

Título: Cuadrados Latinos SMORERA
Autor : Luis R. Morera González

0. RESUMEN

Los cuadrados latinos **SMORERA** son matrices de ocho filas por ocho columnas, donde la suma de las celdas de cualquier fila ó columna tiene como resultado $S = 36$ y la suma de sus diagonales es el doble de S " $M = 2 \times S = 72$ ". Para construir estos cuadrados latinos utilizamos los primeros once términos de la sucesión de Fibonacci reducidos a un dígito.

1. Reducción de los Términos de la Sucesión de Fibonacci a un Dígito

Si tomamos cada término de la sucesión de Fibonacci que comienza en $n \in \mathbf{N}$, n no es múltiplo de 3 y la reducimos a un dígito obtenemos una nueva sucesión donde cada término de está esta dado por el residuo obtenido al dividir por 9. Por ejemplo si el término es 56 se reduce a 2. Una forma sencilla de conseguir el residuo es sumar los dígitos del término hasta que tenga un solo dígito " $56 > 5+6 > 11 > 1+1 > 2$ ".

Tabla 1

Sucesión de Fibonacci Que comienza en 1	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Sucesión de Fibonacci Reducida a un dígito	1	1	2	3	5	8	4	3	7	1	8

Es importante notar que los términos de estas sucesiones de Fibonacci reducidas serán una de las sucesiones de Fibonacci que comienzan en uno de los números naturales 1, 2, 4, 5, 7, 8. Por ejemplo si tomamos una sucesión de Fibonacci que comienza en 23 al reducir esta sucesión tenemos que es la misma sucesión reducida que comienza en 5.

Tabla 2

Sucesión de Fibonacci que comienza en 23	23	23	46	69	115	184	299	483	782	1265	2047
Sucesión de Fibonacci Reducida a un dígito	5	5	1	6	7	4	2	6	8	5	4

Por tal razón si deseamos estudiar estas sucesiones solo tenemos que estudiar 6 casos, estos son las sucesiones de Fibonacci reducidas que comienzan con los números naturales 1, 2, 4, 5, 7, 8.

Ahora estudiaremos estas 6 sucesiones:

Tabla 3

Comienza en 1	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Reducida	1	1	2	3	5	8	4	3	7	1	8
Comienza en 2	2	2	4	6	10	16	26	42	68	110	178
Reducida	2	2	4	6	1	7	8	6	5	2	7
Comienza en 4	4	4	8	12	20	32	52	84	136	220	356
Reducida	4	4	8	3	2	5	7	3	1	4	5
Comienza en 5	5	5	10	15	25	40	65	105	170	275	445
Reducida	5	5	1	6	7	4	2	6	8	5	4
Comienza en 7	7	7	14	21	35	56	91	147	238	385	623
Reducida	7	7	5	3	8	2	1	3	4	7	2
Comienza en 8	8	8	16	24	40	64	104	168	272	440	712
Reducida	8	8	7	6	4	1	5	6	2	8	1

Si a cada una de las sucesiones le eliminamos la columna 1, 4 y 8 obtenemos:

Tabla 4

Comienza en 1	1	2	5	8	13	34	55	89	
Reducida	1	2	5	8	4	7	1	8	=36
Comienza en 2	2	4	10	16	26	68	110	178	
Reducida	2	4	1	7	8	5	2	7	=36
Comienza en 4	4	8	20	32	52	136	220	356	
Reducida	4	8	2	5	7	1	4	5	=36
Comienza en 5	5	10	25	40	65	170	275	445	
Reducida	5	1	7	4	2	8	5	4	=36
Comienza en 7	7	14	35	56	91	238	385	623	
Reducida	7	5	8	2	1	4	7	2	=36
Comienza en 8	8	16	40	64	104	272	440	712	
Reducida	8	7	4	1	5	2	8	1	=36

Note que la suma de las sucesiones reducidas es 36. Además cada una de las sucesiones que comienzan en 2, 4, 5, 7, 8 son múltiplos de la sucesión que comienza en 1. Esto es la sucesión que comienza en 2 se obtiene multiplicando por 2 la sucesión que comienza en 1. En general los términos de la sucesión que comienza en n se obtienen multiplicando por n cada término de la sucesión que comienza en 1.

2. Cuadrados Latinos SMORERA

Ahora crearemos un cuadrado latino diferente lo llamaremos cuadrado latino **SMORERA** en este cuadrado la suma de todas sus filas y columnas tienen como resultado $S=36$ y la suma de sus diagonales tienen como resultado el doble de S , llamemos a esta suma M , esto es $M=2 \times S=72$. Para crear este cuadrado latino utilizaremos los primeros 11 términos de la sucesión de Fibonacci reducida que comienza en cualquier número natural n, donde n no es múltiplo de 3 y eliminando el primer, cuarto y octavo término de la sucesión. Esto es trabajaremos con los términos obtenidos en la Tabla 4. El orden de este cuadrado es **8** y recuerde que todas las sucesiones se reducen a 6 casos.

(Caso 1) Cuadrado latino **SMORERA** que comienza en 1.

Los términos de la sucesión de Fibonacci reducida son : 1, 2, 5, 8, 4, 7, 1, 8. Para producir el cuadrado latino **SMORERA** que comienza en 1 creamos la tabla pitagórica de multiplicar dada por los números obtenidos en la reducción de la sucesión de Fibonacci.

	1	2	5	8	4	7	1	8
1								
2								
5								
8								
4								
7								
1								
8								

Los números dentro de esta tabla están dados por la multiplicación de la fila y columna correspondiente reducidos a un solo dígito como se muestra en la siguiente tabla:

	1	2	5	8	4	7	1	8
1	1	2	5	8	4	7	1	8
2	2	4	1	7	8	5	2	7
5	5	1	7	4	2	8	5	4
8	8	7	4	1	5	2	8	1
4	4	8	2	5	7	1	4	5
7	7	5	8	2	1	4	7	2
1	1	2	5	8	4	7	1	8
8	8	7	4	1	5	2	8	1

El cuadrado latino **SMORERA** esta dado por los números dentro de la tabla anterior.

1	2	5	8	4	7	1	8
2	4	1	7	8	5	2	7
5	1	7	4	2	8	5	4
8	7	4	1	5	2	8	1
4	8	2	5	7	1	4	5
7	5	8	2	1	4	7	2
1	2	5	8	4	7	1	8
8	7	4	1	5	2	8	1

Cuadrado Latino SMORERA (Autor: Luis R. Morera 31 / Agosto / 06)

Note que la suma de cualquier fila o columna es $S=36$, Además la suma de las diagonales principales es el doble de S esto es $(1+4+7+1+7+4+1+1) + (8+2+8+5+5+8+2+8) = 26 + 46 = 72$, $M=2 \times 36=72$.

Para crear los otros 5 cuadrados latinos **SMORERA**, trabajamos de forma similar utilizando los términos de las otras 5 sucesiones reducidas mostradas en la **TABLA 4**.

A continuación se muestran estos cuadrados latinos **SMORERA**

4	8	2	5	7	1	4	5
8	7	4	1	5	2	8	1
2	4	1	7	8	5	2	7
5	1	7	4	2	8	5	4
7	5	8	2	1	4	7	2
1	2	5	8	4	7	1	8
4	8	2	5	7	1	4	5
5	1	7	4	2	8	5	4

Cuadrado Latino SMORERA (Autor: Luis R. Morera 31 / Agosto / 06)

7	5	8	2	1	4	7	2
5	1	7	4	2	8	5	4
8	7	4	1	5	2	8	1
2	4	1	7	8	5	2	7
1	2	5	8	4	7	1	8
4	8	2	5	7	1	4	5
7	5	8	2	1	4	7	2
2	4	1	7	8	5	2	7

Cuadrado Latino SMORERA (Autor: Luis R. Morera 31 / Agosto / 06)

7	5	8	2	1	4	7	2
5	1	7	4	2	8	5	4
8	7	4	1	5	2	8	1
2	4	1	7	8	5	2	7
1	2	5	8	4	7	1	8
4	8	2	5	7	1	4	5
7	5	8	2	1	4	7	2
2	4	1	7	8	5	2	7

Cuadrado Latino SMORERA (Autor: Luis R. Morera 31 / Agosto / 06)

4	8	2	5	7	1	4	5
8	7	4	1	5	2	8	1
2	4	1	7	8	5	2	7
5	1	7	4	2	8	5	4
7	5	8	2	1	4	7	2
1	2	5	8	4	7	1	8
4	8	2	5	7	1	4	5
5	1	7	4	2	8	5	4

Cuadrado Latino SMORERA (Autor: Luis R. Morera 31 / Agosto / 06)

1	2	5	8	4	7	1	8
2	4	1	7	8	5	2	7
5	1	7	4	2	8	5	4
8	7	4	1	5	2	8	1
4	8	2	5	7	1	4	5
7	5	8	2	1	4	7	2
1	2	5	8	4	7	1	8
8	7	4	1	5	2	8	1

Cuadrado Latino SMORERA (Autor: Luis R. Morera 31 / Agosto / 06)

3. Estudio de los Cuadrados Latinos SMORERA

Luego de observar detenidamente los cuadrados latinos **SMORERA** llegamos a la conclusión de que el cuadrado latino **SMORERA** que comienza en 1 es igual al cuadrado latino **SMORERA** que comienza en 8.

SMORERA ₁							
1	2	5	8	4	7	1	8
2	4	1	7	8	5	2	7
5	1	7	4	2	8	5	4
8	7	4	1	5	2	8	1
4	8	2	5	7	1	4	5
7	5	8	2	1	4	7	2
1	2	5	8	4	7	1	8
8	7	4	1	5	2	8	1

SMORERA ₈							
1	2	5	8	4	7	1	8
2	4	1	7	8	5	2	7
5	1	7	4	2	8	5	4
8	7	4	1	5	2	8	1
4	8	2	5	7	1	4	5
7	5	8	2	1	4	7	2
1	2	5	8	4	7	1	8
8	7	4	1	5	2	8	1

Además el cuadrado latino **SMORERA** que comienza en 2 es igual al cuadrado latino **SMORERA** que comienza en 7.

SMORERA ₂							
4	8	2	5	7	1	4	5
8	7	4	1	5	2	8	1
2	4	1	7	8	5	2	7
5	1	7	4	2	8	5	4
7	5	8	2	1	4	7	2
1	2	5	8	4	7	1	8
4	8	2	5	7	1	4	5
5	1	7	4	2	8	5	4

SMORERA ₇							
4	8	2	5	7	1	4	5
8	7	4	1	5	2	8	1
2	4	1	7	8	5	2	7
5	1	7	4	2	8	5	4
7	5	8	2	1	4	7	2
1	2	5	8	4	7	1	8
4	8	2	5	7	1	4	5
5	1	7	4	2	8	5	4

De forma similar el cuadrado latino **SMORERA** que comienza en 4 es igual al cuadrado latino **SMORERA** que comienza en 5.

SMORERA ₄							
7	5	8	2	1	4	7	2
5	1	7	4	2	8	5	4
8	7	4	1	5	2	8	1
2	4	1	7	8	5	2	7
1	2	5	8	4	7	1	8
4	8	2	5	7	1	4	5
7	5	8	2	1	4	7	2
2	4	1	7	8	5	2	7

SMORERA ₅							
7	5	8	2	1	4	7	2
5	1	7	4	2	8	5	4
8	7	4	1	5	2	8	1
2	4	1	7	8	5	2	7
1	2	5	8	4	7	1	8
4	8	2	5	7	1	4	5
7	5	8	2	1	4	7	2
2	4	1	7	8	5	2	7

∴ sólo existen **3** cuadrados latinos **SMORERA** de orden 8. Estos son los cuadrados latinos **SMORERA** que comienzan en **1, 2 y 4**.

Ahora estudiaremos algunas propiedades de los tres tipos de cuadrados latinos **SMORERA**.

Cuadrados latinos **SMORERA** que comienza en 1, 2 y 4.

SMORERA ₁								
	1	2	5	8	4	7	1	8
1	1	2	5	8	4	7	1	8
2	2	4	1	7	8	5	2	7
5	5	1	7	4	2	8	5	4
8	8	7	4	1	5	2	8	1
4	4	8	2	5	7	1	4	5
7	7	5	8	2	1	4	7	2
1	1	2	5	8	4	7	1	8
8	8	7	4	1	5	2	8	1

SMORERA ₂								
	2	4	1	7	8	5	2	7
2	4	8	2	5	7	1	4	5
4	8	7	4	1	5	2	8	1
1	2	4	1	7	8	5	2	7
7	5	1	7	4	2	8	5	4
8	7	5	8	2	1	4	7	2
5	1	2	5	8	4	7	1	8
2	4	8	2	5	7	1	4	5
7	5	1	7	4	2	8	5	4

SMORERA ₄								
	4	8	2	5	7	1	4	5
4	7	5	8	2	1	4	7	2
8	5	1	7	4	2	8	5	4
2	8	7	4	1	5	2	8	1
5	2	4	1	7	8	5	2	7
7	1	2	5	8	4	7	1	8
1	4	8	2	5	7	1	4	5
4	7	5	8	2	1	4	7	2
5	2	4	1	7	8	5	2	7

Sea **SMORERA_n** el cuadrado latino que comienza en $n = 1, 2, 4$. Los conjuntos de los números que generan estos cuadrados latinos son: $\mathbf{X}_1 = \{1, 2, 5, 8, 4, 7, \mathbf{1}, \mathbf{8}\}$, $\mathbf{X}_2 = \{2, 4, 1, 7, 8, 5, \mathbf{2}, \mathbf{7}\}$, $\mathbf{X}_4 = \{4, 8, 2, 5, 7, 1, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$ respectivamente.

Definición 1: Sea $\mathbf{R}(x,y) = (x \times y)$ módulo 9, $\forall x,y \in \mathbf{X}_n$ donde $n = 1, 2, 4$.

Note que **R** es una relación en \mathbf{X}_n , esto es así debido a que todas las parejas (x,y) satisfacen la relación **R** " $x \approx y$ ". Es fácil ver que los elementos generados por la **Definición 1** son los números de las celdas de los cuadrados latinos **SMORERA**.

La relación definida anteriormente cumple con las siguientes propiedades:

- a) Propiedad Reflexiva: $\forall x \in \mathbf{X}_n \Rightarrow x \approx x$
- b) Propiedad Simétrica: $\forall x,y \in \mathbf{X}_n$ se cumple $x \approx y \Rightarrow y \approx x$
- c) Propiedad Transitiva: $\forall x,y,z \in \mathbf{X}_n$ se cumple $x \approx y, y \approx z \Rightarrow x \approx z$

Note que la relación **R** es una relación de equivalencia debido a que es reflexiva, simétrica y transitiva. \therefore el conjunto formado por todos los elementos de la relación **R** es una clase de x módulo **R** " $C_x=[x]$ ", esto es que todo $x \in \mathbf{X}_n$ también pertenece a C_x . Esto implica que los elementos de cualquier cuadrado latino **SMORERA** forman clases de equivalencia módulo **R**.

4. Cuadrado Latino SMORERA de Orden 6.

Al observar los conjuntos \mathbf{X}_n , que generan los cuadrados latinos **SMORERA** " $\mathbf{X}_1 = \{1, 2, 5, 8, 4, 7, \mathbf{1}, \mathbf{8}\}$, $\mathbf{X}_2 = \{2, 4, 1, 7, 8, 5, \mathbf{2}, \mathbf{7}\}$, $\mathbf{X}_4 = \{4, 8, 2, 5, 7, 1, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$ ", podemos notar que en cada conjunto hay elementos repetidos. Si eliminamos esos elementos tenemos que $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_4 = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

Si utilizamos los 6 números de este conjunto y creamos una tabla pictórica de multiplicación, creamos un cuadrado latino **SMORERA** de orden 6, en este cuadrado la suma de cualquier fila o columna es $\mathbf{S} = 27$ y la suma de sus diagonales es $\mathbf{M} = 2 \times \mathbf{S} = 2 \times 27 = 54$.

	1	2	4	5	7	8
1	1	2	4	5	7	8
2	2	4	8	1	5	7
4	4	8	7	2	1	5
5	5	1	2	7	8	4
7	7	5	1	8	4	2
8	8	7	5	4	2	1

1	2	4	5	7	8
2	4	8	1	5	7
4	8	7	2	1	5
5	1	2	7	8	4
7	5	1	8	4	2
8	7	5	4	2	1

Cuadrado Latino SMORERA (Autor: Luis R. Morera 8 / Septiembre / 06)

Bibliografía

P Alegría, J Ruiz: *La Matemática Desvelada.*

http://www.telefonica.net/web2/b03sestao/matematica/videos/La_magia_desvelada.pdf

W Andrews: *Magic Squares and Cubes.* Dover, Nueva York, 1960.

B Figueroa: *Los Fascinantes Cuadrados Mágicos,* 2006. <http://www.xtec.es/~bfiguera/curioso7.html>

C Pickover: *The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars.* Princeton University Press, Nueva Jersey, 2003.

Wikipedia: *Cuadrados Mágicos,* 2007. http://es.wikipedia.org/wiki/Cuadrado_m%C3%A1gico

L Morera es catedrático auxiliar en matemáticas en la Universidad Interamericana de Puerto Rico, Recinto de Guayama.

E-mail : lrmorera@mailcity.com