

LONGITUDS I ÀREES D'L-FIGURES

—

El seu càlcul per recompte de punts

Autor: Carlos Domingo

2n BAT A

26 / 3 / 2007

Tutor: David Obrador

ESCOLA ANNA RAVELL

Índex

Presentació.....	3
1. Introducció.....	5
2. Característica d'Euler.....	6
3. Longitud d'una L-corba.....	10
4. Àrea d'un L-polígon.....	11
5. El mètode d'inducció matemàtica.....	15
Glossari.....	17
Apèndix.....	21
Conclusions.....	24
Bibliografia.....	25

Presentació

L'elecció del meu treball de recerca no va ser fàcil. Els treballs proposats per l'escola no m'atreien i em resistia a escollir un treball que no m'acabés de fer el pes. Finalment, vaig decidir de buscar temes pel meu compte que pogués proposar com a treball de recerca. Una cosa sí que tenia clara; havia de pertànyer a l'àmbit de les matemàtiques. L'any que ve començaré la carrera anomenada "de ciències exactes" i què millor que adreçar els esforços inherents al treball de recerca a descobrir una part de les matemàtiques que no es treballa gaire al batxillerat: les demostracions. Amb aquestes premisses establertes i després de veure moltes opcions proposades per altres centres, vaig trobar-ne una d'interessant. Era una proposta de treball de recerca de la facultat de matemàtiques de la UAB intitulada "El Teorema de Pick". La seva proposta era fer un estudi del teorema i la seva demostració; just allò que estava buscant. A més, aquesta facultat oferia la tutoria compartida amb un professor de la universitat, en el cas d'aquest treball, amb el Dr. Jaume Llibre, catedràtic del Departament de Matemàtiques de la UAB.

Amb el tema decidit i acceptat per l'escola, no restava més que posar-se a treballar. Primer que tot, però, el meu tutor, el David Obrador, i jo, ens vam reunir amb el Dr. Jaume Llibre a la UAB. Allí ens va fer una presentació teòrica del treball i ens va comentar els possibles enfocaments que podem donar-li, tot tenint en compte que a partir de cert nivell de desenvolupament, les limitacions de coneixements impediend d'aprofundir més. En acabar l'entrevista, ens va lliurar un document intitulat "Càlcul d'àrees i volums comptant punts", on hi havia una explicació teòrica del tema a tractar en el treball de recerca. El document, però, estava adreçat a gent amb uns certs coneixements de topologia (àmbit de les matemàtiques al qual pertany aquest treball). Així doncs, el principal objectiu que em vaig proposar fou el d'entendre i poder explicar la teoria exposada en aquest document d'una manera més il·lustrativa i planera, tot definint conceptes que en el document es donen per sabuts, afegint exemples, dibuixos... Per fer això, han estat necessaris uns quants e-mails de consulta al Dr. Jaume Llibre, així com la recerca de conceptes tècnics de topologia en altres fonts i el contrast d'informacions.

Quant a l'estructura del treball, he començat per una introducció al tema. En el següent punt he fet l'explicació del càlcul de la característica d'Euler de figures, una eina necessària per als següents apartats del treball. Primer he donat la definició general de la característica d'Euler (Fórmules F2 i F3) i després he comentat l'existència d'altres fórmules molt més directes per a determinats tipus de figures (Fórmules F4, F5 i F6). Els següents dos apartats exposen el càlcul de longituds d'L-corbes i d'àrees d'L-polígons, i per últim està l'apartat del mètode d'inducció matemàtica, on s'introdueix un tema que no té gaire a veure amb la resta del treball però que resulta interessant per tal de comprendre millor una demostració que es presenta a l'apartat previ. Tot seguit es troba el glossari, força extens i amb definicions detallades i exemplificades dels conceptes més complicats que apareixen al llarg del treball, ordenats tots ells per ordre d'aparició. Després hi ha l'apèndix, on es poden trobar dos petits apartats complementaris l'aparició dels quals en el cos del treball no hem cregut convenient, però que, a causa del seu interès, hem volgut que apareguessin en algun apartat. A continuació es troben les conclusions i per acabar, la bibliografia.

La nomenclatura que he emprat per a les fórmules més importants ha estat la F seguida d'un nombre que denota l'ordre en què han anat apareixent. Les figures, la majoria de les quals les he fetes amb AutoCAD, s'anomenen de forma semblant; amb l'abreviatura "Fig." seguida d'un nombre. Les figures del glossari, en canvi, disposen de la lletra G per tal de diferenciar-les de les figures del cos del treball.

Voldria comentar també l'ús que faig de la primera persona del plural al llarg del document. Aquesta utilització, en matemàtiques, molts cops respon a una voluntat de fer participar el lector d'una deducció o d'una sèrie de càlculs i evitar, d'aquesta manera, que esdevingui una dissertació distant i teòrica.

Val a dir que tot i tenir una voluntat de simplificar la comprensió de la teoria exposada en aquest treball, no he volgut que fos en detriment del rigor d'aquesta. Per aquest motiu, val la pena d'anar consultant el glossari durant la lectura del treball, així com de fixar-se en les figures i exemples donats. Per facilitar-ho, he cregut convenient d'adjuntar una còpia, en un format més reduït, del glossari. D'aquesta manera, es pot evitar d'anar endavant i endarrere tota l'estona i facilitar, així doncs, la lectura del document. Tot i així, cal remarcar que la lectura serà, segurament, difícil, i que caldrà molta atenció i una continua revisió de les definicions i il·lustracions que es van donant al llarg del treball. Tot plegat, però, espero que valgui la pena.

Finalment, i per cloure la meva presentació, voldria agrair la permanent disposició del Dr. Jaume Llibre, a qui he pogut adreçar els meus dubtes en tot moment. També m'agradaria agrair a l'escola el fet que acceptés la meva proposta i em permetés, d'aquesta manera, de desenvolupar un treball que ha resultat ser acadèmicament molt enriquidor. Per acabar, donar les gràcies al meu tutor, el David Obrador, qui m'ha recolzat en tot moment, sobretot al principi, quan no les tenia totes de poder arribar a comprendre i sintetitzar una informació per mi tan complexa.

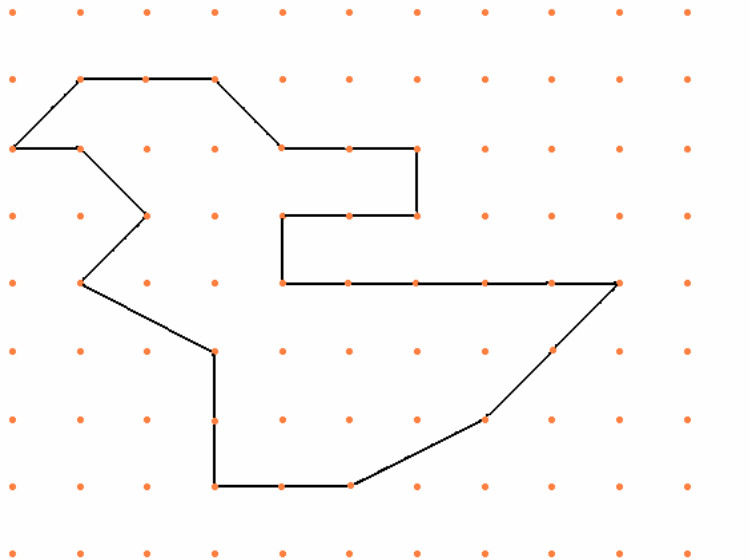
2. Introducció

El teorema de Pick és una fórmula que permet calcular àrees de polígons que tenen els seus vèrtexs en un reticle i són homeomòrfics¹ a un disc tancat. La fórmula és la següent:

$$\mathbf{F1: } S_p = i + \frac{1}{2}b - 1$$

De manera que i és el nombre de punts del reticle que estan a l'interior (de l'anglès *inner points*) del polígon P i b és el nombre de punts del reticle que estan a la frontera (de l'anglès *border*) de P . S_p és la superfície del polígon P .

Exemple: **Fig. 1**



$i \rightarrow$ Punts del reticle (coordenades enteres) situats a l'interior del polígon = 12

$b \rightarrow$ Punts del reticle situats a la frontera de polígon = 26

$$S_p = i + \frac{1}{2}b - 1 = 12 + \frac{1}{2} \cdot 26 - 1 = 24 u^2$$

Aquesta fórmula, tal i com s'ha esmentat, només serveix per a calcular àrees d'un tipus determinat de polígons (homeomòrfics a un disc tancat). Aquest tipus de càlcul per recompte de punts, però, també es pot generalitzar al càlcul d'àrees de polígons no homeomòrfics a un disc tancat, de longituds de corbes, àrees de superfícies, volums de políedres i fins i tot hipervolums de figures de dimensió n (qualsevol dimensió), tots ells, això si, amb vèrtexs de coordenades enteres. Val a dir, també, que totes aquestes fórmules dependran sempre de la topologia de la figura en qüestió. Aquesta topologia vindrà definida, com es veurà més endavant, per la característica d'Euler de la figura.

^{1,2}... Vegeu glossari a partir de la pàgina 17

3. La Característica d'Euler

La característica d'Euler és un nombre enter que va associat a un tipus determinat de figures. D'aquesta manera, totes les figures d'una mateixa topologia compartiran la mateixa característica d'Euler. Es designa amb la lletra grega χ i per tal de calcular aquesta característica en L-hiperpolíedres² o R-hiperpolíedres² de dimensió n , s'ha d'aplicar la següent definició:

$$\mathbf{F2:} \quad \chi(P) = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \cdots + (-1)^n a_n$$

on a_k és el nombre d'hipercubs unitat de dimensió n , si s'aplica a una L-figura, o de k -símplexs rectilinis⁴ de dimensió n , si s'aplica a una R-figura. $\chi(P)$ denota la característica d'Euler de la figura P.

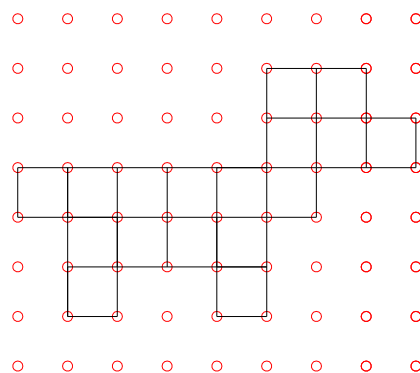
Exemples:

Càlcul de la característica d'Euler d'un L-polígon (dimensió 2):

$a_0 =$ punts del reticle que pertanyen a P = 32
 $a_1 =$ segments unitat³ que pertanyen a P = 48
 $a_2 =$ quadrats unitat³ que pertanyen a P = 17

$$\chi(P) = \sum_{k=0}^2 (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 = 32 - 48 + 17 = 1$$

Fig. 2*



Càlcul de la característica d'Euler d'un R-polígon (dimensió 2):

$a_0 =$ 0-símplexs rectilinis⁴ de P (punts) = 48
 $a_1 =$ 1-símplexs rectilinis⁴ de P (segments) = 99
 $a_2 =$ 2-símplexs rectilinis⁴ de P (triangles) = 52

$$\chi(P) = \sum_{k=0}^2 (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 = 48 - 99 + 52 = 1$$

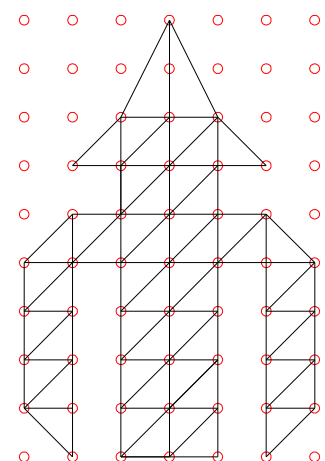


Fig. 3

Cal recordar que a les R-figures, la definició d' a_1 compta segments anomenats 1-símplexs rectilinis, que no necessàriament han de mesurar una unitat.

* La figura 2 mostra un L-polígon, és a dir, un polígon que es pot descompondre com a unió finita de quadrats unitat. A la figura 3 això no es pot fer; s'ha de descompondre en triangles. És un R-polígon.

Aquesta característica també es pot aplicar d'una manera semblant a la frontera d'una figura (cal recordar que la frontera d'una figura està una dimensió per sota d'aquesta. Per exemple, la frontera d'un cub de dimensió 3 són cares de dimensió 2). D'ara endavant, la frontera d'una figura és denotada amb la lletra grega δ (per exemple, si P és un L-polígon, δP és la frontera d'aquest L-polígon).

$$\mathbf{F3:} \chi(\delta P) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k b_k = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 \cdots + (-1)^{n-1} b_{n-1}$$

on b_k és el nombre d'hipercubs unitat de dimensió $n-1$ continguts a la frontera de P , si P és una L-figura de dimensió n , o de k -simplexs rectilinis de dimensió $n-1$ continguts a la frontera de P , si P és una R-figura de dimensió n .

Exemples (noteu que les figures 4 i 5 corresponen a les fronteres de les figures 2 i 3):

Càlcul de la característica d'Euler de la frontera d'un L-polígon (dimensió 2):

$b_0 =$ punts del reticle que pertanyen a la frontera de $P = 28$

$b_1 =$ segments unitat de la frontera de $P = 28$

$$\chi(\delta P) = \sum_{k=0}^{2-1} (-1)^k b_k = b_0 - b_1 = 28 - 28 = 0$$

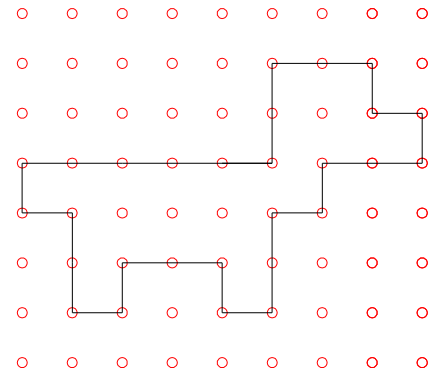


Fig. 4

Càlcul de la característica d'Euler de la frontera d'un R-polígon (dimensió 2):

$b_0 =$ 0-simplexs rectilinis de la frontera de P (punts) = 40

$b_1 =$ 1-simplexs rectilinis de la frontera de P (segments) = 40

$$\chi(\delta P) = \sum_{k=0}^{2-1} (-1)^k b_k = b_0 - b_1 = 40 - 40 = 0$$

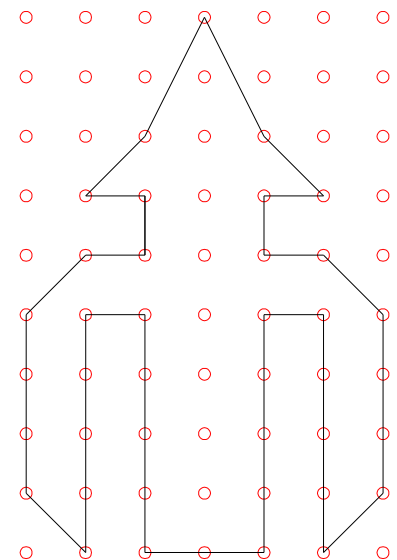


Fig. 5

Aquestes definicions, tot i la seva aparent dificultat, no són més que la suma alternada⁵ de recomptes de magnituds començant per dimensió 0 i fins a dimensió n o $n-1$, depenent si es calcula la característica de la figura o de la seva frontera. Per exemple: En un L-polígon (dimensió 2), la característica d'Euler seria:

$$\chi(P) = \sum_{k=0}^2 (-1)^k a_k = (-1)^0 a_0 + (-1)^1 a_1 + (-1)^2 a_2 = a_0 - a_1 + a_2$$

on a_0 són els punts del reticle que pertanyen a P, a_1 són els segments unitat en què es divideix P i a_2 són els quadrats unitat en què es divideix P.

Com ja hem comentat, la característica d'Euler està compartida per totes aquelles figures de la mateixa topologia (homeomòrfiques entre elles), és a dir, la característica d'Euler és un invariant topològic. És per aquest motiu que les característiques de les figures i les fronteres de les figures calculades en els exemples coincideixen. Aquestes dues figures, tot i una ser un L-polígon i l'altra un R-polígon, comparteixen topologia; ambdues són homeomòrfiques a un disc tancat i, per tant, també són homeomòrfiques entre elles. Aquest fet permet que es pugui conèixer la característica d'Euler d'una figura sense haver d'aplicar la definició. Per exemple, tot L-políedre (dimensió 3) homeomòrfic a una esfera⁶ compleix:

$$\chi(\partial P) = b_0 - b_1 + b_2 = 2$$

A més, gràcies a aquest fet, s'ha pogut simplificar el càlcul de la característica d'Euler per diversos casos particulars:

Si C és un L-camí⁷, i t el nombre de L-subcamins de C homeomòrfics a un cercle independent,

F4: $\chi(C) = 1 - t$

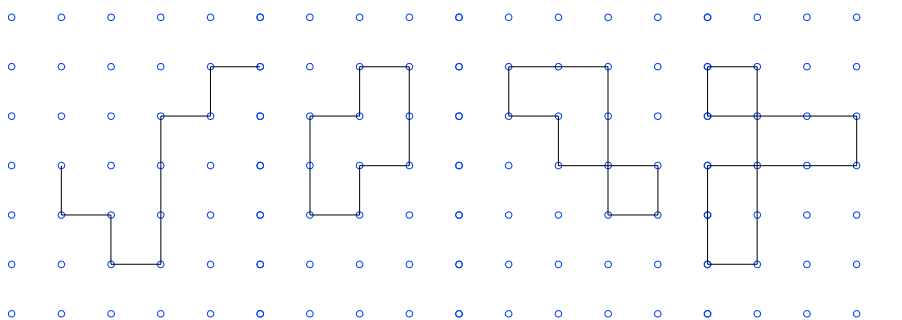


Fig. 6

Fig. 7

Fig. 8

Fig. 9

A la figura 6, $t = 0$ (no hi ha cap subcamí homeomòrfic a un cercle independent). Per tant, $\chi(\text{Fig.6}) = 1$.

La figura 7 té 1 subcamí homeomòrfic a un cercle independent, $\chi(\text{Fig.7}) = 1 - 1 = 0$.

A la figura 8, $t = 2$; $\chi(\text{Fig.8}) = 1 - 2 = -1$.

I a la figura 9, $t = 3$; $\chi(\text{Fig.9}) = 1 - 3 = -2$.

Si s'aplica la definició general de característica d'Euler: $\chi(P) = a_0 - a_1$, es pot comprovar que el resultat coincideix amb els que hi ha calculats en el paràgraf anterior.

Si P és un L-polígon i f denota el nombre de forats de P ,

$$\mathbf{F5: } \chi(P) = 1 - f$$

Si s'aplica aquesta darrera definició a l'exemple de càlcul de la característica d'Euler d'un L-polígon (vegeu Fig.2), que no tenia cap forat, el resultat és $1-0 = 1$; coincideix amb el que hi ha calculat mitjançant la definició general.

Sigui S una L-superfície i g denoti el seu gènere⁸,

$$\mathbf{F6: } \chi(S) = 2(1 - g).$$

En el següent exemple, es pot confirmar aquesta última forma de calcular la característica d'Euler per a L-superfícies sabent el seu gènere (F6).

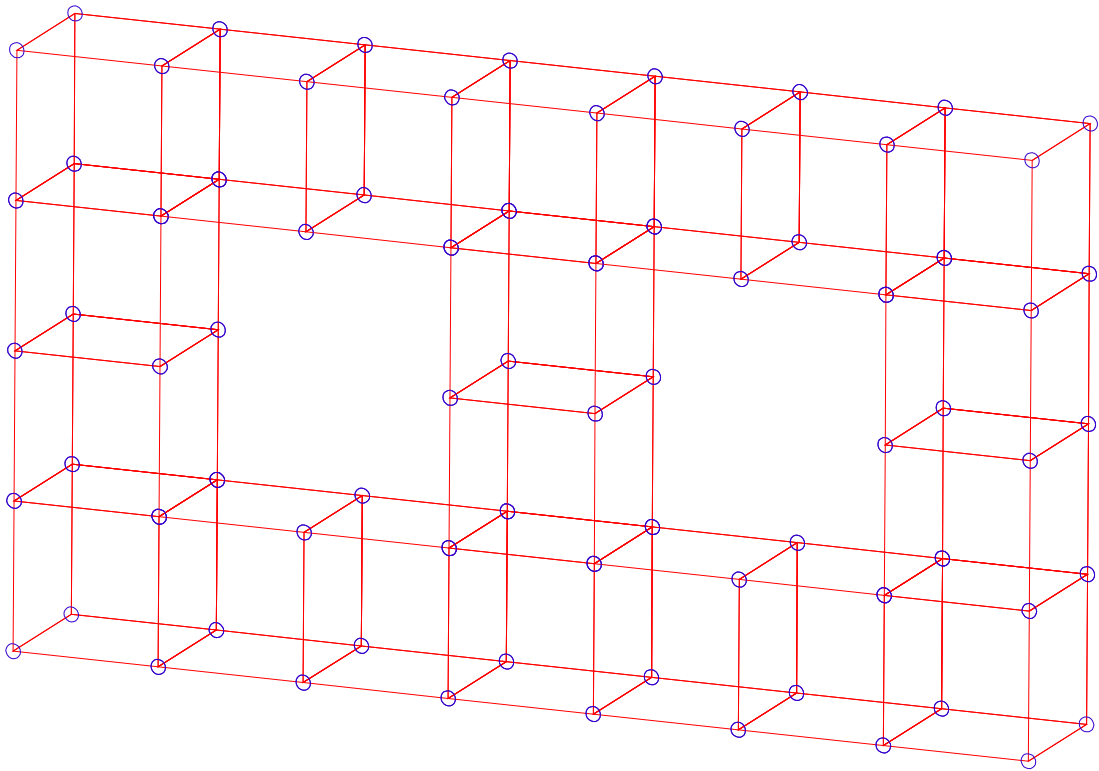


Fig. 10

P: L-políedre homeomòrfic a un 2-Torus

S: L-superfície homeomòrfica a un 2-Torus = Frontera de $P = \partial P$

Si es calcula la característica d'Euler de la frontera de P (un L-políedre homeomòrfic a un 2-Torus) s'estarà calculant la característica d'Euler d'una L-superfície homeomòrfica a un 2-Torus.

b_0 (punts del reticle que pertanyen a la frontera de P) = 76

b_1 (segments unitat de la frontera de P) = 156

b_2 (quadrats unitat de la frontera de P) = 78

$$\chi(\delta\mathcal{P}) = \chi(S) = \sum_{k=0}^2 b_k = 76 - 156 + 78 = -2$$

Si es calcula mitjançant l'expressió particular per a superfícies, tot sabent que el gènere d'un 2-torus és 2:

$$\chi(S) = 2(1 - g) = 2(1 - 2) = -2$$

Es pot veure que coincideix el resultat obtingut mitjançant la definició general (fórmula F3) amb l'obtingut mitjançant la definició particular per a superfícies de gènere g (fórmula F6). També és evident la utilitat pràctica d'aquestes fórmules més particulars per calcular la característica d'Euler de diferents figures. En aquest últim exemple, si se sap el gènere del 2-Torus, es pot aplicar la fórmula F6 i evitar el feixuc recompte de punts, segments i quadrats unitat.

4. Longitud d'una L-corba

Anomenem $p(C)$ al nombre de punts del reticle que pertanyen a l'L-camí (o L-corba) C . D'altra banda, sabem que la característica d'Euler d'un L-camí és $\chi(C) = c_0 - c_1$ i que la longitud d'un L-camí és igual a c_1 (recordem que els L-camins estan formats per segments unitat, la longitud dels quals és 1. D'aquesta manera, la longitud del camí coincideix amb el nombre de segments unitat que el formen.). Per tant, si $\chi(C) = c_0 - c_1$ // $longitud(C) = c_1$ // $p(C) = c_0$

$$\Rightarrow \chi(C) = p(C) - longitud(C)$$

$$\Rightarrow longitud(C) = p(C) - \chi(C)$$

Així doncs es pot afirmar que, sigui C un L-camí de dimensió n , aleshores,

$$\boxed{\mathbf{F7: } longitud(C) = p(C) - \chi(C)}$$

Com a exemple, es pot aplicar la fórmula F7 a les figures 6, 7, 8 i 9, la característica d'Euler de les quals està calculada a sota dels dibuixos.

A la figura 6: $longitud(Fig.6) = 11 - 1 = 10$.

A la figura 7: $longitud(Fig.7) = 10 - 0 = 10$.

A la figura 8: $longitud(Fig.8) = 11 + 1 = 12$.

I finalment a la figura 9: $longitud(Fig.9) = 14 + 2 = 16$.

La validesa d'aquests resultats es pot comprovar fàcilment fent el recompte de segments unitat que componen les figures corresponents.

5. Àrea d'un L-polígon

Per tal d'arribar a la fórmula que permet de calcular l'àrea d'un L-polígon, començarem treballant amb el cas més senzill, un L-rectangle, i, de mica en mica, anirem incrementant les complicacions amb casos no tan simples d'L-polígons.

Primer de tot, deduirem una fórmula per a un L-rectangle P qualsevol. Per fer això, associarem a cada quadrat unitat amb vèrtexs $(x, y), (x+1, y), (x, y+1), (x+1, y+1)$ que el componen, el punt (x, y) , és a dir, el vèrtex inferior esquerre. A cada punt de P que tingui associat un quadrat unitat de P l'anomenarem **punt estrellat**.

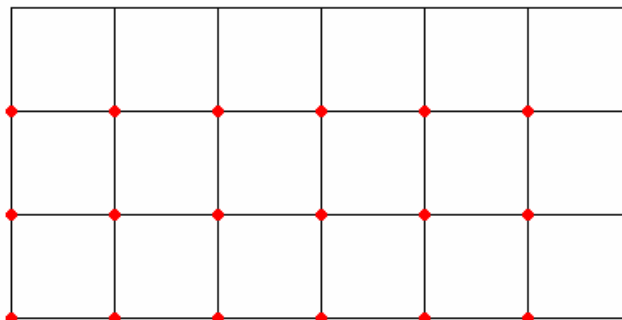


Fig. 11 L-rectangle amb punts estrellats en vermell

Òbviament, el nombre de punts estrellats del rectangle P serà el mateix que el nombre de quadrats unitat que formen P (recordem que un quadrat unitat té una àrea d' $1u^2$) i, de la mateixa manera, serà igual a l'àrea de P. Si ens fixem en la figura 11, veurem que tots els punts de coordenades enteres que estan a P són estrellats excepte la meitat més un dels punts de la seva frontera i, consegüentment, es pot inferir que això passarà per tot L-rectangle.

$$punts\ estrellats = p(P) - \left[\frac{1}{2} p(\delta P) + 1 \right] = p(P) - \frac{1}{2} p(\delta P) - 1 = 28 - \frac{18}{2} - 1 = 18$$

D'aquí induïm que, sigui P un L-rectangle,

$$\mathbf{F8:} \quad \text{àrea}(P) = p(P) - \frac{1}{2} p(\delta P) - 1$$

Si aquesta fórmula s'aplica a altres L-polígons com els de la figura 12, es verifica que la fórmula F8 dona l'àrea correcta, però això no demostra que ho sigui per a tot L-polígon.

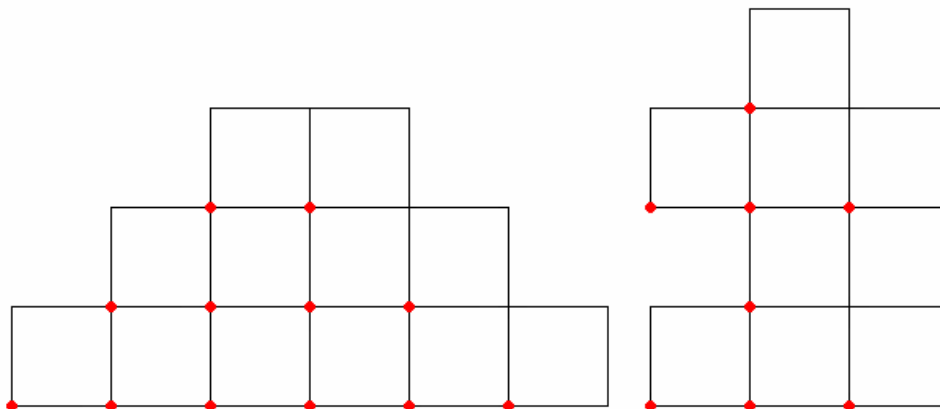


Fig. 12 (12.1 i 12.2)

Com ja hem dit, el càlcul de l'àrea dels L-polígons de la figura 12 mitjançant la fórmula F8 és correcte. En efecte,

$$\text{àrea}(\text{Fig.12.1}) = 22 - \frac{18}{2} - 1 = 12u^2 \quad \text{àrea}(\text{Fig.12.2}) = 18 - \frac{18}{2} - 1 = 8u^2$$

Ara bé, si es considera un L-polígon com el de la figura 13, els resultats canvien.

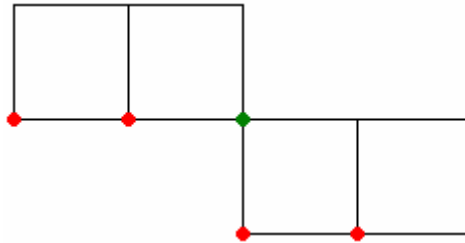


Fig. 13

Cal fixar-se que aquest L-polígon, a diferència dels de les figures 11 i 12, té dos quadrats unitat que només tenen en comú un únic punt del reticle L (punt verd). Dit d'una altra manera, la característica d'Euler de la frontera (un L-camí) de les figures 11 i 12 és 0 (recordem la fórmula F4) mentre que la característica d'Euler de la figura 13 és -1 ($\chi(\text{Fig.13}) = 1 - t = 1 - 2 = -1$).

Provem d'aplicar la fórmula F8 a la figura 13 (d'àrea = $4u^2$):

$$\text{àrea}(13) = 11 - \frac{11}{2} - 1 = 4,5u^2 \text{ que no coincideix amb el recompte dels 4 quadrats unitat}$$

Veiem, doncs, que la fórmula F8 no serveix per certs L-polígons. Aleshores, en lloc de calcular els punts del reticle L que estan a la frontera d'un L-polígon, el que hem de calcular són els segments unitat que estan a la frontera.

Per tal de veure-ho més bé, ens fixarem en què passa amb dues figures (Fig. 14) d'igual àrea ($2u^2$) però amb petites diferències:

- Elements característics de la primera, P:
 - Tots els seus punts són de la frontera.
 - Tots els seus punts pertanyen a 2 segments unitat de la frontera. (El punt blau pertany a 3 segments unitat, però només 2 són de la frontera).
- Elements característics de la segona, P':
 - Tots els seus punts són de la frontera.
 - Almenys un punt, en aquest cas el punt verd, pertany no a 2 sinó a 4 segments unitat de la frontera.

Val a dir que cap altra classe de punts poden aparèixer a la frontera d'un L-polígon (és a dir, tot punt de la frontera d'un L-polígon, o bé pertany a 2 segments unitat de la mateixa frontera o bé en pertany a 4).

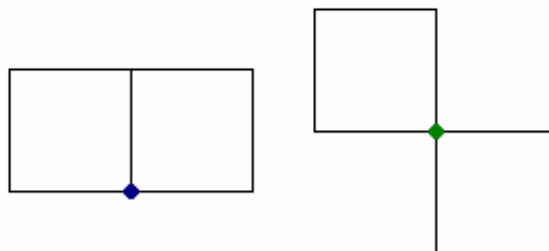


Fig. 14 (P i P')

Sabem que la *longitud*(δP) és igual al nombre de segments unitat de la frontera d'un L-polígon P. D'aquesta manera, per l'L-polígon P de la figura 14, es verifica la següent igualtat:

$$p(P) = p(\delta P) = \text{longitud}(\delta P) = 6$$

Mentre que a l'L-polígon P', es verifica:

$$p(P') = p(\delta P') = 7, \text{ en canvi: } \text{longitud}(\delta P') = 8$$

Així doncs, tot sabent que l'àrea de P i P' és igual a 2, per tal d'obtenir una nova fórmula que calculi l'àrea dels L-polígons P i P' correctament, cal modificar la fórmula F8 de la següent manera:

$$\mathbf{F9: } \text{àrea}(P) = p(P) - \frac{1}{2} \text{longitud}(\delta P) - 1$$

Aquesta nova fórmula és vàlida, doncs, per tots els L-polígons que hem vist en aquest apartat; des dels de les figures 11 i 12, on tots els punts de la frontera pertanyen a 2 segments unitat d'aquesta, fins els de la figura 15, on hi ha punts de la frontera que pertanyen a 4 segments unitat d'aquesta frontera.

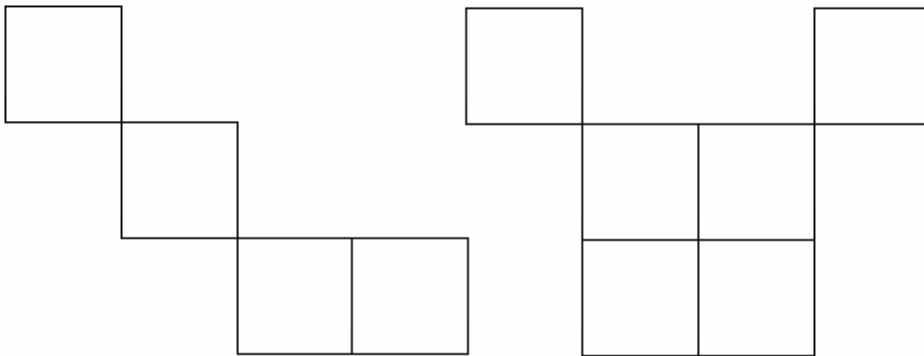


Fig. 15

Ara bé, totes les figures analitzades en aquest apartat de càlcul d'àrees d'L-polígons són simplement connexes, és a dir, que no tenen forats o, dit més tècnicament, que la seva frontera es pot contraure contínuament a qualsevol dels seus punts. Si apliquem la fórmula F9 a L-polígons no simplement connexos amb un únic forat, com els de la figura 16, veiem que l'àrea dona un error de -1.

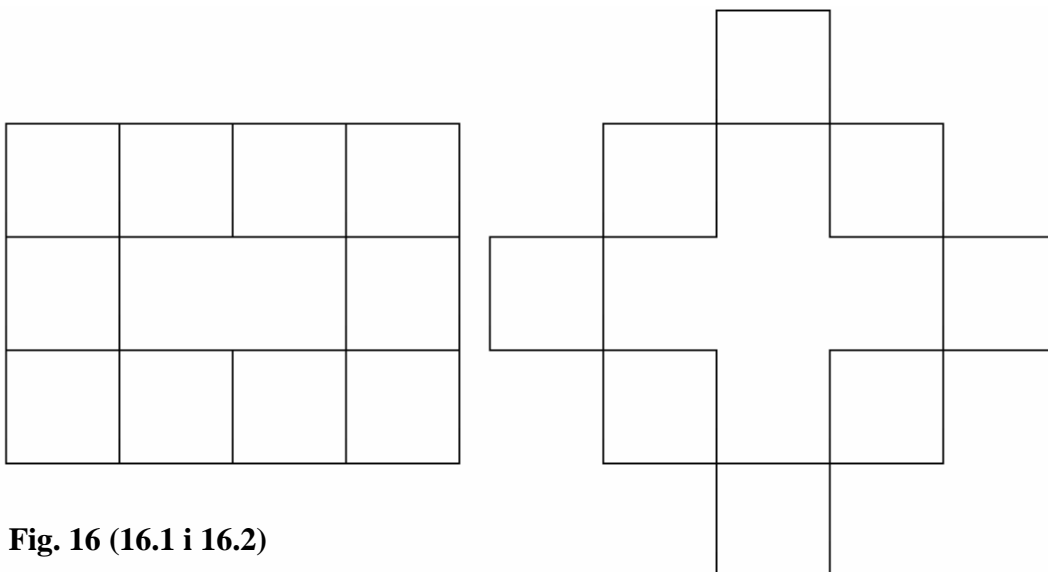


Fig. 16 (16.1 i 16.2)

$\text{Àrea}(\text{Fig.16.1}) = 10u^2$. Segons la fórmula F9: $\text{àrea}(\text{Fig.16.1}) = 20 - 20/2 - 1 = 9u^2 \rightarrow$ error de -1.

$\text{Àrea}(\text{Fig.16.2}) = 8u^2$. Segons la fórmula F9: $\text{àrea}(\text{Fig.16.2}) = 24 - 32/2 - 1 = 7u^2 \rightarrow$ error de -1.

Així doncs, sembla que l'àrea d'un L-polígon **no simplement connex amb 1 forat** és:

$$\mathbf{F10: \text{àrea}(P) = p(P) - \frac{1}{2} \text{longitud}(\delta P)}$$

Si en canvi analitzem L-polígons amb 2 forats, veurem que l'error respecte la fórmula F9, en lloc de ser de -1, és de -2. Amb 3 forats, l'error és de -3. D'aquesta manera, si tenim un L-polígon de f forats i tenint en compte les fórmules F9 i F10, podem fer la hipòtesi que:

$$\text{àrea}(P) = p(P) - \frac{1}{2} \text{longitud}(\delta P) - (1 - f)$$

Quan no tenim cap forat, com en les figures 11, 12, 13, 14 i 15, l'últim terme de la fórmula és -1 (com a la fórmula F9). Quan hi ha 1 forat, com a la figura 16, aquest darrer terme és 0 (com a la fórmula F10). Quan hi ha 2 forats, el darrer terme és 1, pel que queda compensat l'error de -2 que sorgia en aplicar la fórmula F9. I així successivament.

En resum i tenint en compte la fórmula F5 ($\chi(P) = 1 - f$) i la fórmula F7 ($\text{longitud}(C) = p(C) - \chi(C)$) (recordem que la fórmula F7 feia referència a L-camins, que equivalen a la frontera d'un L-polígon), la fórmula general per al càlcul d'àrees d'L-polígons és pot escriure com:

Donat P un L-polígon de dimensió 2, aleshores:

$$\mathbf{F11: \text{àrea}(P) = p(P) - \chi(P) - \frac{1}{2} [p(\delta P) - \chi(\delta P)]}$$

Val a dir que si substituïm els valors $\chi(P)$ i $\chi(\delta P)$ pels propis dels polígons homeomòrfics a un disc tancat (1 i 0 respectivament), $p(P)$ per $b + i$ (essent b els punts de la frontera i i els interiors) i $p(\delta P)$ per b , obtenim el **Teorema de Pick** (fórmula F1), que com ja hem comentat a la introducció és vàlid per a càlcul d'àrees de polígons homeomòrfics a un disc tancat. Cal remarcar que el T. de Pick serveix tant per a L-polígons com per a R-polígons i de fet, la fórmula F11 sembla que també és vàlida per a ambdós tipus, però amb els passos deductius i la demostració exposada en aquest treball només ens és possible d'afirmar que és certa per a tot L-polígon.

$$\text{àrea}(P) = p(P) - \chi(P) - \frac{1}{2} [p(\delta P) - \chi(\delta P)]$$

$$\text{àrea}(P) = b + i - 1 - \frac{1}{2} b$$

$$\text{àrea}(P) = i + \frac{1}{2} b - 1$$

Tornant a la fórmula F11, cal dir que ha estat deduïda a partir d'exemples concrets i que, tot i que de moment sembla que es pot aplicar a qualsevol tipus d'L-polígon, per poder-se acceptar com a vàlida, primer s'hauria de demostrar.

La demostració d'aquesta fórmula es fa seguint un mètode d'inducció. Hem decidit d'afegir la demostració a l'apèndix (A1) copiada gairebé literalment del document "Càlcul de longituds, àrees i volums comptant punts" del Dr. Jaume Llibre. En aquesta, utilitzem les mateixes notacions i l'acompanyem d'unes il·lustracions per facilitar-ne la comprensió però sense fer gaires aclariments pel que fa als tecnicismes. Per a aquells qui hi estiguin interessats, però, els convido a fer-li un cop d'ull ja que és una demostració relativament senzilla d'entendre (amb els conceptes explicats en aquest treball), però molt elegant pel que fa a la forma. De tota manera i com a apartat final d'aquest treball, hem decidit de fer una breu explicació de les demostracions per inducció a les matemàtiques.

6. El mètode d'inducció matemàtica

La inducció matemàtica és un mètode mitjançant el qual es pot demostrar que una afirmació és vertadera per a un nombre infinit de casos. El procés de demostració per inducció consta bàsicament de dos passos:

1. Demostrar que l'afirmació és certa per al primer cas (que sol ser una substitució trivial).
2. Demostrar que, si l'afirmació és certa per a un cas qualsevol (n), també ho serà per al següent ($n + 1$).

D'aquesta manera, si els dos passos es poden demostrar convenientment, s'haurà demostrat la validesa de l'afirmació per tots els casos des del primer fins a n . Això és degut que, si considerant que és certa per n , ho és també per a $n + 1$, llavors si és certa per a 1 (que s'ha demostrat prèviament), també ho serà per a $1 + 1$, i al seu torn ho serà per a $2 + 1$, i per a $3 + 1$ i així successivament fins a l'infinit.

Cal fer notar que si la proposició que volem demostrar s'ha de complir a partir d'un nombre diferent d'1, la demostració del "primer cas" correspondrà a aquest i no pas a 1. (per exemple, si volem demostrar la proposició $n! > 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$, el primer cas en el qual s'ha de verificar la fórmula és 4 i no pas 1).

La "suposició" que es fa que la proposició és certa per a n quan es demostra que ho és per a $n + 1$ s'anomena **hipòtesi d'inducció** i és el que permet d'afirmar que si i només si l'afirmació és verificada per a n , també ho fa per a $n + 1$.

A continuació es mostra la demostració per inducció de la fórmula que s'utilitza per a la suma dels primers n termes d'una progressió aritmètica.

Proposició:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostració:

→ Primer comprovem que l'afirmació es verifica per a $n = 1$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} ; 1 = \frac{2}{2} ; 1 = 1 \text{ (evidentment vertadera)}$$

→ A continuació demostrem que si la proposició és certa per a n , també ho és per a $n+1$

La fórmula que volem demostrar, per al cas $n + 1$ és:

$$1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

Considerem els n primers sumands i substituïm per **hipòtesi d'inducció**

$$1 + 2 + \dots + n \text{ per } \frac{n(n + 1)}{2} \text{ i tindrem:}$$

$$\frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

on reduït a comú denominador i extret $(n + 1)$ factor comú, queda:

$$\frac{(n + 1)(n + 2)}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

→ Per tant, amb això queda provat que si la proposició és certa per a n , també ho és per a $n + 1$, i juntament amb la verificació de la fórmula per a $n = 1$, queda la proposició demostrada $\forall n \in \mathbb{N}$

A l'apèndix (A2) s'afegeix una altra demostració per mètode d'inducció.

Glossari

1. **Homeomòrfic a un disc tancat:** *Del mot grec “hómoios” (“semblant a”) i “morphé” (“forma”). Anomenem així els polígons que es poden crear intuïtivament a partir de la deformació contínua d’un cercle (o disc tancat). La característica d’homeomorfisme també es pot aplicar entre políedres i boles tancades.*

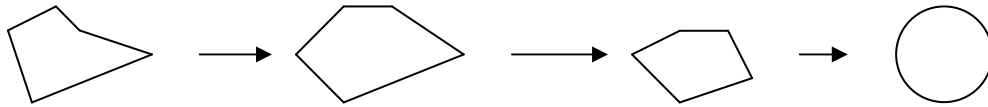


Fig. G1. Un polígon deformant-se de manera contínua fins a obtenir un disc tancat.

2. **L-polígons, R-polígons:** *S’anomenen L-polígons aquelles figures del pla que es poden descompondre en quadrats unitat (quadrats amb vèrtexs de coordenades enteres i de costat una unitat), és a dir, que són un connex format per la unió d’un nombre finit de quadrats unitat. Els R-polígons, en canvi, són figures del pla que es poden descompondre en k-símplexs rectilinis⁴, o dit d’una altra manera, en triangles amb vèrtexs de coordenades enteres. El prefix L/R també es pot estendre a L/R políedres i L/R hiperpolíedres (figures de dimensió superior a 3)... parlant, en aquests casos, de descomposició en cubs i hipercubs unitat (pels L) i de tetràedres i hipertetràedres (pels R). Un cop vista la definició, es pot apreciar que els L-polígons estan continguts en els R-polígons: $L-polígons \subset R-polígons$.*

Tot seguit es mostren quatre figures aclaridores d’L/R-polígons i L/R-políedres.

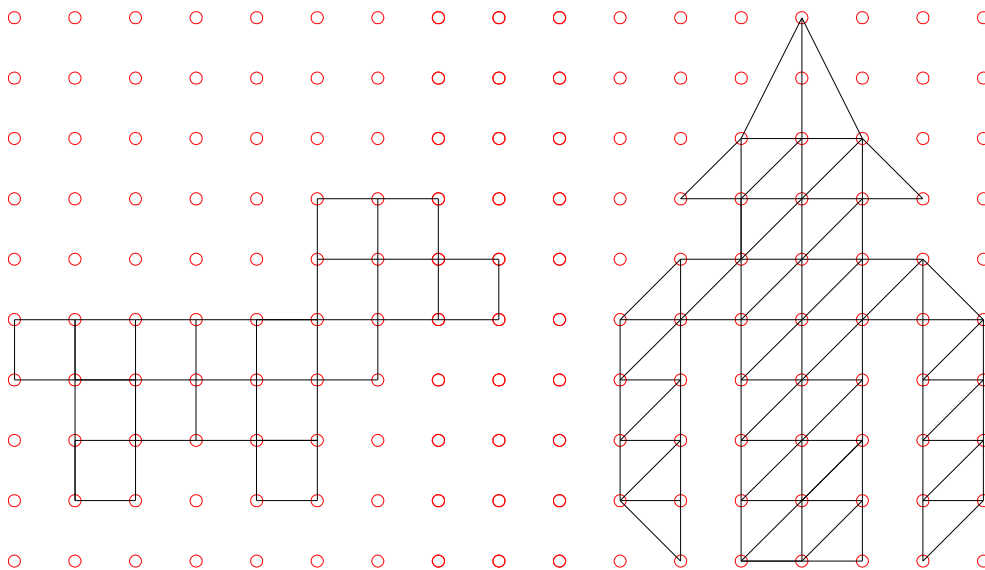


Fig. G2. L-polígon

Fig. G3. R-polígon

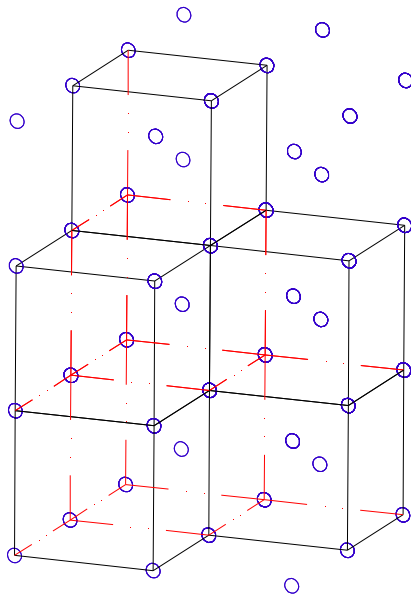


Fig. G4. L-poliedre

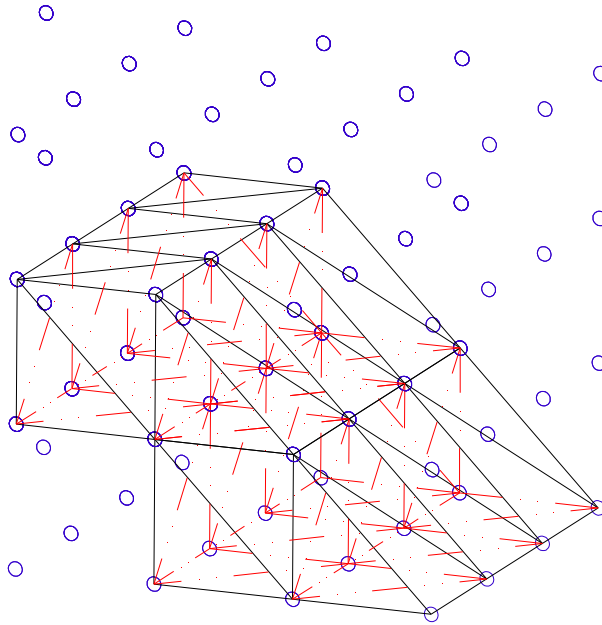


Fig. G5. R-poliedre

3. **Segments unitat:** Els segments unitat són la unió de dos punts de coordenades enteres de manera que la seva longitud sigui 1. D'aquesta manera, els segments unitat sempre seran paral·lels a un eix de coordenades. El mateix es pot aplicar a quadrats unitat, d'àrea $1u^2$, a cubs unitat, de volum $1u^3$ i a hipercubs unitat de dimensió n , d'hipervolum $1u^n$.
4. **Símplex rectilinis:** Si k és un nombre enter positiu, un k -símplex rectilini de dimensió n és l'embolcall convex de $k+1$ punts d'aquesta dimensió. És a dir, un 1-símplex rectilini és la unió de $1+1$ punts de dimensió n , o el que és el mateix, un segment que uneix dos punts de coordenades enteres. Un 2-símplex rectilini és la unió tancada de $2+1$ punts de dimensió n , o el que és el mateix, un triangle amb vèrtexs de coordenades enteres. Un 3-símplex rectilini és la unió tancada de $3+1$ punts de dimensió n , o el que és el mateix, un tetraèdre amb vèrtexs de coordenades enteres.

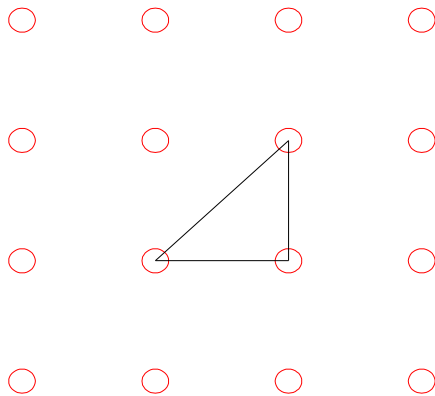


Fig. G6. 2-símplex rectilini

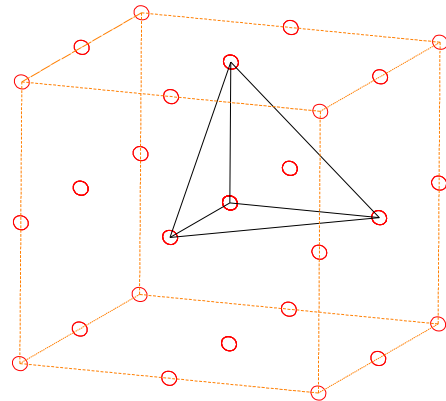


Fig. G7. 3-símplex rectilini

5. **Suma alternada:** Una suma alternada és aquella en què el signe dels sumands canvia successivament. Quan a l'expressió de la característica d'Euler k és 0 o un nombre parell, $(-1)^k = 1$, en canvi, quan k és un nombre senar, $(-1)^k = -1$. El coeficient $(-1)^k$ de a_k , per tant, fa que el signe d'aquest terme es vagi alternant i es creï, així doncs, una suma alternada tal i com es mostra en el desenvolupament de la definició.

6. **Esfera:** Una esfera és una superfície que es defineix de la següent manera:

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

Per exemple, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ correspon a la definició del que coneixem com a circumferència (esfera a dimensió 2). Com es pot apreciar, en aquesta definició s'usen les variables (x, y) en canvi de la x amb subíndexs. Això s'explica perquè S^1 està en el pla (definit per un eix d'abscisses (x) i un d'ordenades (y)). En la definició de S^2 ($S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$), tractem amb els eixos x, y i z (dimensió 3). Ara bé, quan passem d'aquí i si volem arribar fins a dimensió n , cal trobar un altre mètode per definir les variables de cada dimensió, i és per això que s'usen les x amb subíndexs.

Cal fer notar també que les esferes S^n no estan "plenes"; són la superfície (és a dir, la frontera) de la bola oberta D^{n+1} (recordem que les fronteres d'una figura estan una dimensió per sota d'aquesta.). D^n es defineix com:

$$D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\}$$

(dimensió 3) és l'esfera S^2 (de dimensió 2, tot i estar a l'espai tridimensional). El conjunt d'una bola oberta i la seva esfera – frontera és una **bola tancada** (que es defineix com D^n però amb el signe \leq en lloc de $<$).

7. **L-camí:** Un L-camí és un connex format per la unió finita de segments unitat del reticle L . Un L-camí sempre té dimensió 1, tot i que pot estar contingut en qualsevol dimensió.

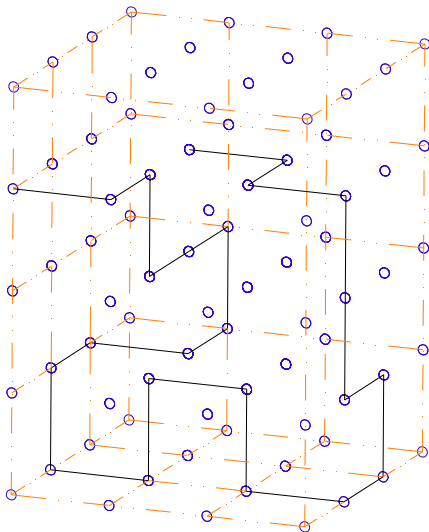


Fig. G8. L-camí a dimensió 3

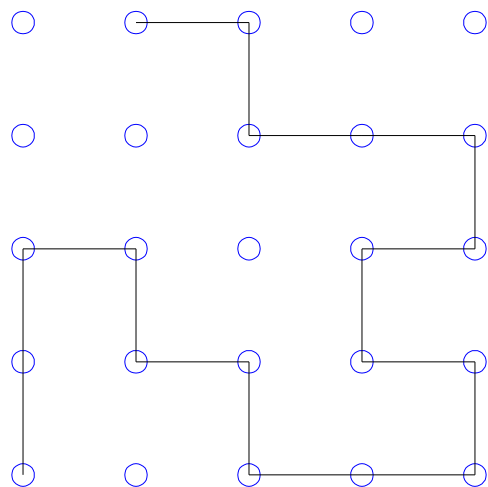


Fig. G9. L-camí a dimensió 2

8. **Gènere d'una superfície:** Per a definir què és el gènere d'una superfície, s'ha de recórrer al Teorema de classificació de superfícies, que diu:

Tota superfície S és homeomòrfica a:

$$\left\{ \begin{array}{l} S^2 \# mT \mid m \geq 0, \text{ i direm que } S \text{ és una superfície orientable estàndard de gènere } m \\ \text{O bé,} \\ S^2 \# n\mathbb{R}P^2 \mid n \geq 1, \text{ i direm que } S \text{ és una superfície no orientable estàndard de gènere } n \end{array} \right.$$

$S^2 =$ **Esfera a dimensió 3**, definida com: $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

$\#$ = **suma connexa**, és a dir, la unió connexa de dos o més cossos. La suma connexa de dues superfícies s'obté fent un forat a cadascuna d'elles i enganxant les vores dels dos forats, el d'una superfície amb el de l'altra.

$T =$ **Torus:** figura que s'obté mitjançant la revolució d'una circumferència sobre una altra ($T^1 = S^1 \times S^1$)

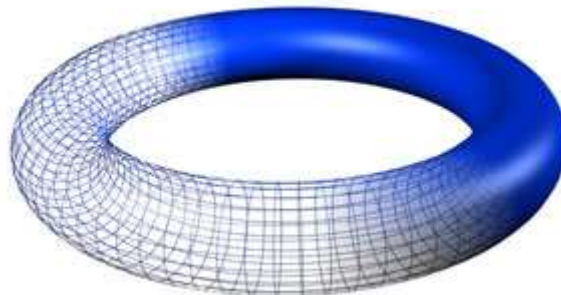


Fig. G10. Torus

$\mathbb{R}P^2 =$ **Pla projectiu:** figura topològica que no es pot dibuixar ni a dimensió 2 ni a dimensió 3. Per a aquest treball n'hi ha prou amb poder calcular el gènere de figures homeomòrfiques a $S^2 \# mT$, pel que no fa falta desenvolupar més el concepte de pla projectiu.

D'aquesta manera, el gènere d'una esfera és 0. Si a aquesta esfera li "enganxem" un torus, el resultat és un torus (gènere 1), si repetim el procediment obtenim un 2-Torus (gènere 2) ...

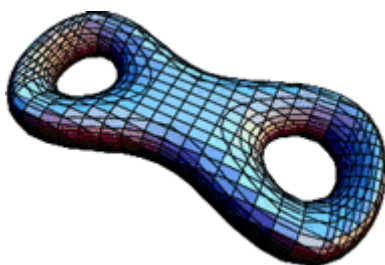


Fig. G11. 2-Torus

Apèndix

A1 – Demostració de la fórmula F11:

Proposició:

Sigui P un L-polígon de \mathbb{R}^2 ,

$$\text{àrea}(P) = p(P) - \chi(P) - \frac{1}{2}[p(\delta P) - \chi(\delta P)]$$

Tenint en compte les fórmules F2 i F3 i emprant les notacions introduïdes en aquestes definicions, tenim: $\chi(P) = a_0 - a_1 + a_2$ i $\chi(\delta P) = b_0 - b_1$.

Per tant, la fórmula F11 es pot escriure com:

$$a_2 = a_0 - (a_0 - a_1 + a_2) - \frac{1}{2}[b_0 - (b_0 - b_1)]$$

o bé, com la següent igualtat:

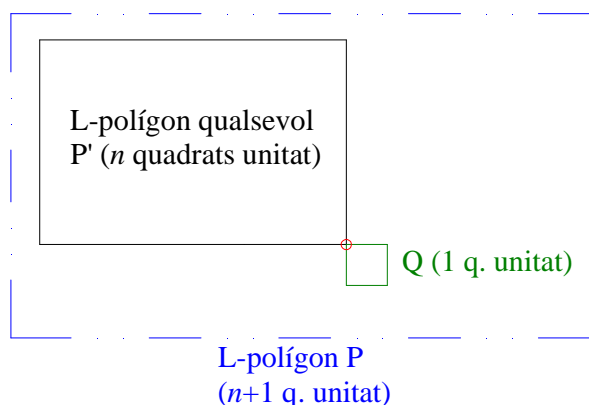
Proposició – I: $2a_2 = a_1 - \frac{1}{2}b_1$

Demostrarem aquesta igualtat (que anomenarem proposició I) per inducció respecte el nombre de quadrats unitat que té el L-polígon P . Primer suposem que P només té un únic quadrat unitat. Per tant, $a_2 = 1$, $a_1 = b_1 = 4$ i la proposició I es verifica trivialment. Ara suposem que també és certa per a qualsevol L-polígon amb n quadrats unitat i anem a veure que també és certa per a qualsevol L-polígon amb $n + 1$ quadrats unitat. Per això distingirem 3 casos:

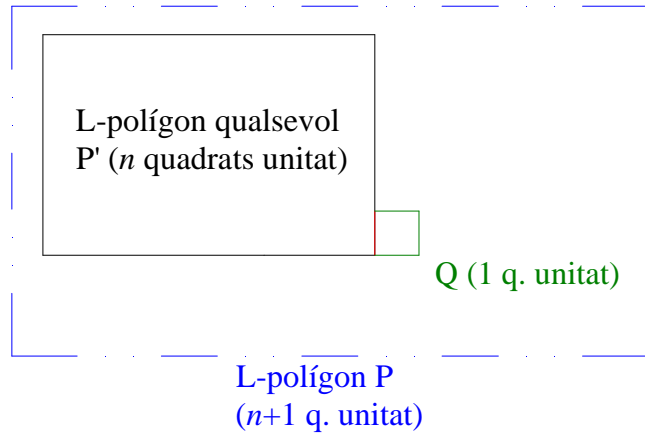
CAS 1: Traiem al L-polígon P amb $n + 1$ quadrats unitat un quadrat unitat Q que només té un punt de contacte amb la clausura P' de P/Q . Com que P' és un L-polígon amb n quadrats unitat, per hipòtesi d'inducció, tenim que es verifica la proposició I per P' ; és a dir, $2a_2' = a_1' - \frac{1}{2}b_1'$. A més tenim que $a_2 = a_2' + 1$, $a_1 = a_1' + 4$ i $b_1 = b_1' + 4$. Substituint

a_2 , a_1 i b_1 a la proposició I, obtenim $2a_2' + 2 = a_1' + 4 - \frac{1}{2}(b_1' + 4) \Rightarrow 2a_2' = a_1' - \frac{1}{2}b_1'$. És a

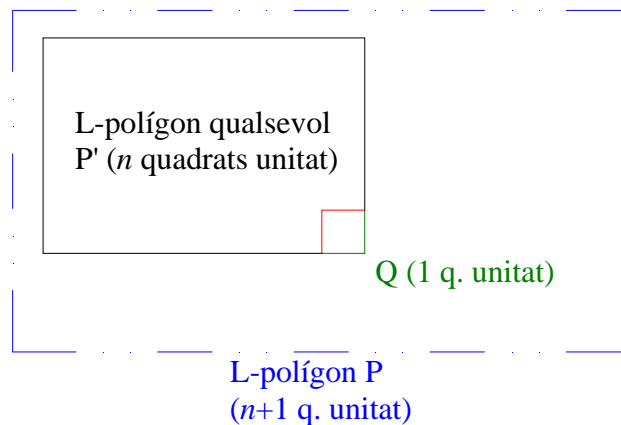
dir, que aquesta es verificarà si i només si es verifica $2a_2' = a_1' - \frac{1}{2}b_1'$ (que ho donem per suposat segons la hipòtesi d'inducció). Llavors, el L-polígon P satisfà la proposició I.



CAS 2: Traiem al L-polígon P amb $n + 1$ quadrats unitat un quadrat unitat Q que només té un segment unitat comú amb la clausura P' de P/Q . Notem que P' és un L-polígon amb n quadrats unitat, llavors es verifica que $2a_2' = a_1' - \frac{1}{2}b_1'$. A més, tenim que $a_2 = a_2' + 1$, $a_1 = a_1' + 3$ i $b_1 = b_1' + 2$. Substituint a_2 , a_1 i b_1 a la proposició I, obtenim $2a_2' + 2 = a_1' + 3 - \frac{1}{2}(b_1' + 2) \Rightarrow 2a_2' = a_1' - \frac{1}{2}b_1'$. És a dir, que aquesta es verificarà si i només si es verifica $2a_2' = a_1' - \frac{1}{2}b_1'$. Llavors, el L-polígon P satisfà la proposició I.



CAS 3: Traiem al L-polígon P amb $n + 1$ quadrats unitat un quadrat unitat Q que té exactament 2 segments unitat comuns amb la clausura P' de P/Q i de manera que P' sigui connexa. Notem que P' és un L-polígon amb n quadrats unitat, llavors es satisfà que $2a_2' = a_1' - \frac{1}{2}b_1'$. A més, tenim que $a_2 = a_2' + 1$, $a_1 = a_1' + 2$ i $b_1 = b_1'$. Substituint a_2 , a_1 i b_1 a la proposició I, obtenim $2a_2' + 2 = a_1' + 2 - \frac{1}{2}b_1' \Rightarrow 2a_2' = a_1' - \frac{1}{2}b_1'$. És a dir, que aquesta es verificarà si i només si es verifica $2a_2' = a_1' - \frac{1}{2}b_1'$. Llavors, el L-polígon P satisfà la proposició I.



Notem que només cal considerar aquests tres casos, ja que donat un L-polígon qualsevol amb $n + 1$ quadrats unitat i $n \geq 1$, sempre existeix un quadrat unitat Q verificant un dels tres casos. Per tant, la fórmula F11 està provada.

A2 – Un altre exemple de demostració per inducció:

Considerem la fórmula: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(2n+1)(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

→ Primer confirmem que l'afirmació es verifica per al primer cas ($n = 1$):

$$1^2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{6} \quad ; \quad 1 = 1$$

→ Ara, tot suposant que l'afirmació és certa per a n (hipòtesi d'inducció), demostrem que també ho és per a $n + 1$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 \stackrel{?}{=} \frac{(n+1) \cdot [2(n+1)+1] \cdot (n+1+1)}{6}$$

Apliquem la hipòtesi d'inducció sobre $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

D'aquesta manera, l'equació que volem veure si és certa és:

$$\frac{n \cdot (2n+1) \cdot (n+1)}{6} + (n+1)^2 \stackrel{?}{=} \frac{(n+1) \cdot \overbrace{[2(n+1)+1]}^{2n+3} \cdot (n+1+1)}{6}$$

A continuació, desenvoluparé els 2 membres de la igualtat fins a arribar a una igualtat evident.

$$\begin{aligned} \frac{(2n^2 + n)(n+1)}{6} + n^2 + 2n + 1 &\stackrel{?}{=} \frac{\overbrace{(2n^2 + 3n + 2n + 3)}^{2n^2 + 5n + 3}(n+2)}{6} \\ \frac{2n^3 + 2n^2 + n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6} &\stackrel{?}{=} \frac{2n^3 + 4n^2 + 5n^2 + 10n + 3n + 6}{6} \end{aligned}$$

$$2n^3 + 9n^2 + 13n + 6 = 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6 \quad (\text{evidentment cert})$$

→ Així doncs, queda demostrat que si l'afirmació és certa per a n , també ho és per a $n + 1$, i això juntament amb la confirmació de la seva validesa per a $n = 1$ demostra la proposició $\forall n \in \mathbb{N}$.

Conclusions

Les conclusions que es poden extreure d'aquest treball de recerca són diverses i de caires molt diferents. Tot just començar ja em vaig adonar d'una cosa: els textos tècnics requereixen una atenció extrema en la seva lectura. El document en el qual m'he basat per fer aquest treball té al voltant d'unes dotze pàgines d'extensió i, fins i tot sense treballar-lo tot (en el document també s'explica el càlcul d'àrees d'L-superfícies, de volums d'L-políedres i hipervolums d'L-hiperpolíedres i L-hipersuperfícies), vaig haver de dedicar temps i temps a la seva comprensió. Quan llegia una frase, havia d'estar segur d'haver-la entès abans de passar a la següent, sinó, corria el risc de perdre'm.

Pel que fa a la complexitat de continguts, m'he adonat que el que més ajuda a comprendre nous conceptes són els exemples, i si pot ser, il·lustrats. Per aquest motiu he volgut dedicar temps a fer dibuixos i figures el més clarificadores possible. Referent a aquest tema, també m'ha estat necessari ser extremadament precís, rigorós i ordenat. En matemàtiques, és molt important donar definicions que no puguin induir a ambigüitats i fer classificacions de tot allò que es vol tractar: L-figures o R-figures, figures homeomòrfiques o no a un disc tancat, els tres casos diferenciats de la demostració A1 de l'apèndix... Els passos que es van seguint també han de ser molt clars i ordenats per tal d'evitar, d'aquesta manera, que el lector es perdi. Finalment i a un nivell més general, en aquest treball també ha estat necessària una divisió clara en apartats, ordenats tots ells de manera que es pugui fer una lectura continuada sense problemes de cohesió.

També m'ha cridat molt l'atenció que una fórmula aparentment tan senzilla com pot ser el Teorema de Pick (Fórmula F1), necessiti tants passos per arribar a la seva demostració (i recordem que aquí només es tracta la part d'L-polígons, pel que només queda parcialment demostrada). Nogensmenys, també hem vist altres fórmules que, mitjançant el mètode d'inducció, s'arriba fàcilment a la seva demostració.

Aquest treball, a més, fa adonar de l'existència de pautes lògiques allà on menys t'ho esperes i que es poden arribar a deduir; és pot arribar a una fórmula que, amb unes poques variables, dona una magnitud d'una figura sigui quina sigui la seva forma. És interessant també, però, trobar fórmules que corresponguin a casos concrets de la fórmula general i que simplifiquin els càlculs.

També m'he adonat que a Internet no es troba gaire informació de temes tan restringits com aquest, cosa que m'ha obligat a recórrer a altres fonts d'informació.

Al principi del treball, tenia pensat d'arribar fins al càlcul de volums d'L-políedres, però un cop vaig començar a desenvolupar-lo, em vaig adonar que valia més la pena arribar només fins al càlcul d'àrees d'L-polígons. D'aquesta manera podia dedicar més temps a polir detalls i treballar en la clarificació de conceptes i, alhora, evitava haver d'introduir encara més tecnicismes que podien embolicar les coses. Teníem prou teoria per a desenvolupar un bon treball de recerca.

Ara, un cop realitzat el treball, puc dir que aquest ha satisfet els meus objectius. Durant el seu desenvolupament, he après no només conceptes concrets d'una àrea de les matemàtiques, sinó també com són i què impliquen realment. Precisió, rigor, ordre... són uns dels molts exemples de conceptes que estan íntimament relacionats amb aquesta disciplina.

Bibliografia

- ❖ F. AGUILÓ, J. BOADAS, E. GARRIGA i R. VILLALBÍ. *Temes clau de càlcul*; Ed. de la UPC, Barcelona, 1991.
- ❖ J. CASASAYAS i M^a. C. CASCANTE. *Problemas de análisis matemático de una variable real*; EDUNSA Ediciones y Distribuciones Universitarias S.A., 1990.
- ❖ C. KOSNIOWSKI. *Topologia algebraica*; Ed. Reverté, S.A., 1989.
- ❖ J. LLIBRE. *Càlcul de longituds, àrees i volums comptant punts*; Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, Vol. LXII, Núm. 3, Barcelona, 2005.
- ❖ S. SINGH, *L'enigma de Fermat*; Edicions 62, Barcelona, 1998.

*“Les matemàtiques són l’alfabet
amb què Déu creà l’Univers”*

-

– Galileu Galilei –

