero y el nodo están en el mismos nivel. En la **Figura 7** el nodo y puntero señalizados con cuadrados rojos representan el número m = 11 × 2^0 = 11.

Figura 7



En la **Figura 8,** el nodo y puntero señalizados con cuadrados rojos representan el número m = 1 × 2^3 = 8.

Figura 8