L'Algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna

per David Obrador i Sala

dobrador@pie.xtec.es

http://www.xtec.es/~dobrador/mates/bombelli.pdf

Els versos de Tartaglia

Quando che'l cubo con le cose appresso
  se agguaglia a qualche numero discreto
  trovan dui altri differenti in esso.
Da poi terrai questo per consueto
  che il lor produtto sempre sia eguale
  al terzo cubo delle cose neto,
El residuo poi suo generale
  delli lor lati cubi ben sottratti
  varrà la tua cosa principale.
In el secondo de codesti atti
  quando che'l cubo restasse lui solo
  tu osserverai quast'altri contratti,
Del numero farai due tal part'à volo
  che l'una in l'altra si produca schietto
  el terzo cubo delle cose in stolo
Dalla qual poi, per commun precetto
  torrai li lati cubi insieme gionti
  et cotal somma sarà il tuo concetto.
El terzo poi de questi nostri conti
  se solve col secondo se ben guardi
  che per natura son quasi congionti.
Questi trovai, et non con passi tardi
  nel mille cinquecente, quatro e trenta
  con fondamenti ben saldi e gagliardi
Nella città dal mare intorno centa.

Referència: ***Da Cardano a Galois. Silvio Maracchia.*** **p.27.**

Prefaci

Només m'he endinsat una mica en l'obra de Bombelli i m'ha sabut captivar prou com per estudiar la seva biografia, buscar personatges coetanis a la universitat de Bologna i influències que hagués pogut rebre, recollir dades sobre la història de les solucions de les cúbiques i les polèmiques entre Ferrari i Tartaglia, analitzar els famosos versos de resolució de les cúbiques de Tartaglia, veure quines notacions utilitzà Bombelli en l'*Algebra*, saber com va resoldre el cas de la cúbica irreductible, veure que fou el primer en donar regles de càlcul per als "nombres imaginaris", el primer en calcular una aproximació de l'arrel d'un nombre seguint l'algoritme de les fraccions contínues… També he pogut observar com relacionà les cúbiques amb els problemes clàssics grecs de la duplicació del cub i de la trisecció de l'angle i moltes altres coses que segurament em queden per esbrinar.

Així, tot el que segueix no és més que un breu recull de les moltes coses que Bombelli i els algebristes de l'època del Renaixement italià aportaren a l'apassionant món de les matemàtiques.

1. Introducció

Ens trobem al segle XVI enmig del renaixement Italià, a Bologna, allà hi trobem un bon rebombori en el món de les matemàtiques. Entorn de la universitat de Bologna, alguns matemàtics italians (algebristes tots ells) treballen fent els seus progressos en la resolució de les cúbiques, i en l'avanç de l'àlgebra. Els protagonistes, mantenen en secret els seus "descobriments" perquè les places com a professor en les universitats es defensaven guanyant disputes de problemes matemàtics. Així, tot i que Scipione Dal Ferro, hagi trobat la manera de solucionar (això succeeix entre la primera i la segona dècada del segle XVI) certs casos concrets de la cúbica[1] no ho farà conèixer fins poc temps després a Annibale della Nave, el seu gendre, que rebrà confidencialment les regles per resoldre el problema, i les mantindrà prou en secret. El 1535, Antonio Maria Fiore, un deixeble de Dal Ferro, després d'haver vençut un enfrontament matemàtic amb Zuannin de Tonini Da Coi, s'enfronta a Tartaglia, proposant un recull de 30 problemes a resoldre en 40 o 50 dies, que tots ells desemboquen sempre a cúbiques sense el terme de segon grau i que ell proclama saber resoldre gràcies al secret confiat 30 anys abans per un "gran matemàtic" (se suposa que Dal Ferro). Però no feia

[1]sembla ser que Dal Ferro només coneixia els casos $x^3 + mx = n$, i $x^3 = mx + n$ amb $m, n \geq 0$, ja que no s'acceptaven els nombres negatius en l'escriptura de les equacions. Veure a *http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history* les biografies de Bombelli, Ferro, resolució de les quadràtiques, cúbiques i quàrtiques. Veure també: *Biographical Dictionary of Mathematicians. Vol. 2. Reference Biographies from the Dictionary of Scientific Biography.* p. 788-789. També cal comentar que Dal Ferro va fer conèixer la solució a Pompeo Bolognetti com es veu en el manuscrit MS 595N trobat a Bologna. Veure *L'école mathématique de Bologne*. Ettore Bortolotti. p.21.

gaire temps que Tartaglia havia trobat la mateixa solució[2], i va resoldre tots els problemes en dues hores, mentre que Fiore no en va resoldre cap dels que Tartaglia li havia plantejat. No cal dir la fama que adquirí Tartaglia guanyant altres concursos. A Milà, Cardano s'assabentà de la fama de Tartaglia i li demanà els versos que posseïa per resoldre la cúbica i així poder-los publicar en el seu recull titulat *Practica Arithmeticae* (publicada el 1539), Tartaglia li comunicà la solució en vers (tal com es feia a l'època per poder recordar millor la solució) cedint a les pretensions i al joc brut de Cardano fent jurar que no serien publicats fins que el mateix Tartaglia ho fes primer. Sis anys després, el 1545, Cardano publicà l'*Ars Magna* (el primer tractat en llatí sobre àlgebra) on hi apareixia un recull de l'àlgebra de l'època, amb la resolució de la cúbica de Tartaglia i l'estudi de les quàrtiques que havia desenvolupat el seu deixeble Ferrari (també de Bologna). El trencament del jurament donà lloc a les disputes entre Ferrari (animat per Cardano) i Tartaglia, que tingueren lloc el 1548 amb els *Cartelli* i els *Contracartelli*, problemes que s'escrivien un a l'altre i que es penjaven en llocs públics. Enmig de tota aquesta polèmica, val a dir que hi havia un problema que no se sabia solucionar i era aquell que anomenaven de la cúbica **irreductible**, que es dóna quan en la fórmula de càlcul de les arrels d'una cúbica cal fer l'arrel quadrada d'un nombre negatiu. Ja se n'adonà Cardano, i això era prou **inquietant**[3], que podia tenir una cúbica amb solucions reals que es podien trobar per simple substitució i que el seu càlcul involucrava fer arrels de nombres negatius.

És en aquest context situat entorn de Bologna de preocupació pública per l'àlgebra quan trobem l'obra que en aquest treball analitzo: *L'Algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna*. Bombelli que és considerat el darrer algebrista de l'escola bolonyesa escriu l'obra intentant fer un recull de l'àlgebra de l'època més entenedor que no pas *l'Ars Magna* de Cardano (que segons ell fou obscur en l'exposició). L'obra pretenia ser un llibre autocontingut recopilant els coneixements sobre àlgebra de l'època. L'obra que s'imprimí el 1572 a Venècia consistia en 3 llibres d'àlgebra. El primer amb definicions, càlcul de potències, arrels, *binomios* i *residuos*[4], operacions amb arrels de nombres negatius, càlcul aproximat d'arrels quadrades, cúbiques,… En el segon llibre després de deixar clara la

---

[2]coneix només el cas $x^3 + mx = n$, amb $m, n \geq 0$ i no sap passar d'una cúbica completa a la que no té el terme quadràtic.

[3]**inquietant**, perquè així com en l'equació de segon grau la presència de radicals de nombres negatius fa excloure l'existència de solucions reals, en la irreductible això no passa. Cardano diu que això és ben "sofístic" o "selvatica" (traducció literal). Veure: *L'Algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna. Prima edizione integrale*. 1966. Ettore Bortolotti. p. XXI.

[4]Bombelli entén per *binomio* la suma d'una arrel quadrada amb un escalar sempre i quan aquesta quantitat no sigui racional, mentre que defineix *residuo* com la resta de dues quantitats com abans, restant sempre la gran menys la petita.

notació[5] que utilitzarà fa la distinció dels diferents casos d'equacions de segon grau (cinc casos degut a la restricció en escriure les equacions amb tots els termes positius), els 7 casos de les cúbiques sense termes d'ordre dos (la reducció d'una cúbica general a una sense terme quadràtic ja l'ha fet abans) i els 42 casos de les quàrtiques. En totes aquestes distincions de casos, dóna la solució i alguns exemples numèrics i les relaciona en el llibre 5 amb els problemes clàssics: duplicació del cub i trisecció de l'angle. Finalment també tractarà les equacions biquadrades, les de grau sis que poden transformar-se en equacions de grau 2 o de grau 3,…

En el tercer llibre Bombelli fa un recull de problemes. En el manuscrit escrit cap al 1560, aquests problemes són de tipus pràctic, són problemes aplicats que es podien trobar a la vida als mercats o a les tavernes, i en canvi, en l'obra que es publicà el 1572 a Venècia hi trobem problemes més abstractes, molts dels quals provinents de l'*Arithmetica* de Diofant d'Alexandria.

2. Biografia i breu anàlisi de l'obra

Rafael Bombelli va néixer el gener de 1526 a Bologna. La seva família va haver de canviar el seu autèntic cognom: Mazzoli pel de Bombelli, per problemes polítics. El seu pare Antonio Mazzoli, àlies Bombelli, va deixar el Borgo Panigale, un suburbi al Nord de Bologna i anà a la ciutat de Bologna, on s'hi va establir, era mercant de llana, i allà es va casar amb Diamante Scuderi. Tingueren sis fills, el més gran dels quals va ser Rafael Bombelli.

En l'*Algebra* esmenta que el seu mestre va ser Pier Francesco Clementi da Corinaldo, un enginyer-arquitecte. Sembla ser que Bombelli no va estudiar a la universitat. Rafael va treballar bona part de la seva vida buidant zones fangoses i assecant basses, guanyant terres a les maresmes. Va treballar pel que va ser Bisbe de Melfi: Monsignor Alessandro Rufini, un noble romà[6]. A les seves ordres va participar en les tasques d'assecament de les marismes de Val Di Chiana i serà en una interrupció d'aquestes tasques quan aprofitarà per escriure la seva obra, es creu que cap al 1560, i la dedicarà a Rufini. L'obra, però, no es publicarà fins el 1572 a Venècia[7], i poc després morirà a Roma, sense tenir temps de publicar els dos llibres següents de geometria que ell mateix havia promès publicar

[5]Bombelli utilitzarà les paraules *tanto* per indicar la incògnita aixecada a la primera potència, i *potenza* per indicar-ne la segona potència, en una clara influència diofantina i deixant de banda les notacions de l'època per aquestes incògnites que eren *cosa* i *censo*, notacions que ell també havia utilitzat en el primer manuscrit de l'obra desaparegut fins el 1923.

[6]serà en alguna de les seves estades a Roma, com a assessor del papa Pius IV que coneixerà Antonio Maria Pazzi i conjuntament traduiran part de l'obra de Diofant, que tant influirà en l'*Algebra*.

[7]i com ja he dit, haurà sofert algunes modificacions, per exemple, en el manuscrit atribueix la solució de la cúbica a Dal Ferro, i en canvi en l'obra del 1572 parla de la fórmula de Cardano-Tartaglia, o els canvis produïts per la lectura de Diofant.

en la primera part. Així l'obra publicada constarà només de tres volums d'àlgebra, mentre que l'historiador en matemàtiques bolonyès Ettore Bortolotti trobarà el 1923 una còpia manuscrita a Bologna on hi consten els tres volums d'àlgebra i dos més de geometria, amb les demostracions dels mètodes de solució de les equacions algebraiques exposades en el llibre segon.

3. Notació utilitzada a l'Algebra

Bombelli utilitzarà les inicials **R.q.** per designar l'arrel quadrada i **R.c.** per l'arrel cúbica[8], i parlarà de **R.q.Legata** i **R.c.Legata** quan consideri l'arrel d'un polinomi, és aquí quan utilitza símbols semblants als claudàtors[9] per indicar el radicand.

També utilitza les paraules *tanto*, *potenza*, *binomio* i *residuo* com ja he explicat anteriorment.

Però potser en allò on serà més innovador Bombelli és en designar les arrels amb radicand negatiu, de fet ell és el primer en donar-ne unes regles de càlcul, i per tant ha d'inventar una manera d'anomenar-les. Així en un fragment de l'*Algebra*[10] reproduït en traducció lliure diu:

> *"He trobat un altre tipus d'arrels cúbiques legate molt diferents de les d'altres tipus, que neixen de distingir el cas: cub igual a tants i número[11], quan el cub de tres vegades els tants és més gran que el quadrat de la meitat del número[12], que com es demostrarà en el capítol corresponent, és un tipus d'arrel cúbica que té en el seu càlcul operacions diferents de les altres i diferent nom, perquè quan el cub de tres vegades els tants és més gran que el quadrat de la meitat del número, l'excés, no es pot anomenar ni positiu, ni negatiu, però l'anomenaré* ***più di meno*** *quan s'hagi de sumar i* ***meno di meno*** *quan s'hagi de restar[13].[…] Aquesta cosa, a molts, pot semblar més sofisticada que no pas real, i jo també vaig tenir aquesta opinió, fins que n'he trobat la seva demostració geomètrica […] I primer tractaré de la multiplicació, fixant la regla del più i el meno."*

En el text que segueix, Bombelli dóna les regles de multiplicació entre aquestes dues noves magnituds i diu: "*più di meno via più di meno, fa meno*" que per nosaltres seria $(+i)(+i) = -1$.

---

[8] *Radice quadrata* i *Radice cuba* en italià, també utilitza altres símbols per altres arrels: **RR.q.** la quarta, **R.p.r.** la quinta,…

[9] utilitza L i un símbol semblant a ↵ com a claudàtors, així per exemple trobem $2 + R.c.LR.q.68 + 2$↵ $- R.c.LR.q.68 - 2$↵ per indicar $2+\sqrt[3]{\sqrt{68}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{68}-2}$ en *L'Algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna. Prima edizione integrale*. 1966. Ettore Bortolotti. p.132. i en canvi a la p.XXXIII. es pot veure com els utilitzava Bombelli en l'original.

[10] veure p.133. de *L'Algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna. Prima edizione integrale*. 1966. Ettore Bortolotti.

[11] és la cúbica: $x^3 = mx + n$.

[12] és el cas en què: $(3m)^3 > (\frac{n}{2})^2$, és a dir, la cúbica irreductible de discriminant negatiu.

[13] $+\sqrt{(-1)}$ i $-\sqrt{(-1)}$, respectivament, que nosaltres designem per $+i$ el primer i per $-i$ el segon.

I una altra notació que utilitza Bombelli és per designar les potències de la incògnita, escriu un semi-cercle o un arc amb un nombre dins d'ell que representa la potència a la qual està aixecada. per exemple trobem[14]:

Tanto ‖, *Potenza* ‖, *Cubo* ‖,…

4. Solució de la cúbica irreductible segons Bombelli

Segons les regles de Cardano, l'equació $x^3 = px + q$ té les següents solucions: $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$, així quan es té $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$, què es fa amb l'arrel quadrada d'un número negatiu? El gran pas que donarà Bombelli és treballar amb els “nombres imaginaris” i afirmar que la fórmula de Dal Ferro o de Cardano-Tartaglia també serveix per la cúbica irreductible, i per tal de familiaritzar el lector amb el “nombres imaginaris” els introdueix al final del primer llibre, com ja s'ha vist, i afegeix que aquestes arrels apareixen sempre acompanyades de les seves conjugades.

Bombelli dóna un exemple d'equació on cal calcular l'arrel d'un nombre negatiu, i ho salvarà donant una fórmula de transformació de radicals cúbics[15]: $\sqrt[3]{a + \sqrt{-b}} = p + \sqrt{-q}$ i mitjançant les regles suma i resta d'aquestes noves magnituds observarà que es cancel·len les arrels de nombres negatius, és a dir, en notació actual, que la suma d'un complex amb el seu conjugat és un nombre real.

L'exemple és $x^3 = 15x + 4$, que té solucions $4,\ -\sqrt{3} - 2,\ \sqrt{3} - 2,$ com es pot veure per simple substitució[16] i del qual en aplicar les fórmules anteriors cal calcular l'arrel de: $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = \frac{4^2}{4} - \frac{15^3}{27} = -121$.

---

[14]just en l'inici del segon llibre (p.156. de *L'Algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna. Prima edizione integrale*. 1966. Ettore Bortolotti.)

[15]el mètode per fer els càlculs d'aquest tipus d'arrels el dóna en L'Algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna. Prima edizione integrale. 1966. Ettore Bortolotti., p.140. en el capítol de *Modo di trovare il lato Cubico di simil qualità di Radici*.

[16]en *L'Algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna. Prima edizione integrale*. 1966. Ettore Bortolotti., p.225. Bombelli diu en traducció lliure: “*Iguali's* x^3 *a* $15x + 4$. *Agafi's la tercera part dels Tants, que és 5, faci-se'n el cub, 125 i aquest resti's del quadrat de la meitat del número, que és 4, resta –121 (el qual s'anomenarà più di meno) que d'aquest presa la R.q. serà* $+\,di - 11$, *que juntament amb la meitat del número fa* $2 + di - 11$, *que fent-ne el costat cúbic i unit amb el seu residuo fa* $2 + di - 1$ *i* $2 - di - 1$, *que sumats fan 4, i 4 és el valor del Tant.*”

5. Radicals cúbics segons Bombelli

Bombelli necessita calcular les arrels cúbiques $\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}} = p+\sqrt{-q}$ i ho farà de la següent manera (traducció lliure):

"Quan es vol trobar el costat cúbic d'aquest tipus d'arrels, per pràctica es tindrà el següent. Ajunti's el quadrat del número amb el quadrat de l'arrel, i d'aquesta suma faci'n el costat cúbic[17]*, després, per tempteig, busqui's un número i una R.q. que els seus quadrats junts facin tant com fou el costat cúbic dit a sobre i que del cub del número traient-li el triple de la multiplicació del número pel quadrat de la R.q., allò que queda sigui el número del costat que es busca*[18] *[…]"*

I acaba buscant un número p tal que $p^2 \leq m$, i $p^3 \geq a$, i aleshores haurà de ser $q=\sqrt{m-p^2}$. Bombelli dóna l'exemple següent[19]:

"[…] com seria, si es busca el costat de $\sqrt[3]{2+di-\sqrt{121}}$, que ajuntant el quadrat de l'arrel, que és 121, amb 4, quadrat del 2, fan 125, que si en faig el costat cúbic és 5. Ara cal trobar un número que el seu quadrat sigui menor que 5 i el seu cub sigui major que 2, que si es posa que sigui 1, l'arrel de necessitat serà $\sqrt{4}$, que els quadrats units alhora fan 5 i el cub del número és 1 i la multiplicació del número pel quadrat de l'arrel fa 4 que triplicat fa 12, el qual no es pot restar del cub del número que només és 1, però 1 no és bo[…] per tant prengui's el 2, l'arrel quadrada serà $\sqrt{1}$ que es veu que unint el quadrat del número amb el quadrat de l'arrel quadrada[20] *fan 5, i el cub del número és 8, que restant-n'hi el triple de la multiplicació del número pel quadrat de l'arrel quadrada, que és 6, resta 2 que és el número que acompanyava $+di-\sqrt{121}$, […] i es veu que el seu costat és $2+di-1$ que no ens ve R.q., però el costat és dos nombres (com era $2+di-11$)* [21]*."*

---

[17] $m=\sqrt[3]{a^2+b}$.

[18]està buscant p (el número) i $q=\sqrt{-Q}$ (l'arrel) tals que: $p^2+q^2=m$ i $p^3-3pq^2=a$.

[19]l'exemple que ara mostro i les arrels cúbiques: $\sqrt[3]{52+di-\sqrt{2209}}$, $\sqrt[3]{8+di-\sqrt{232\frac{8}{27}}}$ i $\sqrt[3]{-117+di-\sqrt{44}}$.

[20]tenia $m=5$, i pren $p=2$, i $q=1=\sqrt{1}$, així $p^2+q^2=5$.

[21]per tant $\sqrt[3]{2+di-\sqrt{121}}=2+di-1$.

Bibliografia

Ettore BORTOLOTTI, *L'Algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna, Prima edizione integrale.* Ed. Feltrinelli, Milano 1966.

Ettore BORTOLOTTI, *L'école mathèmatique de Bologne aperçu historique Congrès international des mathématiques*. Ed. Nicola Zanichelli, Bologna, 1928.

Florian CAJORI, *A history of mathematical notations*. Dover Publications Inc., New York 1993.

John FAUVEL i Jeremy GRY, *The history of mathematics ~a Reader~*. Open Univ. Ed. Macmillan i Open Univ., 1993.

Charles C. GILLISPIE, *Biographical Dictionary of mathematicians. Reference Biographies from the Dictionary of Scientific Biography.*

Morris KLINE, *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press, New York, 1972.

Silvio MARACCHIA, *Da Cardano a Galois, Momenti di storia dell'algebra.* Ed. Feltinelli, Milano, 1979.

Karen H. PARSHALL, *The art of algebra from Al-Khwarizmi to Viète: a study in the natural selection of ideas.* History of Science, vol 26, No 72, pp. 129-164 (Juny 1988).

J. REY PASTOR i José BABINI., *Historia de la matemática, vol.2. Del renacimiento a la actualidad.* Ed. Gedisa, Barcelona, 1985.

W.W. Rouse BALL, *A short account of the history of mathematics*. Dover Publications Inc., New York, 1960.

D.J. STRUIK, *A source book in mathematics, 1200-1800.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1986.

B.L.Van der WAERDEN, *A history of algebra: from al-Khwarizmi to Emmy Noether.* Springer Verlag, Berlin, 1985.

I també les següents adreces d'Internet:

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history

http://es.rice.edu/ES/humsoc/Galileo/Catalog/Files/bombelli.html

http://www.math.ruu.nl/hm

http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/HistMath.html

http://www.lib.virginia.edu/science/parshall/