CARLOS GIRALDO OSPINA
Lic. Matemáticas, USC, Cali, Colombia
MATEMÁTICA INSÓLITA

TEOREMA DE COLLATZ

INTRODUCCIÓN

Löthar Collatz, en 1937, formuló la conjetura que posee el récord de nombres: Problema $3n+1$, Cartografía $3x+1$, Algoritmo de Hasse, Problema de Kakutani, Algoritmo de Syracuse, Conjetura de Thwaites y Problema de Ulam.

Se presume que un número significativo de matemáticos inquietos se encuentran concentrados en el intento de demostrar la famosa conjetura de Löthar Collatz respecto del algoritmo $3n+1$.

- ¿Qué dice dicha conjetura?

1. Inicie con cualquier número par, divida sucesivamente por 2 hasta que obtenga un impar; triplique el resultado, sume 1 y divida por dos hasta obtener otro número impar. Repita el proceso. Siempre llegará a 1 para todo número de inicio (conjetura).
2. Inicie con uno impar, realice las reglas del juego (triplicar y sumar 1, luego dividir por 2) e igual llegará a 1. (conjetura).

ALGORITMO Y CONJETURA DE LÖTHAR COLLATZ

$Inicio\ w_0 \Rightarrow w_1 = \frac{w_0}{2} \vee w_1 = 3w_0 + 1,\ \ w_n = \frac{w_{n-1}}{2}\ si\ w_{n-1}\ par,$

$w_n = 3w_{n-1} + 1\ si\ \ w_{n-1}\ \ impar$ Conjetura: Todo natural desciende a 1 al aplicársele el algoritmo $3n+1$

En este documento se prescinde de los números pares y solo se listarán los impares; una razón es que todo par es divisible por su máximo factor 2^x, la otra radica en facilitar la demostración.

Ejemplo: $w_0 = 9$ Algoritmo $3n+1$: $9, 7, 11, 17, 13, 5, 1, 1, 1, \cdots$

La demostración de la conjetura exige dos condiciones: La primera requiere demostrar que solo existe el ciclo $\{1, 1, 1, \cdots\}$ para el algoritmo $3n+1$, la segunda exige demostrar que no existe ningún natural que descienda al infinito.

CICLOS

Un ciclo puede constar de uno o varios elementos que se suceden indefinidamente, se usarán los prefijos acostumbrados para denotar la cantidad de elementos que componen el ciclo: monociclo, biciclo, triciclo, tetraciclo, pentaciclo, etc. Ejemplo: El ciclo $\{3,3,3,\cdots\}$ posee solamente el elemento repetitivo 3 y por ello se denomina monociclo $\{3,3,3,\cdots\}$ Se denominará *ecuación $i-ciclo$* a la expresión que determina los i elementos de un ciclo (o de varios, pueden existir ciclos diferentes con igual cantidad de elementos).

MONOCICLOS $Ln+c$ TEOREMA MONOCICLO

Todo algoritmo Collatz $Ln+c$; L,c *impares* posee el monociclo $\{a, a, a,\cdots\}$ si $L = 2^m - \frac{c}{a}$

Algoritmo $Ln+c$: $a, a, a\cdots$; $a = \dfrac{La+c}{2^m} \Rightarrow L = 2^m - \frac{c}{a} \Rightarrow c \geq a, \quad c = au$

Corolario: Algoritmo $3n+1$: $L=3, \quad c=1 \quad 3 = 2^m - \frac{1}{a} \Rightarrow 1 = au \Rightarrow a=1, \quad u=1$; por tanto, el algoritmo $3n+1$ posee el monociclo $\{1, 1, 1,\cdots\}$

MONOCICLO ÚNICO PARA $3n+1$

Teorema de unicidad monocíclica. El único monociclo del algoritmo $3n+1$ es $\{1, 1, 1,\cdots\}$

Si se desea saber cuántos monociclos genera el algoritmo $3n+1$ entonces aplicamos las correspondientes ecuaciones así:

Monociclos $3n+1$, $a = \dfrac{La+c}{2^m} \Rightarrow L = 2^m - \frac{c}{a} \Rightarrow c \geq a, \quad c = au$

$a = \dfrac{3a+1}{2^m} \Rightarrow L = 2^m - \frac{1}{a} \Rightarrow a = 1, \textit{único valor}$; por consiguiente, dado que solo existe un valor para a entonces es imposible que el algoritmo $3n+1$ genere más de un monociclo.

BICICLOS $Ln+c$

Predecir si un algoritmo de Collatz genera ciclos de más de un elemento es relativamente fácil.

Algoritmo $Ln+c$ Biciclo: $\{a, b, a, b, a, b,\cdots\}$

1. $b = \dfrac{La+c}{2^p}$ 2. $a = \dfrac{Lb+c}{2^q} \Rightarrow b = \dfrac{2^q a - c}{L}$

3. $a = \dfrac{2^p c + Lc}{2^{p+q} - L^2}$, Resolviendo el sistema 1. y 2.

4. $a = \dfrac{2^p c + Lc}{2^{p+q} - L^2}$ (ecuación o función biciclo, $p \neq 0, q \neq 0$) solo es posible para el menor valor de $p+q$ que hace positivo el denominador, dado que L y c son invariantes. Si existe biciclo entonces *la ecuación biciclo solo debe generar dos valores naturales para parejas* (p,q)*; de lo contrario no es función biciclo.*

Biciclos $3n+1$:

1. $a = \dfrac{2^p c + Lc}{2^{p+q} - L^2} \qquad a = \dfrac{2^p + 3}{2^{p+q} - 9} \Rightarrow p+q = 4 \Rightarrow a = \dfrac{2^p + 3}{7} \Rightarrow p = 2,\ a = 1$

$$p+q = 4 \quad \Rightarrow \quad (p,\ q) \in \{(3,\ 1),\ (2,\ 2),\ (1,\ 3)\}$$

2. Del hecho de ser único el valor de a se deriva la imposibilidad de existencia de biciclo para el algoritmo $3n+1$; además, ya sabemos que para $a=1$ se está descendiendo al único monociclo.
3. De otra parte, $\lim\limits_{p+q\to\infty} \dfrac{2^p+3}{2^{p+q}-9} = \dfrac{1}{2^q}$ *si q no varia* o $\lim\limits_{p+q\to\infty} \dfrac{2^p+3}{2^{p+q}-9} = 0$ *si* $p,\ q$ tienden, ambos o solo el segundo, a infinito; lo que significa acotamiento de la función biciclo $3n+1$.

4. Por tanto, no existe biciclo para el algoritmo $3n+1$

Triciclo Algoritmo $Ln+c$: $\{a,\ b,\ d,\ a,\ b,\ d,\cdots\}$

1. $b = \dfrac{La+c}{2^p}$ 2. $d = \dfrac{Lb+c}{2^q}$ 3. $a = \dfrac{Ld+c}{2^r} \Rightarrow d = \dfrac{2^r a - c}{L}$

4. $a = \dfrac{2^{p+q} c + 2^p Lc + L^2 c}{2^{p+q+r} - L^3}$, resolviendo el sistema 1, 2, 3.

5. Algoritmo $3n+1$

$$a = \frac{2^{p+q} + 3\cdot 2^p + 9}{2^{p+q+r} - 27} \Rightarrow p+q+r = 5 \Rightarrow \frac{2^{p+q} + 3\cdot 2^p + 9}{2^5 - 27} = \frac{2^{p+q} + 3\cdot 2^p + 9}{5}$$

6. La suma de los tres términos del numerador no es múltiplo de 5 para ninguno de los valores posibles de p, q; por tanto, $a = \dfrac{2^{p+q} + 3\cdot 2^p + 9}{5} \notin N$ y, por consiguiente, no existe triciclo para el algoritmo $3n+1$.

TEOREMA TRICICLO

$$a = \frac{2^{p+q} + 3 * 2^p + 3^2}{2^{p+q+r} - 3^3},\ p,q,r \in N \Rightarrow a \notin N,$$

1. $Sea\ a = \dfrac{2^{p+q} + 3 * 2^p + 3^2}{2^{p+q+r} - 3^3},\ a \in N,\ a\ impar \Rightarrow 2^{p+q+r} a - 3^3 a = 2^{p+q} + 3 * 2^p + 3^2$

2. $3^2 + 3^3 a = 2^{p+q+r} a - 2^{p+q} - 3 * 2^p \Rightarrow 3^2 = \dfrac{2^{p+q+r} a - 2^{p+q} - 3 * 2^p}{3a+1}$, $3a + 1 = 2^x h,\ x > 0$
3. $3^2 = \dfrac{2^P (2^{q+r} a - 2^q - 3)}{2^x h} = \dfrac{2^{p-x} (2^{q+r} a - 2^q - 3)}{h}$
4. $\dfrac{2^{q+r} a - 2^q - 3}{h} = k,\ k\ impar$ por ser numerador y denominador impares.
5. $3^2 = 2^{p-x} k$
6. Si $p - x > 0 \quad \vee \quad p - x < 0$ entonces la igualdad del numeral 5 es absurda en **N**
7. Supóngase $p - x = 0 \quad \Rightarrow \quad p = x$
8. $3^2 = k$ según 5 y 6, igualdad en *apariencia* válida en N, por ser k impar, según 4.
9. $a_{(p)} = \dfrac{2^{p+q} + 3 \cdot 2^p + 3^2}{2^{p+q+r} - 3^3} \Rightarrow \lim_{p+q+r \to \infty} \dfrac{2^{p+q} + 3 \cdot 2^p + 3^2}{2^{p+q+r} - 3^3} = \dfrac{1}{2^r}$
10. $a_{\max} = \frac{49}{5} \notin N, \quad a \neq 7, 5, 3, 1$
11. Los resultados de 9 y 10 contradicen el supuesto inicial y, en consecuencia, la suposición del numeral 7.
12. El supuesto del numeral 1 es incorrecto, según 6. y 11. **hqd.**

NOTAS.

- Si en $3^2 = \dfrac{2^{q+r} a - 2^q - 3}{h}$ se sustituye a por su equivalente $a = \dfrac{2^p h - 1}{3}$, al que obliga la suposición del numeral 7, entonces se obtiene $3^3 = 2^{p+q+r} - \dfrac{2^{q+r} + 3 * 2^q + 3^2}{h}$, expresión alternativa que sirve para probar la contradicción generada por $p - x = 0 \quad \Rightarrow \quad p = x$.

- La suposición del numeral 7 se considera extraña para la demostración general de inexistencia de policiclo para el algoritmo $3n + 1$ dado que, por ejemplo, contradice el Teorema Triciclo $3n + 1$.

- El Teorema Triciclo es símil del Teorema General Policiclo $3n + 1$ y, en consecuencia, se considera innecesaria la demostración genérica de inexistencia de policiclo $3n + 1$

TETRACICLOS y PENTACICLOS $Ln + c$

Para determinar la ecuación que permite averiguar si un algoritmo posee ciclos de i cantidad de elementos no es necesario resolver el correspondiente sistema de ecuaciones, las anteriores y las dos siguientes le indicarán el formato general para cualquier i–ciclo, siendo i la cantidad de elementos del ciclo. Sin embargo, usted puede desarrollar el proceso inductivo y escribir la ecuación general aplicando todas las exigencias de notación general; para los efectos de este documento no estamos interesados en dichos detalles.

Tetraciclos $\quad a = \dfrac{c(2^{p+q+r} + 2^{p+q}L + 2^p L^2 + L^3)}{2^{p+q+r+s} - L^4}$

Pentaciclos: $\quad a = \dfrac{c(2^{p+q+r+s} + 2^{p+q+r}L + 2^{p+q}L^2 + 2^p L^3 + L^4)}{2^{p+q+r+s+t} - L^5}$

El policiclo define el máximo exponente (cantidad de elementos del policiclo) de L en la correspondiente ecuación.

ALGORITMO $3n+1$, POLICICLOS

En la ecuación ***i*–ciclo** los ***i*** valores naturales de ***a*** (si existen) se generan para el menor exponente que hace positivo el denominador; para todo exponente mayor que dicho mínimo el denominador será positivo.

1. $a_i = \dfrac{2^{p+q+r+\dots} + 3\cdot 2^{p+q+\dots} + \dots + 3^{i-2}\cdot 2^p + 3^{i-1}}{2^{p+q+r+s+\dots} - 3^i} \notin N, \forall i \geq 3$, por tanto, no existen policiclos para el algoritmo $3n+1$.

2. a_i es máximo si cada exponente $q, r, s, \cdots$ equivale a 1 y entonces la expresión del numeral 6. se transforma en $a_i = \dfrac{(3^{i-1} - 2^{i-1})2^p + 3^{i-1}}{2^{p+i-1} - 3^i}$

3. $\lim\limits_{p\to\infty} a_i(p) = \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{(3^{i-1} - 2^{i-1})2^p + 3^{i-1}}{2^{p+i-1} - 3^i} = \dfrac{3^{i-1} - 2^{i-1}}{2^{i-1}} = \dfrac{3^{i-1}}{2^{i-1}} - 1$, como puede observarse, para ningún valor de i se obtienen naturales hacia el infinito.

TEOREMA UNICICLO $3n+1$

Teorema: El algoritmo $3n+1$ solo genera el ciclo $\{1, 1, 1, \cdots\}$

1. Ya se demostró que el algoritmo solo genera el monociclo $\{1,1,1, \dots\}$ y carece de biciclo.
2. La ecuación **i – ciclo** generalizada no produce naturales para $i \geq 3$

3. Por tanto, el único ciclo del algoritmo $3n+1$ es $\{1, 1, 1, \cdots\}$ **hqd.**

PROPIEDAD COLLATZISTA

$$a, x \in N \wedge \frac{3a+1}{2^x} > a \quad \Rightarrow \quad 2^x < 3 + \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad 2^x < 4 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Dado que el único ciclo al que puede descenderse aplicando el algoritmo de Collatz es $\{1, 1, 1, ...\}$, entonces solo queda el interrogante de si existe algún natural tal que al iterarse el algoritmo $3n+1$ se descienda al infinito. La propiedad Collatzista sirve para resolver el interrogante.

TEOREMA INDESCENSO $3n+1$

Ningún natural desciende al infinito mediante $3n+1$

1. Supóngase que algún granizo descienda estrictamente al infinito, es decir, cada granizo subsiguiente es siempre mayor que el anterior.

2. Sea a el hipotético granizo y aplíquese sucesivamente el algoritmo $3n+1$

3. $a, \frac{3a+1}{2}, \frac{9a+5}{4}, \frac{27a+19}{8}, \cdots, \frac{3^m a + 3^m - 2^m}{2^m} \cdots$ según 2. y la propiedad Collatzista.

4. $\frac{3^m a + 3^m - 2^m}{2^m} = \frac{3^m (a+1)}{2^m} - 1$

5. $\frac{3^m (a+1)}{2^m} - 1 = 2^x y + 1 \Rightarrow a = \frac{2^m (2^x y + 2)}{3^m} - 1$

6. Conociendo que nuestra misión consiste en buscar el hipotético a, entonces transformamos la expresión $a = \frac{2^m (2^x y + 2)}{3^m} - 1$ en la función $f(m, x, y) = \frac{2^m (2^x y + 2)}{3^m} - 1$, dado que a es desconocido. La búsqueda del hipotético a exige una función que permita hallarlo y ésa es, precisamente, la función que hace matemáticamente viable la búsqueda.

7. $f(m, x, y) \to -1$ cuando sus variables tienden a infinito y ello significa que si existiera el hipotético a para el descenso a infinito con el algoritmo $3n+1$, entonces dicho número sería -1 o, si se quiere, 1… Pero para 1, 3, 5, 7 se desciende al ciclo $\{1, 1, 1, ...\}$. *En consecuencia, no existe descenso al infinito*.

==

NOTA: Es suficiente con el descenso estricto al infinito, el descenso en zigzag conduce a una demostración, esencialmente, igual a la anterior; aunque la expresión, en apariencia, resulte más complicada (debido a que se debe acudir al empleo de subíndices).

CONCLUSIÓN: Para buscar un hipotético número que descienda al infinito con el algoritmo $3n+1$, no hay que viajar hacia el infinito… ¡Se *debe viajar hacia cero: misión imposible*!

TEOREMA COLLATZ $3n+1$

Todo natural desciende al ciclo $\{1, 1, 1, \cdots\}$ mediante el algoritmo $3n+1$

Demostración

1. El algoritmo Collatz $3n+1$ solo admite el ciclo $\{1, 1, 1, ...\}$, Teorema Uniciclo

2. No existe descenso al infinito para el algoritmo $3n+1$. Teorema Indescenso

3. Todo natural desciende al ciclo $\{1, 1, 1, ...\}$ mediante $3n+1$, según 1. y 2. **h.q.d.**

Curiosidad: $w_0 < w_1 < w_2 < w_3 < \cdots < \cdots < w_x > w_{x+1}, \quad x = 10^u - 1, \quad w_0 = 2^{10^u} - 1, u \in N$ se cumple $\forall u \in N$ al iterarse el algoritmo $3n+1$. Naturalmente, la prueba no la puede realizar mediante programa de ordenador si, por ejemplo, $u = 10^4$… pero puede efectuarla, sin auxilio del autómata, para $u = 1$ y demostrarla $\forall u \in N$

INDUCCION COMPLETA Y TEOREMA DE COLLATZ

Principio de Inducción completa $A_n = \{A_1, A_2\ A_3, ...\}$ La proposición general A es cierta.

Proceso de inducción completa

1. A_1 es cierta

2. Suponer que A_n es cierta

3. Mediante *algún razonamiento matemático* demostrar la validez de A_{n+1}

El Principio de Inducción completa afirma que si es ejecutable el proceso anterior entonces son válidas todas las proposiciones de la sucesión A_n, y la proposición general A queda probada mediante dicho proceso; es decir $A_n \Rightarrow A_{n+1}$

- *¿Es aplicable el Principio de inducción completa para demostrar la conjetura de Collatz?*

- *Es factible, modificando el enunciado de la conjetura.*
- *¿Al modificar el enunciado, se gana o se pierde en generalidad?*
- *Inicialmente, en apariencia, se pierde.*
- *¿Cuál es dicho enunciado?*
- Todo $w_x \leq 4w-1$, w *impar*, *desciende a* $\{1, 1, 1,...\}$ *al aplicársele el algoritmo Collatz* $3n+1$

CONJETURA DE COLLATZ Y EL CAMINO DE LA INDUCCIÓN COMPLETA

El Teorema de Wailly, reducido aquí a su forma más elemental y particular, constituye el *«algún razonamiento matemático»* que permite la demostración de la conjetura de Collatz mediante inducción completa.

TEOREMA DE WAILLY *(Formato elemental y particular)*

Toda pareja $(w_0, 4w_0+1)$ de granizos impares desciende al mismo ciclo al aplicarse a sus componentes el algoritmo Collatz $3n+1$

Demostración

1. Algoritmo $3n+1$: $\{w_0, w_1, w_2, w_3,...\}$, $w_1 = \dfrac{3w_0+1}{2^h}$
2. Algoritmo $3n+1$: $\dfrac{3(4w_0+1)+1}{2^k} = \dfrac{12w_0+4}{2^k} = \dfrac{4(3w_0+1)}{2^k} = \dfrac{3w_0+1}{2^{k-2}} = w$
3. $w_1 = \dfrac{3w_0+1}{2^h} \wedge w = \dfrac{3w_0+1}{2^{k-2}} \Rightarrow w_1 = w$, dada la igualdad de numeradores y que los denominadores representan el máximo divisor par de ellos; es decir, $2^h = 2^{k-2}$.
4. Por tanto, Algoritmo $3n+1$: $\{w_0, w_1, w_2, w_3, ...\}$ y $\{4w_0+1, w_1, w_2, w_3, ...\}$ **hqd.**

Teorema de Collatz Todo *natural desciende a* $\{1, 1, 1,...\}$ *al aplicársele el algoritmo Collatz* $3n+1$

Demostración mediante inducción completa

1. $w=1 \Rightarrow 4w-1=3$; $1 \wedge 3$ descienden, ambos, a $\{1, 1, 1,...\}$ mediante $3n+1$.
2. $w=5 \Rightarrow 4w-1=19$; $1, 3, 5, 7, ..., 19$ descienden a $\{1, 1, 1,...\}$ mediante $3n+1$.

3. Supóngase que todo $w_x \leq 4w-1$, *w impar desciende a* $\{1, 1, 1, ...\}$ mediante $3n+1$.

4. w y $4w+1$ descienden al mismo ciclo mediante $3n+1$, Teorema de Wailly.

5. $4w+1$ es el siguiente de $4w-1$, el primero desciende al mismo ciclo que el segundo, según 3 y 4.

6. $w_n = 4w-1 \Rightarrow w_{n+1} = 4w+1$

7. Todo impar desciende al ciclo $\{1, 1, 1, ...\}$ mediante $3n+1$, según 5 y 6.

8. Todo par es el producto de una potencia de 2 por algún impar y, por tanto, desciende a dicho impar al aplicársele el algoritmo $3n+1$.

9. Todo natural desciende al ciclo $\{1, 1, 1, ...\}$, según 7 y 8. **hqd.**

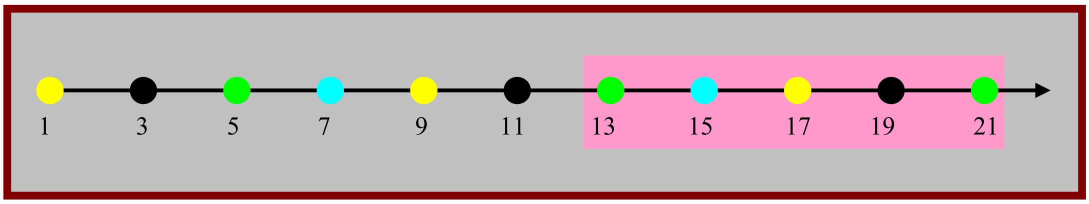
NOTAS

- ❖ El anterior proceso demostrativo indica que no es necesario demostrar la existencia de ciclo único para el algoritmo $3n+1$, si la conjetura se demuestra mediante inducción completa.

- ❖ La inducción completa, además, muestra que tampoco es exigible demostrar que ningún natural desciende al infinito al aplicársele el algoritmo $3n+1$.

- ❖ Sin embargo, es demostrable la existencia de ciclo único y el no descenso al infinito para el algoritmo $3n+1$. Las dos demostraciones mencionadas constituyen otra demostración de la conjetura de Collatz, demostración en la que no es necesario el Teorema de Wailly.

Visualización del proceso de Inducción completa aplicado a la conjetura de Collatz



Entre los productos (círculos verdes) de dos impares sucesivos por 4 y la adición de la unidad existen siempre tres impares; ejemplo $4*1+1=5,\ 4*3+1=13$; entre 5 y 13 se encuentran tres impares. Esta propiedad implica clasificar los impares en cuatro clases definidas por las sucesiones $8m+1,\ 8m+3,\ 8m+5\ y\ 8m+7$

1. Los números representados con círculo verde constituyen la clase $8m+5$, cada uno de los cuales desciende al ciclo de otro menor. Afirmación que se justifica así: $w < 4w+1$; $w \wedge 4w+1$ descienden al mismo ciclo, según Teorema de Wailly; es decir, cada número representado por círculo verde desciende al ciclo de otro menor.

   Sea D la distancia entre $w \wedge 4w+1$, entonces $D = 3w+1$; es fácil analizar el significado de la distancia y lo que implica en términos del principio de inducción completa.

2. Cada número de clase $8m+1$ (representada por círculos amarillos) desciende inmediatamente a $6m+1$ al aplicársele el algoritmo $3n+1$; $6m+1 \leq 8m+1$; $D = 2m$. Por tanto, en general todo número de forma $8m+1$ desciende al mismo ciclo de otro menor.

3. Cada número de clase $8m+3$ (representada por círculos negros) desciende inmediatamente a $12m+5$; $12m+5 = 4(3m+1)+1 = 4u+1$. Por consiguiente, el granizo $12m+5$ al que desciende inmediatamente $8m+3$ comporta las propiedades de lo dicho en los numerales anteriores, según m sea par o impar. Ejemplo, 11 desciende a 17, el cual desciende a 13, éste último desciende a 5 y $5 < 11$; si m es par entonces el tercer granizo es menor que el de inicio. Si $m = 4u+1$ entonces el cuarto granizo será menor, si $m = 16u+7$ será menor el quinto, para $m = 32u+15 \wedge m = 32u+27$ será menor el sexto, $m = 128u+43$ implica que será menor el séptimo…

4. Cada número de clase $8m+7$ (círculos azules) desciende en alguna de sus iteraciones, necesariamente, a algún número incluido en las tres clases anteriores y dicho número conlleva las propiedades que le son inherentes; de otra parte, cabe considerar los casos en que desciendan de algún granizo menor. Ejemplo, 31 desciende de 27. Algoritmo $3n+1$: 27, 41, 31, 47,... Si $m = 4u+2$ entonces el cuarto granizo es menor que el de inicio, para $m = 16u \wedge m = 16u+1$ será menor el quinto, $m = 32u+a;\ a \in \{4, 9, 11, 21, 24\}$ implica que el sexto es menor, si $m = 512u+28$ entonces será menor el octavo …

   Si $w_1 = 8m+7 \quad \wedge \quad 8m+7+1 = 2^k v$ entonces w_k es el primer granizo de forma $4u+1$ al que desciende $w_1 = 8m+7$

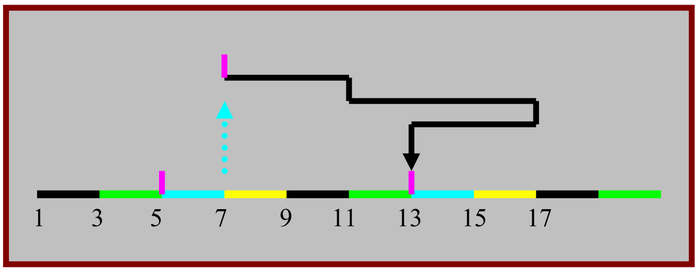
   $m\ par \Rightarrow k = 3$, es decir, el tercer granizo es de forma $4u+1$ para todo $w_1 = 8m+7,\ m\ par$; para m impar se cumplirá $k \geq 4$.

   Ejemplos $23 = 8*2+7,\ 23+1 = 24 = 2^3 * 3$.
   Algoritmo $3n+1$: 23, 35, 53,...; $53 = 4*13+1$

   $95 = 8*11+7, \quad 95+1 = 96 = 2^5 * 3$
   Algoritmo $3n+1$: 95, 143, 215, 323, 485,...; $485 = 4*121+1$

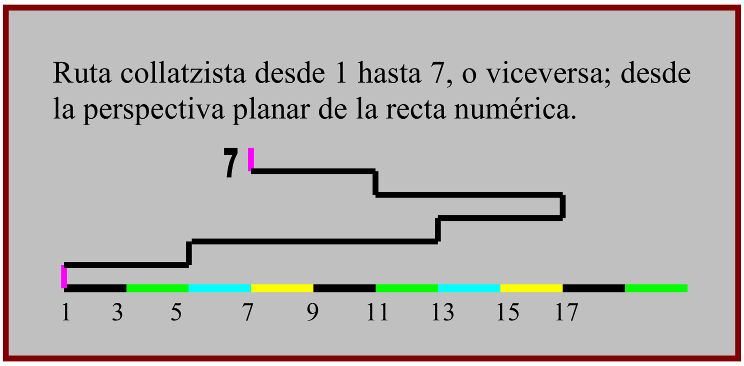
Comentarios

La demostración mediante inducción completa, simplemente, nos dice que desde cualquier número se desciende *a otro* menor, se desciende *de otro menor* o se desciende a *otro mayor* (teorema de Wailly) que, previamente, ha descendido al ciclo; sin embargo, no muestra totalmente cuál es el recorrido hacia el mencionado ciclo. Ejemplo: 7 desciende en el proceso de iteraciones a 13 y éste desciende a 5 (según teorema de Wailly) por ser $4*3+1=13$ y 3 haber descendido a 5, que desciende a 1.



En otras palabras, si realizamos el proceso de iteraciones y llegamos a algún número que, de antemano, sabemos desciende al ciclo, entonces no es necesario continuar el fatigante proceso $3n+1$. Un matemático conceptualista diría, simplemente, que la torre madre $\{3, 5, 1\}$, junto con el puente $4w+1$ y el algoritmo inverso, llenan la totalidad impar (Paradoja residual).

En cuanto a la inducción collatzista, crecimiento del árbol $3n+1$, desde su raíz (1), es determinable la construcción de la totalidad impar (sin repetición de números), pero tampoco es previsible el camino que conduce desde 1 a cualquier número que deseemos.

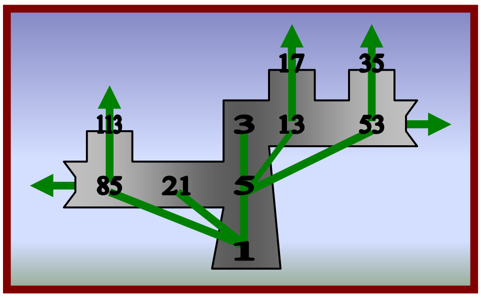


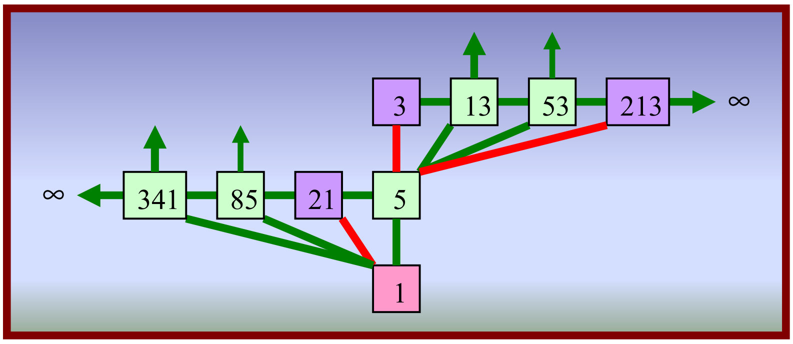
En planimetría cartesiana la totalidad impar o parte de ella es representada en una recta numérica; sin embargo, el ordenamiento collatzista requiere de un espacio tridimensional para la visualización de "una parcela apreciable" de la totalidad impar. Exceptuando el conjunto $\{1, 5, 3\}$, no es factible obtener una partición del árbol collatzista que muestre solamente más de 3 naturales, desde 1 hasta *n,* con su línea de conexión algorítmica $3n+1$.

Lo anterior significa que no es posible observar, por ejemplo, la trayectoria de los 5 dígitos impares sin el concurso de otros impares, dado que la línea que los conecta, forzosamente, debe abarcar otros.

El siguiente esquema muestra el árbol collatzista desde su raíz (1) con sus dos brazos inferiores y tres brotes : $113, 17\ y\ 35$.

Un brazo se conforma mediante la aplicación del puente $4w+1$: El brote resulta de aplicar el algoritmo inverso. Para los múltiplos de 3 no existen brotes.

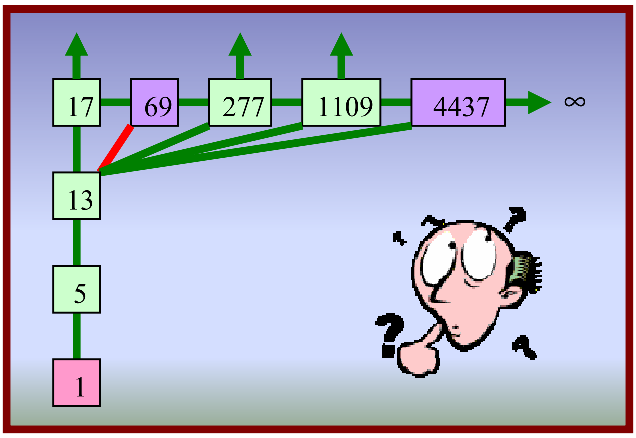




RECOMENDACIÓN

Se le sugiere evitar comprar esferas de icopor y alambre para fabricar el árbol collatzista en el que se observen los granizos 1, 3, 5,…49 mediante el algoritmo $3n+1$

Forzosamente, si se desea construir el árbol en el que aparezcan los impares menores que 50, deben aparecer otros. ¿Cuántas esferas requiere para el intento?



SECUENCIAS LARGAS DE GRANIZOS SUCESIVOS MAYORES

Existen números que generan secuencias tan largas como se desee de granizos sucesivos mayores, al aplicarse el algoritmo $3n+1$, a pesar de no existir descenso al infinito. Se pueden hallar números que generen miles de millones de millones de granizos sucesivos mayores que el iniciante.

Para determinar una fórmula genérica de dicha clase de números se emplea $w = \dfrac{3^m(a+1)}{2^m} - 1$, en combinación con soluciones de ecuaciones diofánticas en enteros y… una pizca de observación.

TEOREMA COLLATZISTA CRECIENTE

Todo granizo de forma $w_0 = 2^m - 1, \quad m \geq 2$ genera $m-1$ granizos sucesivos crecientes a partir de él mismo; el granizo de orden m es menor que el antecedente.

ALGORITMO $3n+1$ Sucesivos crecientes

$w_0 = 2^m - 1, \quad m \geq 2 \;\wedge\; h \in \{1, 2, 3, \cdots, m-1\} \;\Rightarrow\; w_h = 3^h * 2^{m-h} - 1$

$w_{m-1} = 3^{m-1} * 2 - 1 \qquad w_m < 3^h * 2^{m-1} - 1$

Ej. $w_0 = 2^3 - 1 = 7 \quad h \in \{1, 2\} \quad w_1 = 3 * 2^2 - 1 = 11 \quad w_2 = 3^2 * 2 - 1 = 17$

$Algoritmo \quad 3n+1 \longrightarrow 7, 11, 17, 13, 5, 1, 1, 1, \cdots$

Teorema W_m $3n+1$

$m = 2^u v, \quad u \in N_0 \qquad w_0 = 2^m - 1, \quad m \geq 2$

$w_m = \dfrac{3^v - 1}{2} \quad si \quad u = 0$

$w_m = \dfrac{3^{2^u v} - 1}{2^{u+2}} \quad$ si $u > 0$

Refútelo o demuéstrelo

Ejemplos con $w_0 = 2^m - 1, \quad m \geq 2$

1. $m = 5 \Rightarrow w_0 = 31$

Algoritmo: 31, 47, 71, 107, 161, 121, 91, 137,… $w_5 = 121 < w_4 = 3^4 * 2 - 1 = 161$

2. $m = 10^{50} \Rightarrow w_0 = 2^{10^{50}} - 1$: ...? ? ? ?... Imposible escribir los sucesivos $10^{50} - 1$ granizos crecientes si $m = 10^{50}$ *¿De acuerdo?*

El teorema general, con $w_0 = 2^m k - 1$, se puede obtener mediante $w = \frac{3^m(a+1)}{2^m} - 1$, se deja la construcción y demostración del teorema a cuenta y riesgo suyo. El granizo w_{m-1} es predeterminable e igual sucede con el granizo w_m; ambos sin efectuar el proceso $3n+1$. *¿Desea hallar las correspondientes fórmulas?*

Cuando m es grande, especialmente, resulta sorprendente conocer w_0 y saltar a w_m, sin ejecutar el proceso $3n+1$. *¿Se puede prever, mediante alguna función, cuál será el granizo* w_m*, sin efectuar el proceso* $3n+1$ *?*

- Sean $w_0 = 2^m - 1$ y $w_0 = 2^{m^{\div}} - 1$, m *y* $m^{\div}$ sucesivos, el primero impar y el segundo par. Denomine G_m a la cantidad de granizos desde w_m hasta el descenso a 1 y $G_{m^{\div}}$ al total de granizos desde $w_{m^{\div}}$ hasta el descenso a 1; determine la relación existente entre las dos cantidades y luego averigüe si sucede lo mismo cuando m *y* $m^{\div}$ son sucesivos, el primero par y el segundo impar. Proceda con valores concretos de m *y* $m^{\div}$. El puente $4w+1$ le permite formular y demostrar en forma genérica la propiedad que descubra.

- Es factible que, inicialmente, usted presuma que la cantidad de granizos desde w_m hasta el descenso a 1 sea "inmensa" cuando $w_0 = 2^m - 1$ si $m \to \infty$. Trate de verificar o descartar su presunción.

ALGORITMO COLLATZ $n+1$

Algoritmo: $n+1$ Puente: $2n+1$ Ciclo: $c_1 = \{1, 1, 1, ...\}$

Para el algoritmo $n+1$ las cúspides de las torres son la serie de los impares y el número de descenso es **1**. No olvide que las torres se forman con granizos impares. En este caso todo granizo es "*cúspide*"; es decir, el algoritmo inverso jamás se detiene.

Lo anterior significa que para el algoritmo $n+1$ de Collatz (n impar) la "conjetura" correspondiente "*dice*": *Todo natural desciende a* **1** *al iterarse el algoritmo* $n+1$ *de Collatz*.

El algoritmo $n+1$ de Collatz es empleado, consciente o inconscientemente, por todo matemático; sin embargo, los honorables críticos jamás lo han cuestionado, a pesar (presumo) de no existir una demostración formal para tan eficiente instrumento de análisis numérico.

- **Demostración mediante inducción completa:**

1. 1 desciende a 1 mediante n + 1 Verdadero.

2. Supóngase que m_h desciende a 1 Verdadero.

3. El siguiente de *m* es *m* + 2 (recuerde que usamos los impares)

$$(m+2)+1 = 2^u \Rightarrow m+2 \text{ } desciende \text{ } a \text{ } 1$$

$$(m+2)+1 = 2^v w \Rightarrow w < m \Rightarrow w \text{ } desciende \text{ } a \text{ } 1 \Rightarrow m+2 \text{ } desciende \text{ } a \text{ } 1$$

4. $m_h \Rightarrow m_{h+1} \quad hqd$

- ¿Qué hace elemental recurrir al convencionalismo para demostrar la conjetura **n + 1**?.

- La no-aparición, en las iteraciones, de impares mayores que el sometido al proceso.

PARADOJA RESIDUAL Y TEOREMA MAGNO DE COLLATZ

Parodiando la famosa expresión «Teorema Magno de Fermat», en lo sucesivo, se denominará Teorema Magno de Collatz a la expresión generalizada que incluye todos los algoritmos tipo Collatz y, al mismo tiempo, la conjetura general.

TEOREMA MAGNO DE COLLATZ

Dados $Ln+C, \quad b \in R = \{1, 3, 5, ... (2L-1)\}, \quad L, n, C \text{ } impares$ entonces:

Todo *n* desciende a algún ciclo si y solo si todo ***b*** desciende a alguno.

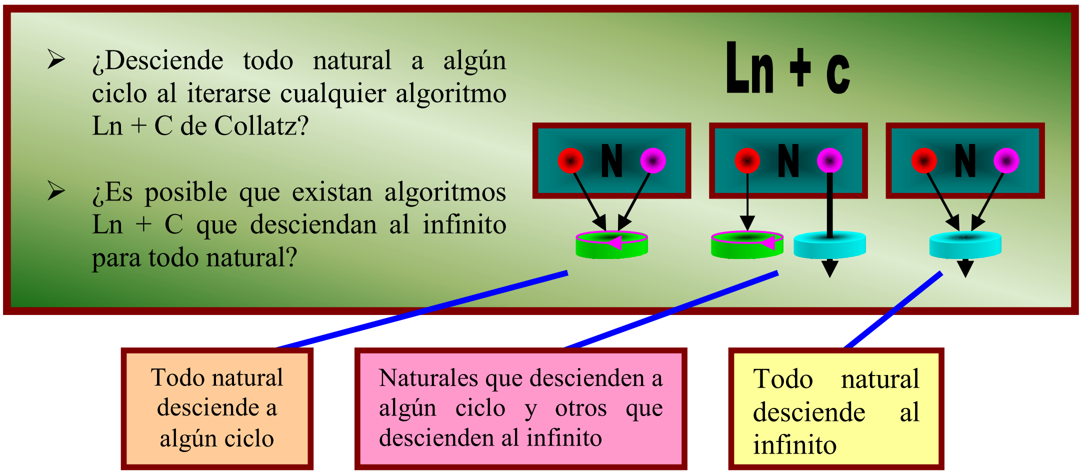
En la expresión del Teorema Magno de Collatz se incorporan los elementos impares de la clase residual módulo 2L como propiedad que permite decidir si algún algoritmo en particular implica el descenso a algún ciclo para todo natural; es decir:

- Si todo **b** desciende a algún ciclo, entonces todo **n** descenderá a alguno.

- Si para algunos **b** se produce descenso a algún ciclo y para otros no se genera descenso, entonces existirán naturales que descienden a algún ciclo y otros naturales que descienden al infinito.

- Si para ningún **b** se produce el descenso a ningún ciclo, entonces todo natural descenderá al infinito.

- La clase residual módulo 2L puede generar algunos ciclos o generarlos todos.



PARADOJA RESIDUAL Y COROLARIOS

La paradoja residual implica que si para algún algoritmo $L_x n+1$ se cumple que todo natural desciende a algún ciclo entonces lo mismo sucederá, en cuanto al descenso, con todo $L_x n+C$.

ALGORITMO n + 1

- **Demostración mediante la paradoja residual**:

1. L = 1, $b \in R = \{1, 3, 5, \ldots (2L-1)\} = \{1\}$

2. $1 \Rightarrow 1 + 1 = 2 \Rightarrow 1 \Rightarrow$ Todo **n** desciende a algún ciclo al aplicarse el algoritmo **n + 1**.

3. El único ciclo generado por el algoritmo n + 1 es {1, 1, 1,... }: Aplicar ecuación i-ciclo (ALGORITMO COLLATZ, DESCENSO AL INFINITO)

4. Todo natural desciende a **1** al aplicarse el algoritmo n + 1. hqd.

ALGORITMO 3n + 1 Y PARADOJA RESIDUAL

Teorema 3n + 1: Todo natural desciende a **1** al iterar el algoritmo 3n + 1.

- **Demostración mediante la paradoja residual**

1. L = 3, $b \in R = \{1, 3, 5, \ldots (2L-1)\} = \{1, 3, 5\}$

2. 1, 3, 5 $\Rightarrow$ **1** $\Rightarrow$ Todo **n** desciende a algún ciclo al aplicarse el algoritmo ***3n + 1***.

3. El único ciclo generado por el algoritmo *3n + 1* es {1, 1, 1,... }: Aplicar ecuación i-ciclo (ALGORITMO COLLATZ, DESCENSO AL INFINITO)

4. Todo natural desciende a 1 al serle aplicado el proceso 3n + 1. hqd.

ALGORITMO *3n +1*

Fórmulas para pares e impares hasta el descenso a 1

Las siguientes son las fórmulas para pares e impares de inicio, hasta su descenso a 1 al aplicarse el algoritmo *3n+1*.

$$m_p = \frac{2^{x_1+x_2+\ldots+x_u}(2^{x_{u+1}}-1)-(3*2^{x_1+x_2+\ldots+x_{u-1}}+\ldots+3^{u-1}*2^{x_1})}{3^u}$$

$$m_i = \frac{2^{x_1+x_2+\ldots+x_u}(2^{x_{u+1}}-1)-(3*2^{x_1+x_2+\ldots+x_{u-1}}+\ldots+3^{u-1}*2^{x_1}+3^u)}{3^{u+1}}$$

TEOREMAS CÚSPIDE DE COLLATZ

Los números naturales de forma $m = 6t+3$ definen las cúspides de las Torres de Collatz; dicha definición conduce, entre muchos, a los siguientes teoremas.

Secuencia Creciente. $w_0 < w_1 < w_2 < \cdots < w_{m-1}$ $w_m > w_{m-1}$

A. $m\ par \Rightarrow w_0 = 2^m - 1$ es cúspide de Collatz, $w_{m-1} = 3^{m-1} * 2 - 1$

B. Si $m = 6t+3$, entonces todo natural $w_{-1} = \dfrac{2^{m+2}-5}{3}$ es cúspide de Collatz, $w_0 = 2^m - 1$ y $w_{m-1} = 3^{m-1} * 2 - 1$

C. $m = 18t+5 \Rightarrow w_{-2} = \dfrac{8(2^m-1)-5}{9}$ es cúspide de Collatz, $w_0 = 2^m - 1$ y $w_{m-1} = 3^{m-1} * 2 - 1$

D. $m = 18t+7 \Rightarrow w_{-2} = \dfrac{16(2^m-1)-7}{9}$ es cúspide de Collatz, $w_0 = 2^m - 1$ y $w_{m-1} = 3^{m-1} * 2 - 1$

Ejemplos B.

1. $m=3$, $w_{-1}=\dfrac{2^5-5}{3}=9$, $w_0=2^3-1=7$, $w_2=3^2*2-1=17$

Algoritmo $3n+1$: 9, 7, 11, 17,⋯

2. $m=9$, $w_{-1}=\dfrac{2^{11}-5}{3}=681$, $w_0=2^9-1=511$, $w_8=3^8*2-1=13121$

Algoritmo $3n+1$: 681, 511, 767, ⋯, 13121,⋯

3. $m=21$, $w_{-1}=\dfrac{2^{23}-5}{3}=2796201$, $w_0=2^{21}-1=2097151$, $w_{20}=6973568801$

Algoritmo $3n+1$: 2796201, 2097151, ⋯, 6973568801,⋯

Secuencias Decrecientes.

A. $w_0>w_1>w_2>\cdots>w_{m+1}$ $w_{m+1}<w_{m+2}$

$$w_0=2^{2m+3}+1 \quad\Rightarrow\quad w_{m+1}=3^{m+2}*2+1,\quad w_{m+2}=3^{m+2}+2$$

B. $w_0=16384u+11469,\ u\in N_0 \quad\Rightarrow\quad w_0>w_1>w_2>w_3>w_4,\quad w_4<w_5 \quad \forall u$

Nota. Imponer condiciones a las funciones $f(w_0)$ es fácil; determinar el esquema general para hallar la función $f(w_0)$ es asunto diferente. *¿Desea descubrir la metodología empleada, por ejemplo, para hallar* $w_0=16384u+11469$ *?*

Ejemplos de secuencias decrecientes.

A. 1. $m=0\Rightarrow w_0=9$ Algoritmo $3n+1$: 9, 7, *11,...*

2. $m=4\Rightarrow w_0=2049$ Algoritmo $3n+1$: 2049, 1537, 1153, 865, 649, 487, *731,...*

B. $u=5$ $w_0=93389$ Algoritmo $3n+1$: 93389, 35021, 13133, 4925, 1847, *2771,...*

EL SENDERO DE LOS PARES EN LA CONJETURA DE COLLATZ

Se han empleado los impares para la demostración de la Conjetura de Collatz; sin embargo, es viable el empleo de la totalidad par para acometer la tarea. Para el efecto se debe formular la correspondiente conjetura con relación a los pares, ésta se transforma en teorema una vez haya sido demostrada.

Supóngase que Usted trasforme la conjetura par de Collatz en teorema; éste se formula así:

Teorema Collatz Par (TCP): Todo $2w, w\ impar$, desciende a alguna potencia de 2 mediante el algoritmo $3n+1$. La mayor potencia a que puede descender cualquier número es de forma 2^{2u+4} y luego se produce el descenso a 1.

El Teorema $3n+1$, demostrado el TCP, quedaría demostrado de la siguiente manera:

1. Todo impar, mediante el algoritmo $3n+1$, se transforma en par.

2. $\dfrac{2^x w}{2^{x-1}} = 2w,\ w\ impar$

3. Todo $2w$ desciende a alguna potencia de 2 que, a su vez, desciende a 1. (TCP)

4. Todo natural, mediante $3n+1$, desciende a 1. **hqd.**

ALGORITMOS Ln + C: Archivos

En www.matematicainsolita.8m.com aparecen varios archivos acerca del algoritmo $3n+1$, que usted puede consultar, cada uno contiene detalles diferentes y comunes.

carlosgiraldo26@hotmail.com

Web master: Wailly Giraldo León
waillyg@hotmail.com