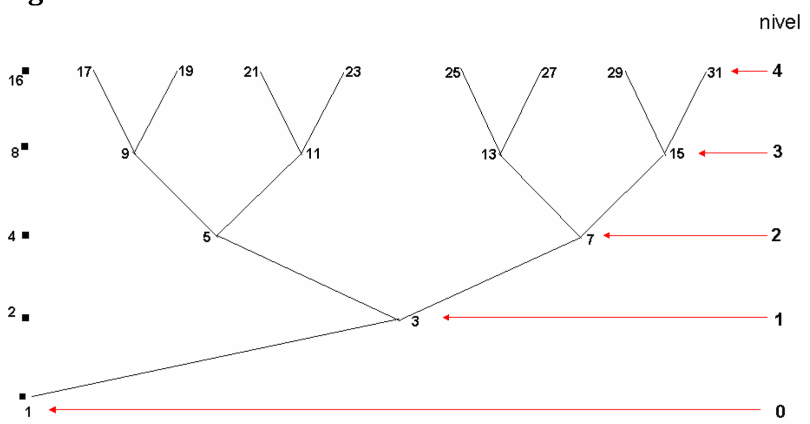
Título: Saltos en un Arbol Natural
Autor: Luis R. Morera González

En este artículo se define un tipo de salto hacia abajo en un árbol natural. Este salto es de naturaleza gráfica, lo cual implica que el salto depende le la posición de los nodos en el árbol natural. Para enfatizar la naturaleza gráfica de un árbol natural, introduciré la siguiente terminología:

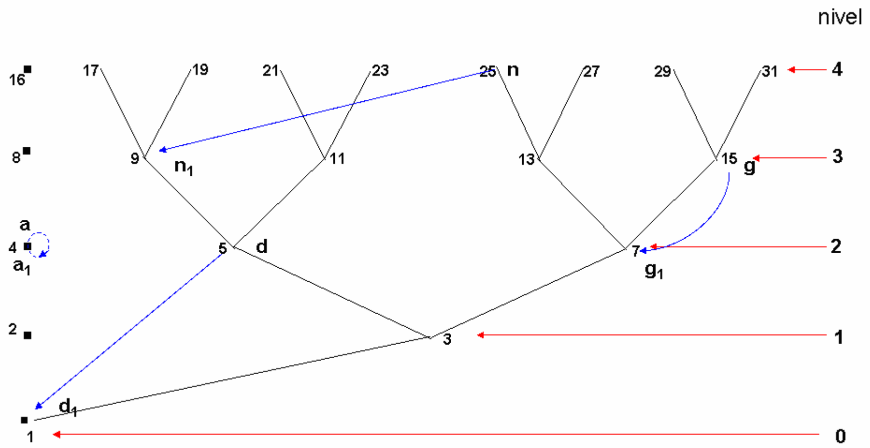
Un grafo conexo estructurado por niveles un salto es cualquier correspondencia (inyectiva) que relaciona nodos en diferentes niveles del grafo. Si el grafo estructurado por niveles tiene más de una componente conexa, el salto deja las componentes invariantes. Si esta correspondencia es decreciente con respecto al nivel, en el sentido de que el nodo correspondiente pertenece a un nivel inferior, diremos que el salto es hacia abajo. En forma análoga se definen los saltos hacia arriba.

Figura 1



Dado un árbol natural (**Figura 1**), Sea P(n) la posición que ocupa el nodo n, contando a partir del primer nodo de su nivel que pertenece al árbol binario completo. Por ejemplo P(25) = 5, P(15) = 4, esto implica que $P(n) = \dfrac{n - 2^{L(n)} + 1}{2}$, donde L(n) es el nivel del nodo n en el árbol natural. Note que L(25) = 4, L(15) = 3. Definamos el salto J_{d1} como la correspondencia que envía el nodo n al nodo n_1 que se obtiene contando P(n) nodos comenzando por la raíz en el árbol binario. El salto J_{d1} para los nodos aislados lo envía al el mismo nodo. (Cf. **Figura 2**)

Figura 2



Tal como se puede observar en la **Figura 2**, el salto envía el nodo n = 25 al nodo $n_1 = 9$; el nodo g = 15 al nodo $g_1 = 7$; el nodo d = 5 al nodo $d_1 = 1$ y el nodo a = 4 al nodo $a_1 = 4$.

El siguiente teorema explica algebraicamente el salto hacia abajo J_{d1}.

Teorema del salto J_{d1}

Sea n la etiqueta de un nodo en el árbol binario completo que se encuentra en el árbol natural, la correspondencia J_{d1} esta dada por:

$J_{d1} : n \to n_1 = n - 2^{L(n)}$, donde $L(n) = \mathrm{Max}\{k1 : \frac{n}{2^{k1}} > 1\}$; k1 es un entero no negativo.

Demostración:

Como $P(n) = \frac{n - 2^{L(n)} + 1}{2}$; tenemos que: $J_{d1}(n) = 2 \times P(n) - 1 = 2\left[\frac{n - 2^{L(n)} + 1}{2}\right] - 1 = n - 2^{L(n)}$.

Recuerde que para los nodos aislados se define: $J_{d1} : n \to n$.╣

El salto J_{d1} puede extenderse a todos los números naturales mayores que 1, representados mediante el árbol natural, recordando la representación de aquellos números de la forma m = (n,k) con k distinto de cero, que no son nodos del árbol natural "recuerde que k indica el número de niveles a partir del nodo (dado por n) en donde se encuentra el puntero", se define:
$J_{d1} : m \to m_1 = 2^k \left(n - 2^{L(n)}\right)$, esto es subir k niveles el salto J_{d1} de n.

La **Figura 3** y **4**, muestran el salto $J_{d1}(14)$ y $J_{d1}(28)$ respectivamente.

Figura 3

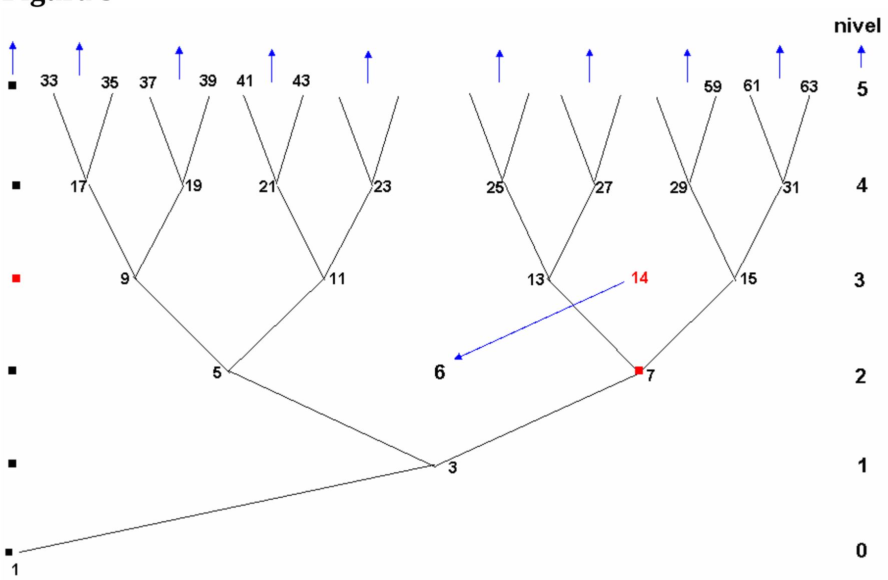
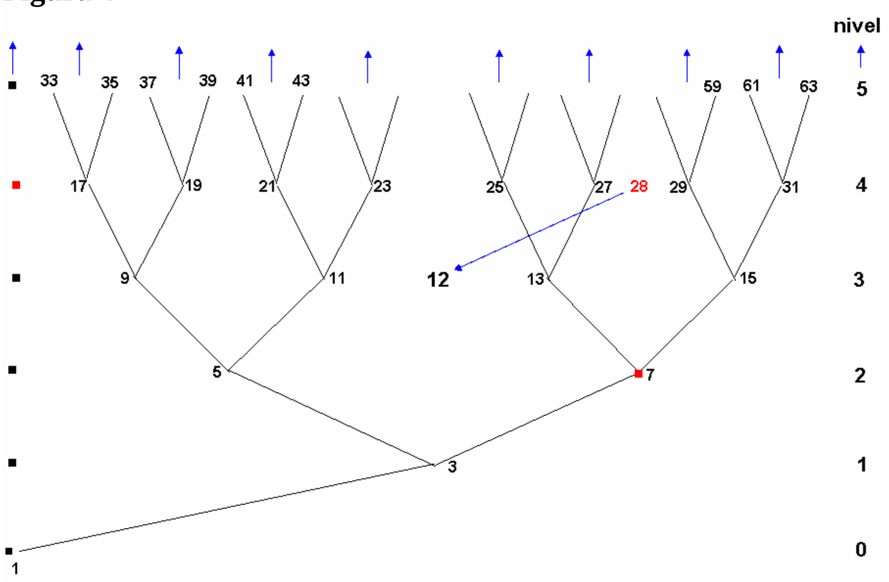


Figura 4



Referencias:

Morera González, Luis R. (2008)
Un Arbol Natural. http://www.articuloweb.com/articles.php?art_id=511&start=1