

7

Els frisos, les sanefes i els grups d'isometries

FITXA PER AL PROFESSORAT

Nivell: Segon Cicle d'ESO i Batxillerat Artístic

Coneixements previs: Isometries en el pla: translacions, girs i simetries.

Objectius didàctics

- Reconèixer el motiu que genera un fris per translació.
- Descobrir les isometries que deixen invariant un fris.
- Caracteritzar les isometries que deixen invariant un fris.
- Construir un fris a partir d'un motiu i aplicant les isometries.
- Classificar els frisos segons el seu grup de isometries.
- Trobar el motiu mínim que genera un fris coneixent el seu grup de isometries.

Potencial multidisciplinar

- Disseny de sanefes i frisos. (Àrea d'Expressió Plàstica)
- L'Arquitectura gòtica. (Àrea de Ciències Socials)

Orientacions didàctiques

- Al començament de la pràctica cal fer notar que només seran objecte d'estudi aquells frisos que presenten un motiu que es va repetint per una translació de vector donat.
- En l'exercici 1 es menciona especialment les simetries amb lliscament ja que es tracta d'una isometria que probablement no hagin treballat prèviament. És important que l'alumnat es familiaritzi amb aquesta isometria per a poder classificar correctament els frisos.
- Els exercicis 2, 3, 4 i 5 serveixen per caracteritzar les isometries que deixin la sanefa invariant. Es poden fer exemples de translacions i de simetries d'eixos de direcció diferent o girs d'amplitud diferent a 180° perquè se'n adonin que la direcció de les rectes que limiten la banda on està situada la sanefa, determinen les característiques del seu grup de simetries.
- El paper vegetal és molt útil per la realització d'aquesta pràctica. En els exercicis 2, 3, 4, 5 i 6 per dibuixar els eixos de simetria, els centres de gir i els vectors de translació sense embrutar la il·lustració. En els exercicis 7, 8, 9, 10, 11, 12 i 13 per aplicar isometries a un motiu inventat.
- S'ha considerat que abans de classificar els frisos convé que els alumnes i les alumnes es familiaritzin amb ells seguint mètodes manipulatius i constructius, aquest és l'objectiu del exercici 7 al exercici 13.
- Trobar el motiu mínim que genera una sanefa no és tan senzill com trobar el motiu que es va repetint per translació, per això s'ha deixat com exercici d'ampliació.
- L'exercici 15 constitueix una proposta molt oberta i està pensat perquè l'alumnat comprovi que les sanefes apareixen en contextos molt diferents: decoracions arquitectòniques, en les decoracions

d'objectes de ceràmica o de fusta, etc. Es demanarà que dibuixin, estudiïn les isometries i classifiquin unes quantes de les sanefes que hagin trobat.

El treball al carrer

L'exercici 6 d'aquesta pràctica apareix en dues versions diferents corresponents a la Porta dels Fillols de la Seu Vella de Lleida i a un edifici de la ciutat de Girona . S'han posat aquests dos exemples perquè presenten diferents grups d'isometries en el mateix edifici. De tota manera cada ensenyant pot adaptar l'exercici a algun altre edifici o motiu que presenti una certa varietat de sanefes.

Material gràfic

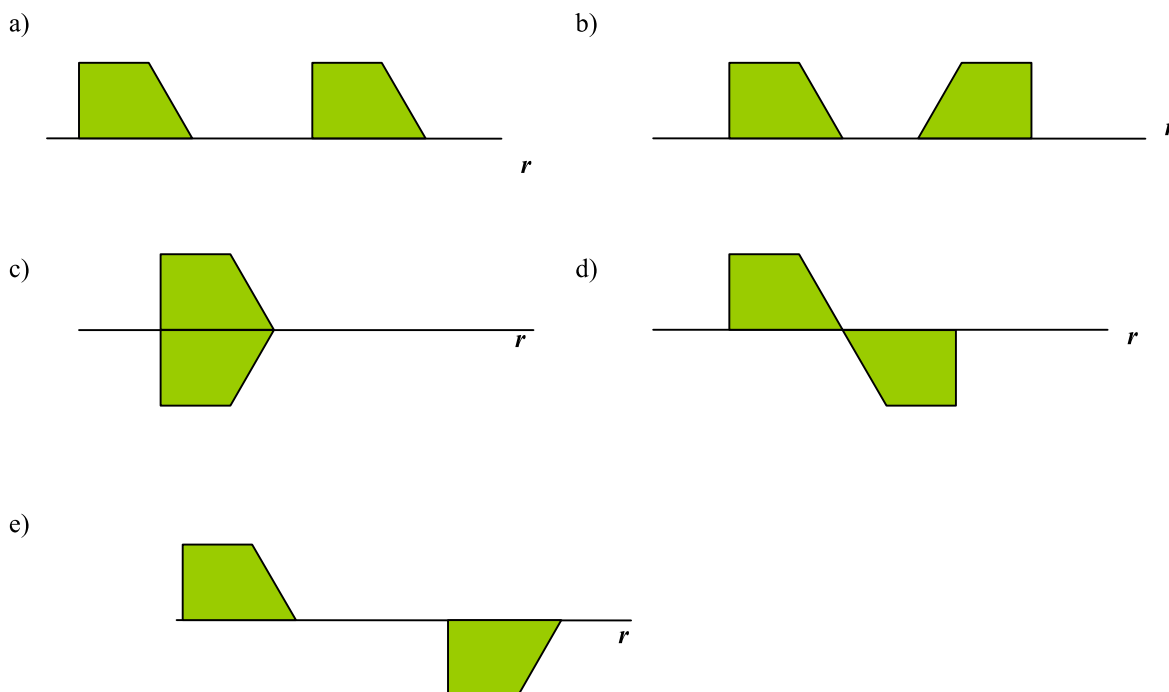
- Fotografia de la Porta dels Fillols del llibre *Les Catedrals de Catalunya* de Xavier Barral, Edicions 62, 1994.

Les sanefes

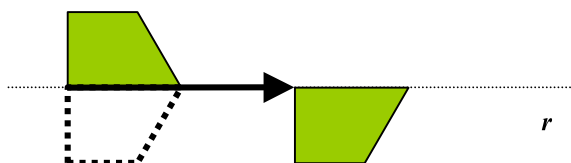
Objectiu: Trobar i caracteritzar les isometries que deixen una sanefa superposada sobre ella mateixa.

Exercici 1

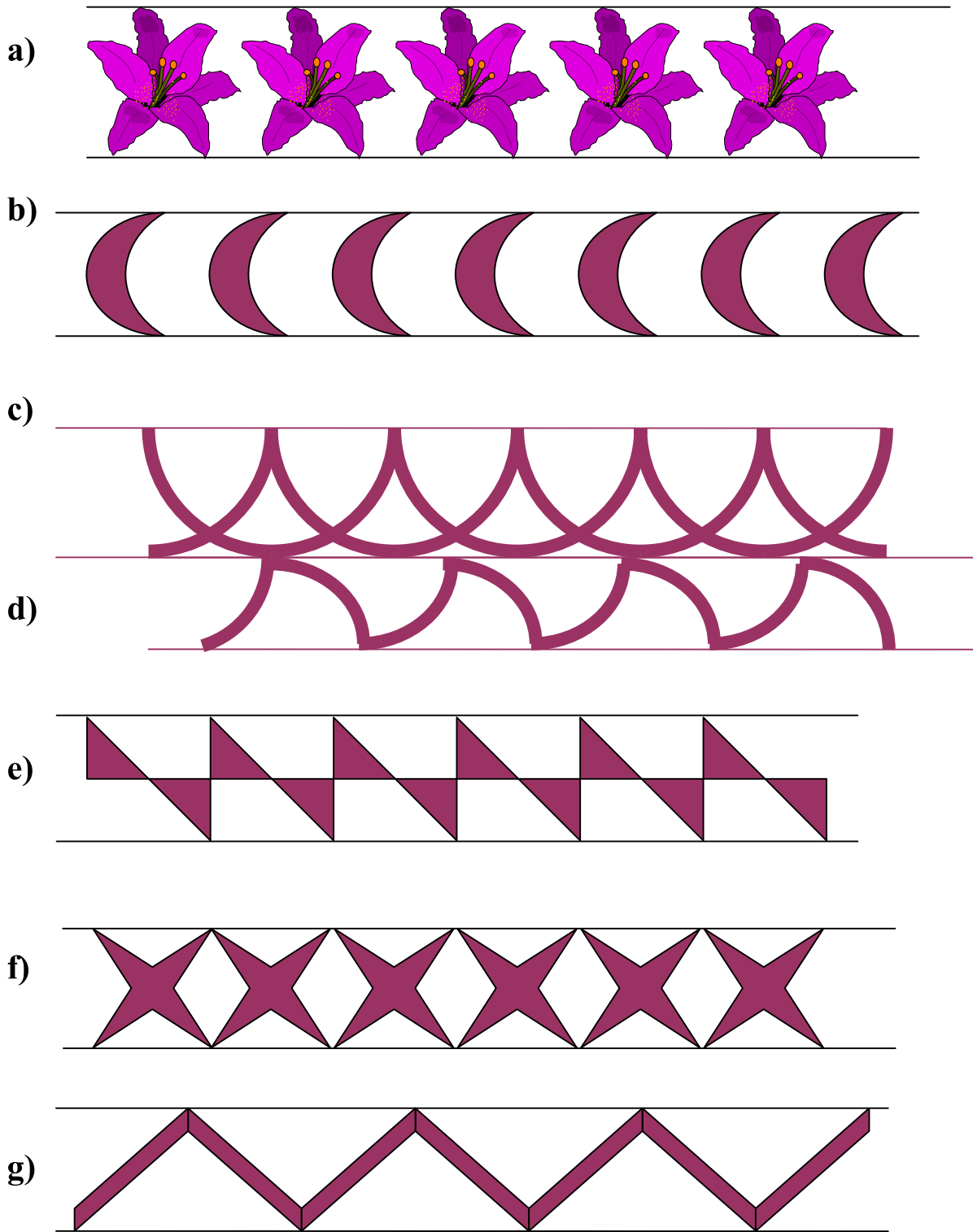
Observeu els parells de trapezidis següents i indiqueu quin tipus d'isometria **que deixi fixa la recta r** cal aplicar a un d'ells per obtenir-ne l'altre.



A l'apartat e) cal aplicar al triangle una simetria d'eix r i una translació de vector paral·lel a r . Aquest moviment és un nou tipus d'isometria que s'anomena *simetria amb lliscament* i l'indicarem representant el seu eix per una recta de punts i la translació que provoca el lliscament per una fletxa que té la mateixa direcció que la recta r , tal com s'indica en el dibuix.



Amb aquest moviment queda completat el conjunt de les isometries format per: translacions, girs, simetries axials i simetries amb lliscament.



Lamina 1

Observeu les sanefes de la làmina 1, totes elles s'obtenen per repetició d'un mateix motiu que es va traslladant al llarg de la banda, aquesta translació es podria repetir indefinidament. Podem pensar les sanefes com regions del pla limitades per dues rectes paral·leles, això ens dona una superfície d'amplada limitada i longitud infinita, recoberta totalment per un motiu que es va repetint, conservant la distància entre dos motius consecutius.

Estudiem quins moviments del pla deixen la sanefa superposada sobre ella mateixa, per això, realitzeu els exercicis següents:

Exercici 2

- Senyaleu, en cada sanefa el motiu que es repeteix per translació. És únic?
- Senyaleu mitjançant una fletxa la translació de vector de longitud mínima que fa coincidir la sanefa sobre ella mateixa.
- Senyaleu, mitjançant fletxes, totes les translacions que desplacen el motiu sobre ell mateix en la sanefa.

Fixeu-vos que si anomenem \vec{v} al vector de translació de longitud mínima, tots els altres vectors de translació són de la forma : $2\vec{v}$, $3\vec{v}$, $4\vec{v}$,..., és a dir múltiples enters de \vec{v} .

Exercici 3

Senyaleu, si s'escau, mitjançant rectes els eixos de simetria que deixen la banda superposada sobre ella mateixa.

Fixeu-vos que només obtenim dos tipus de simetries que són les que tenen l'eix paral·lel i equidistant a les dues rectes que limiten la sanefa i les que tenen l'eix perpendicular a aquestes rectes. Això és així perquè qualsevol simetria que tingues el seu eix en una altra direcció canviaria la direcció de la sanefa i, per tant, seria del tot impossible que quedés superposada sobre ella mateixa.

Exercici 4

Senyaleu, si s'escau, mitjançant rectes de punts, els eixos de simetria amb lliscament i dibuixeu una fletxa per indicar-ne la translació associada al moviment.

Fixeu-vos que la translació de la simetria amb lliscament té la mateixa direcció que la sanefa i per tant els eixos de simetria amb lliscament són sempre paral·lels a les rectes que limiten la sanefa. A més a més l'eix de la simetria amb lliscament és equidistant a les rectes que limiten la sanefa i el vector de translació és la meitat de \vec{v} .

Exercici 5

Senyaleu, si s'escau, mitjançant punts, els centres de gir que deixen la banda superposada sobre ella mateixa, indiqueu-ne l'angle.

Fixeu-vos que els angles de gir són de 180° , ja que és l'única amplitud de gir que deixa invariant la direcció de la banda. Els centres de gir són equidistants a les dues rectes que limiten la banda i dos centres de gir consecutius estan a una distància igual a una meitat de la longitud de \vec{v} .

El grup d'isometries dels frisos

Donat una sanefa o un fris s'anomenem grup d'isometries del fris al conjunt d'isometries que deixen la banda superposada sobre ella mateixa. Si anomenem r a la recta paral·lela equidistant a les dues rectes que limiten el fris, les isometries que componen aquest grup són les que deixen fixa aquesta recta, i són necessàriament:

- Les translacions de vector $n\vec{v}$ amb $n \in \mathbb{Z}$ i \vec{v} paral·lel a r , vector de longitud mínima que deixa invariant la sanefa.
- Les simetries d'eix r .
- Les simetries d'eixos perpendiculars a r i a una distància entre ells igual a $\vec{v}/2$.
- Els girs de 180° que tenen el seu centre en r i a una distància igual a $\vec{v}/2$.
- Les simetries amb lliscament d'eix r i vector $\vec{v}/2$.

Si es componen entre ells aquests moviments el resultat és una isometria d'un d'aquests tipus. Per això els matemàtics parlen del *grup d'isometries* del fris.

Un edifici curiós de Girona

En la cantonada de la Plaça Pompeu Fabra amb la Plaça Catalunya de la ciutat de Girona s'hi troba un bloc de 14 pisos. Els balcons de la seva façana nord estan decorats amb uns dissenys amb aparença de sanefes. Direm que es tracta d'una sanefa quan hi ha un motiu que es va repetint per translació al llarg de la banda. En aquest cas, quan el disseny que observem ens dóna informació suficient per tal de prolongar la sanefa indefinidament. En la làmina 2 es mostren dues fotografies de l'edifici.

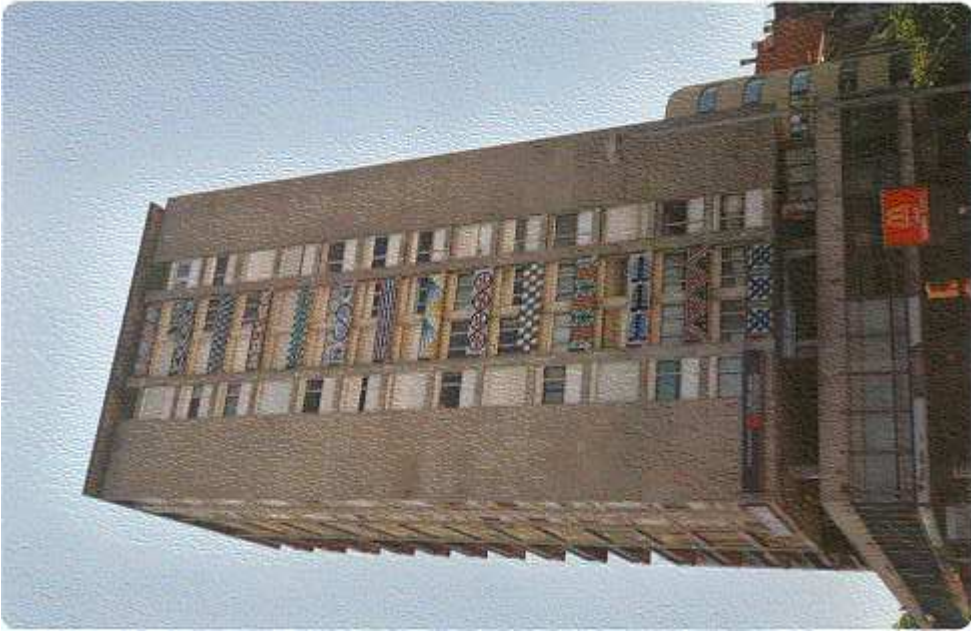
Un dels objectius d'aquest treball és estudiar des del punt de vista geomètric els diferents dissenys que decoren cada balcó. Això vol dir cercar:

- El motiu que es va repetint al llarg del disseny per veure que efectivament es tracta d'una sanefa.
- La translació que cal aplicar d'un motiu a l'altre.
- Les isometries que deixen invariant el disseny, és a dir, que fan que la sanefa es superposi sobre ella mateixa.

Per a poder fer l'exercici convé que a partir de fotografies o des del carrer dibuixeu de forma esquemàtica els dissenys.

Exercici 6

- a) Quins pisos tenen un disseny en el balcó que no és una sanefa periòdica? Dibuixeu esquemàticament en forma de banda horitzontal les sanefes periòdiques que decoren la façana de l'edifici.
- c) Senyaleu en el vostre dibuix mitjançant una fletxa la translació de vector de longitud mínima que fa coincidir la sanefa sobre ella mateixa.
- d) Senyaleu, si s'escau, mitjançant una recta l'eix de simetria horitzontal.
- e) Senyaleu, si s'escau, mitjançant rectes, els eixos de simetria verticals.
- f) Senyaleu, si s'escau, mitjançant rectes de punts i fletxes, els eixos de simetria amb lliscament.
- g) Senyaleu, si s'escau, mitjançant punts, els centres de gir del motiu.
- h) Feu una breu descripció dels elements de simetria per a cada una de les sanefes.



Un edifici curiós de Girona

Làmina 2

Els frisos de la Porta dels Fillols de la Seu Vella de Lleida

Ubicada a la façana sud de la catedral, els seu nom li fou atribuït perquè era l'entrada obligatòria fins al segle XVII, de tots els nadons que havien de rebre el baptisme.

Se suposa que va ser construïda cap a l'any 1220. La porta consta d'un generós nombre d'arquivoltes profusament decorades amb motius geomètrics i ornamentals. L'origen d'aquestes formes ornamentals és molt discutit, ja que alguns estudiosos els relacionen amb l'art islàmic i d'altres amb motius propis de l'arquitectura gòtica del Nord d'Europa. Aquesta decoració geomètrica amb motius repetitius apareix amb més o menys variants en diferents esglésies de la zona de la plana de Lleida i voltants, construïdes la major part al llarg del segle XIII, i els historiadors l'han atribuït a la que han anomenat escola de Lleida. L'objectiu d'aquest treball és estudiar des del punt de vista geomètric les diferents sanefes que decoren cada arquivolta. Això vol dir cercar:

- El motiu que es va repetint al llarg del fris
- La translació que cal aplicar per passar d'un motiu a l'altre.
- Les isometries que deixen invariant al fris, és a dir, que fan que el fris es superposi sobre ell mateix.

Exercici 6

Entenem per sanefa regular quan hi ha un motiu que es va repetint per translació al llarg de la banda. Observeu detalladament les arquivoltes decorades i dibuixeu esquemàticament en forma de banda horitzontal les set sanefes regulars diferents que decoren les arquivoltes de la Porta dels Fillols (assegureu-vos que hi ha un motiu que es repeteix exactament).

Hi ha alguna arquivolta que no estigui decorada per una sanefa regular?

De l'exterior a l'interior el nom de les sanefes periòdiques que decoren cada arquivolta són:

- Palmetes
 - Ziga-zaga amb superfície decorada.
 - Tors anellat
 - Puntetes de diamants
 - Arquets encreuats
 - Doble Ziga-zaga
 - Tiges perlades
- a) Senyaleu mitjançant una fletxa la translació de vector de longitud mínima que fa coincidir la sanefa sobre ella mateixa.
- b) Senyaleu, si s'escau, mitjançant una recta l'eix de simetria horitzontal.
- c) Senyaleu, si s'escau, mitjançant rectes, els eixos de simetria verticals.
- d) Senyaleu, si s'escau, mitjançant rectes de punts i fletxes, els eixos de simetria amb lliscament.

- e) Senyaleu, si s'escau, mitjançant punts, els centres de gir del motiu.
- f) Feu una breu descripció dels elements de simetria per a cada una de les sanefes.

Porta dels Fillols de la Seu Vella de Lleida



Làmina 3

Construcció de sanefes

Objectius: Construir un fris aplicant isometries a un motiu donat.

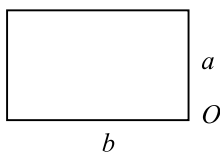
Per fabricar un fris determinat només cal triar un motiu i aplicar-li una combinació de les isometries que deixen invariant una banda. Els matemàtics han demostrat que el nombre de combinacions possibles de moviments és igual a 7. Això ens dona 7 grups d'isometries diferents i ens permet classificar qualsevol fris segons el seu grup d'isometries.

El nostre objectiu serà familiaritzar-nos amb aquests set tipus de frisos. Per això seguint les instruccions fabricarem un fris de cada tipus aplicant al mateix motiu inicial els set grup de isometries.

Exercici 7

Fabricació del fris que només té translacions.

- a) Dibuixeu una figura no simètrica dins del rectangle d'altura a i d'amplada b . Aquest serà el motiu mínim que genera tota el fris.



- b) Trasladeu horitzontalment de manera que el rectangle traslladat comparteixi costat amb l'inicial. Fer-ho indefinidament.
c) Quina translació heu aplicat?
d) Quina és l'amplitud de la franja?

Heu obtingut un fris del tipus F_1

Exercici 8

Fabricació d'un fris amb gir i sense simetries.

- a) Apliqueu al motiu que heu dibuixat en l'apartat a) de l'exercici anterior un gir de 180° amb centre O en un vèrtex del rectangle.
b) Construeix la franja traslladant horitzontalment el disseny anterior de manera que la figura traslladada comparteixi un vèrtex amb l'original i no es superposin. Fer-ho indefinidament.
c) Quina translació heu aplicat?
d) Quina és l'amplitud de la franja?

Heu obtingut un fris del tipus \mathbf{F}_2

Nota: El centre de gir pot ser qualsevol punt que sigui del costat a del rectangle. Aleshores l'amplada de la franja variarà entre a i $2a$.

Exercici 9

Fabricació d'un fris sense girs i només amb simetria horitzontal

- Apliqueu al motiu que heu dibuixat en l'apartat a) de l'exercici 7 una simetria respecte a la recta que conté a b .
- Traslleu horitzontalment el disseny anterior de manera que el rectangle traslladat comparteixi costat amb l'inicial. Fer-ho indefinidament.
- Quina translació heu aplicat?
- Quina és l'amplada de la franja?

Heu obtingut un fris del tipus F_1^1

Exercici 10

Fabricació d'un fris sense girs i només amb simetries verticals.

- Apliqueu al motiu que heu dibuixat en l'apartat a) de l'exercici 7 una simetria respecte la recta que conté a a .
- Traslleu horitzontalment el disseny anterior de manera que el rectangle traslladat comparteixi costat amb l'inicial. Fer-ho indefinidament.
- Quina translació heu aplicat?
- Quina és l'amplada de la franja?

Heu obtingut un fris del tipus F_1^2

Exercici 11

Fabricació d'un fris sense girs ni simetries, i amb una simetria amb lliscament.

- Apliqueu al motiu que heu dibuixat en l'apartat a) de l'exercici 7 una simetria amb lliscament d'eix la recta que conté a b i de vector b .
- Construeix la franja traslladant horitzontalment el disseny anterior de manera que la figura traslladada comparteixi un vèrtex amb l'original i no es superposin. Fer-ho indefinidament.
- Quina translació heu aplicat?
- Quina és l'amplada de la franja?

Heu obtingut un fris del tipus F_1^3

Nota: L'eix de la simetria amb lliscament pot ser qualsevol recta paral·lela a la recta que conté a b . Per exemple si prenem la recta paral·lela a b que parteix per la meitat al rectangle inicial obtenim una sanefa d'amplitud igual a a .

En general l'amplada de la sanefa varia entre a i $2a$.

Exercici 12

Fabricació d'un fris amb gir, simetria horitzontal i simetria vertical.

- Apliqueu al motiu que heu dibuixat en l'apartat a) de l'exercici 7 un gir de 180° respecte O .
- Apliqueu al motiu que heu obtingut una simetria respecte a la recta que conté a b .
- Traslledeu horitzontalment el disseny anterior de manera que el rectangle traslladat comparteixi costat amb l'inicial. Fer-ho indefinidament.
- Quina translació heu aplicat?
- Té simetria vertical? A quina distància es troben dos eixos de simetria verticals consecutius?.

Heu obtingut un fris del tipus F_2^1

Exercici 13

Fabricació d'un fris amb girs, simetria vertical i sense simetria horitzontal.

- Apliqueu al motiu que heu dibuixat en l'apartat a) de l'exercici 4 un gir de 180° amb centre O .
- Apliqueu a la figura una simetria respecte la recta que conté a a i no passa per O .
- Construeix la franja traslladant horitzontalment el disseny anterior de manera que la figura traslladada comparteixi un vèrtex amb l'original i no es superposin. Fer-ho indefinidament .
- Quina translació heu aplicat?
- Té simetria amb lliscament.? Indiqueu-ne l'eix i el vector.

Heu obtingut un fris del tipus F_2^2 .

En els exercicis del 7 al 13 heu construït tots els possibles tipus de frisos regulars, atenent al seu grup d'isometries, obtinguts per repetició d'un mateix motiu.

Els set grups de frisos els indiquem amb la lletra **F** acompanyada d'un subíndex :

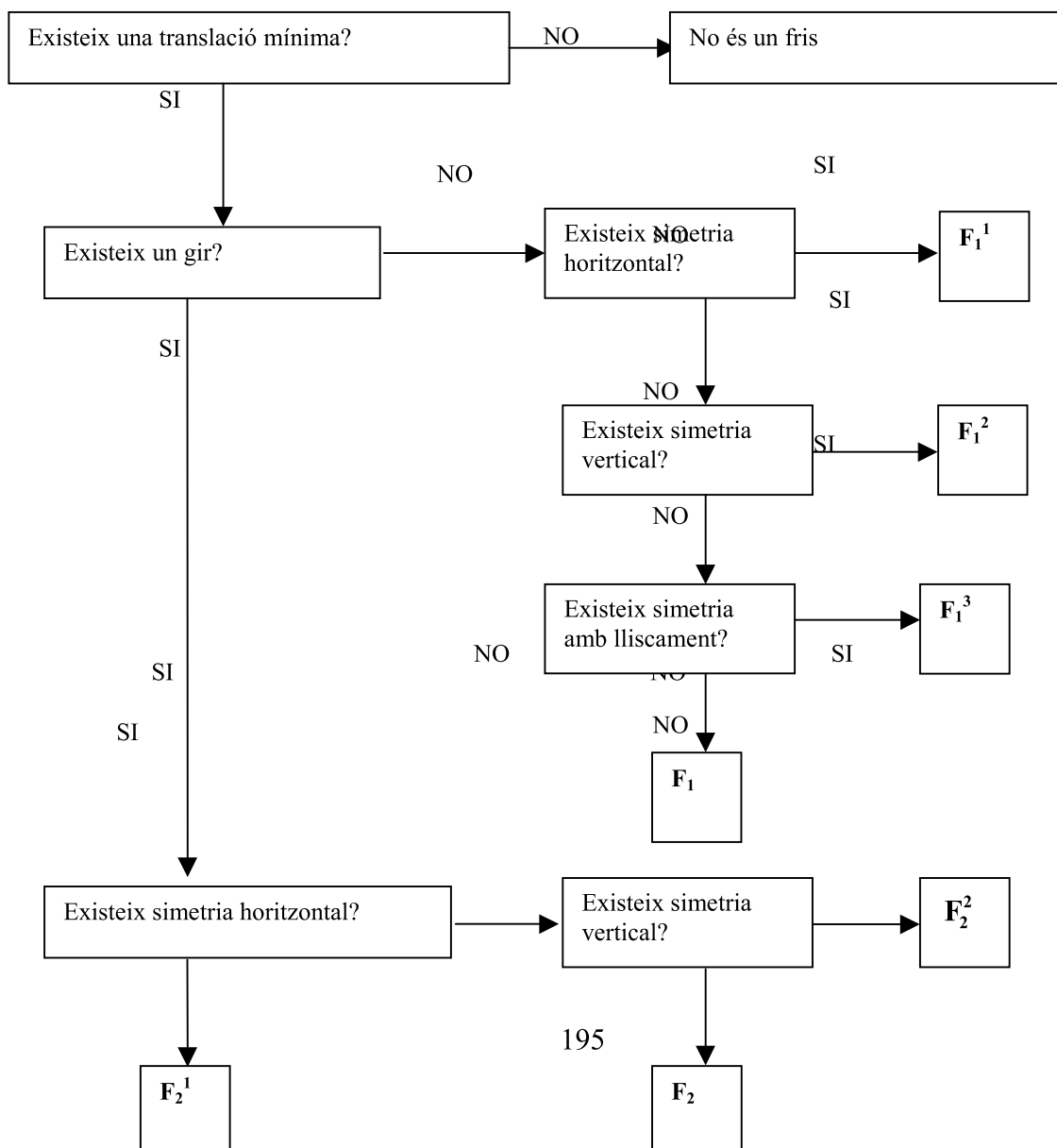
- 1** = no té girs
- 2** = té girs

i un superíndex:

- 1** = té simetria horitzontal
- 2** = té simetria vertical i no en té d'horitzontal
- 3** = té simetria amb lliscament i no té cap simetria axial (ni horitzontal, ni vertical)

Classificació de frisos

Per a poder classificar els frisos podem seguir l'algoritme de classificació anomenat *l'algoritme de Rose i Stafford*, que ens dóna els passos que hem de seguir per a detectar les isometries que generen la sanefa.



Exercici 14

Fent servir l'algoritme de Rose i Stafford mireu de classificar els frisos de la làmina 1 i de l'exercici 6.

Exercici 15

Els frisos i sanefes són utilitzats molt sovint en les decoracions d'objectes molt diferents: façanes d'edificis, objectes de ceràmica, ebenisteria, puntes de coixí, sanefes de diplomes, etc. Intenteu fer-vos la vostra pròpia col·lecció de frisos fotografiant o bé aconseguint il·lustracions d'objectes diversos on apareguin, o bé aconseguint il·lustracions de publicacions on es trobin aquest tipus de d'elements decoratius: revistes de decoració, mostraris de roba, etc. Classifiqueu les sanefes que hagueu aconseguit per aquests mitjans.

EXERCICIS D'AMPLIACIÓ

Motiu mínim d'un fris

Objectiu: trobar el motiu mínim que genera un fris coneixent el seu grup d'isometries

Ara partirem d'una sanefa donada i estem interessats en trobar el motiu mínim a partir de la qual es pot construir, i les instruccions que convé donar per a construir-lo. És a dir el problema que ara ens plantegem és l'invers dels exercicis 7 al 14. Volem, a partir de la sanefa, trobar el seu motiu mínim i redactar les instruccions per a construir-la.

Per això seguirem els passos següents:

- Sobre paper transparent dibuixarem el vector de translació \vec{v} mínim, i si s'escau els eixos de simetria i els centres de gir. Aquest esquema constitueix el patró de la sanefa
- Classificarem la sanefa a partir de l'algoritme de Rose i Stafford.
- El motiu mínim està determinat pel rectangle:
 - En F_1 d'amplada igual a \vec{v} i alçada igual a la de la franja.
 - En F_1^1 d'amplada igual a \vec{v} i alçada igual a la meitat de la franja.
 - En F_1^2 d'amplada $\vec{v}/2$, limitat per dos eixos de simetria.
 - En F_1^3 d'amplada $\vec{v}/2$, d'alçada la de la franja.
 - En F_2 d'amplada $\vec{v}/2$, d'alçada la de la franja.
 - En F_2^1 d'amplada $\vec{v}/2$, i alçada la meitat de la franja i limitat per dos eixos de simetria verticals.
 - En F_2^2 d'amplada $\vec{v}/4$, i d'alçada la de la franja.

El fris està totalment determinat a partir del motiu mínim i del seu grup de simetries (patró de construcció),

Exercici 16

Trobeu el patró i el motiu mínim de tots els frisos que apareixen en la làmina 1 i en l'exercici 6.

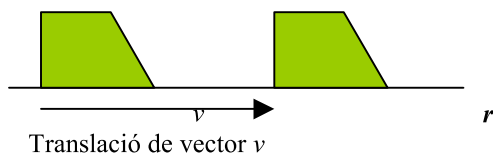
BIBLIOGRAFIA

- Alsina, C. , R. Pérez i C. Ruiz. *Simetría dinámica*. Síntesis. Madrid, 1989
- Barral, Xavier. *Les Catedrals de Catalunya*. Edicions 62. Barcelona, 1994
- Bergés i Saura, Carme. *La Porta dels Fillols*. Lambard. Estudis d'art medieval. Volum VIII - 1995
- Blanco Martín, M^a Francisca. *Movimientos y Simetrías*. Publicaciones de la Universidad de Valladolid, D.L. 1994
- Bossard, Yvon. *Rosaces, frises et pavages. Vol 1: étude pratique*. CEDIC, Paris 1977
- Jaime Pastor, Adela i Angel Gutiérrez Rodríguez. *El grupo de las Isometrías del Plano*. Síntesis. Madrid, 1996
- Weyl, Hermann. *Symetry*. Princeton University Press. New Jersey, 1982

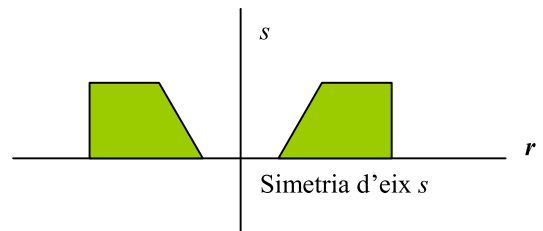
EXERCICIS RESOLTS

Exercici 1

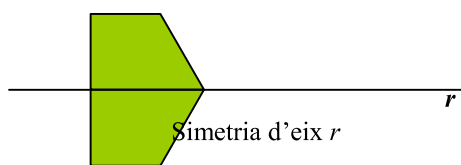
d)



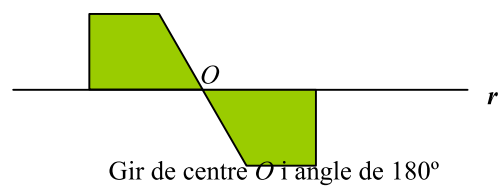
b)



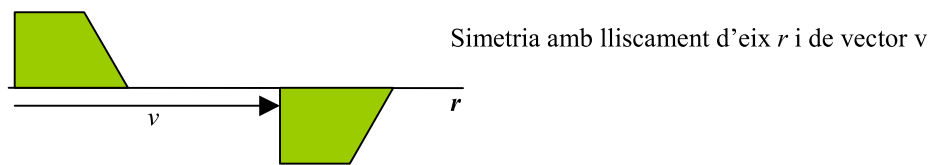
c)



d)



e)



Exercici 2

L'exercici està resolt gràficament en la pàgina següent.

El motiu que en cada sanefa que es va repetint per translació és el que està contingut en **qualsevol** rectangle de base \vec{v} i alçada la de la sanefa.

En el dibuix només hi ha senyalat el vector de translació \vec{v} de longitud mínima, falta dibuixar els vectors $2\vec{v}$, $3\vec{v}$, $4\vec{v}$...

Exercici 3

Les sanefes b) i f) tenen eix de simetria paral·lel i equidistant a les dues rectes que limiten la sanefa.

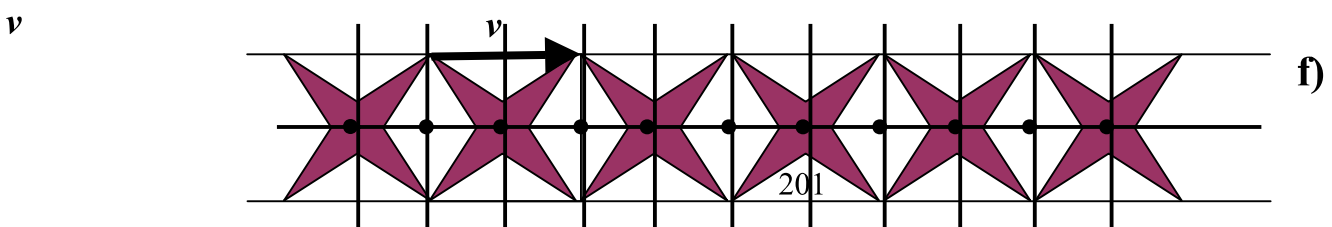
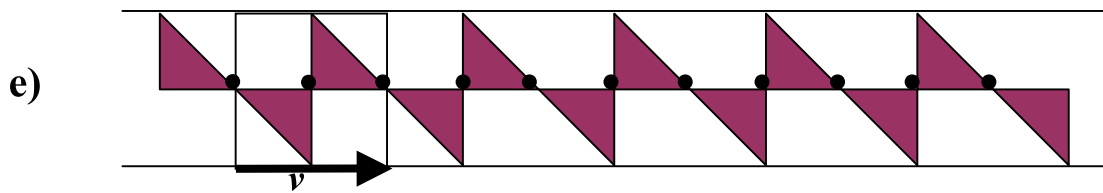
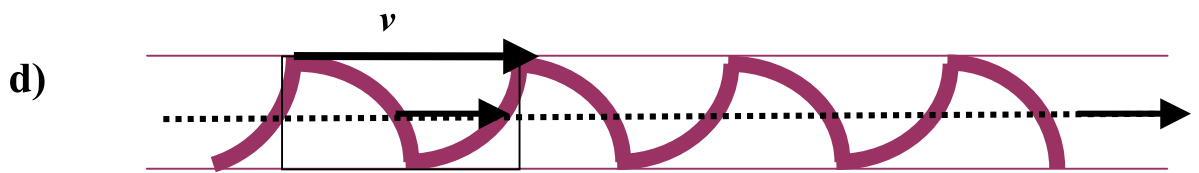
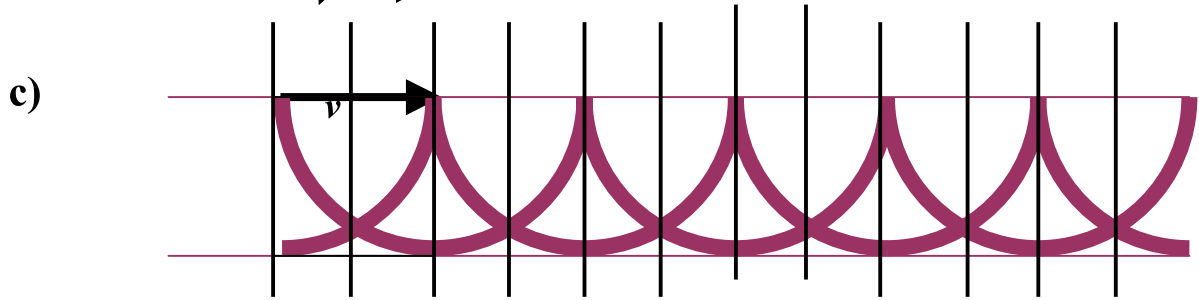
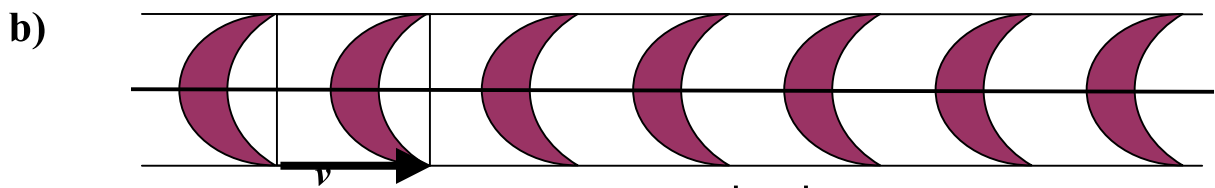
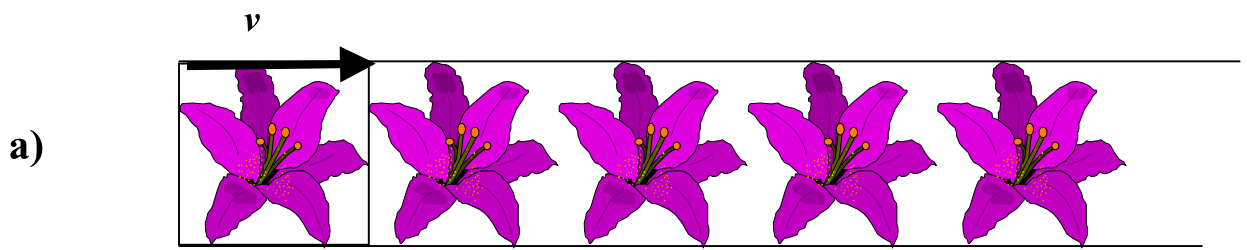
Les sanefes c), f) i g) tenen eixos de simetria perpendiculars a les dues rectes que limiten la sanefa i a una distància entre ells igual $\frac{v}{2}$.

Exercici 4

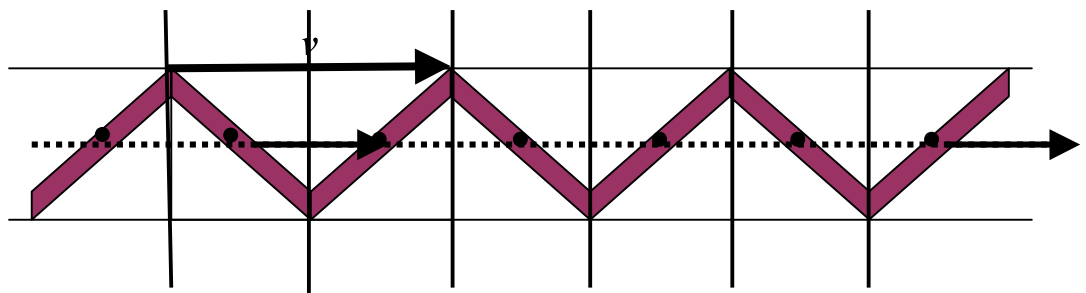
Les sanefes d) i g) són invariants per una simetria amb lliscament d'eix paral·lel a les dues rectes que limiten la sanefa i vector igual a $\frac{\vec{v}}{2}$.

Exercici 5

Les sanefes e), f) i g) tenen centres de gir indicats per punts en el dibuix. L'angle de gir que deixa invariant a les sanefes és de 180° . Els centres de gir estan alineats i són equidistants a les dues rectes que limiten la sanefa.



89)



Ex

ercici 6

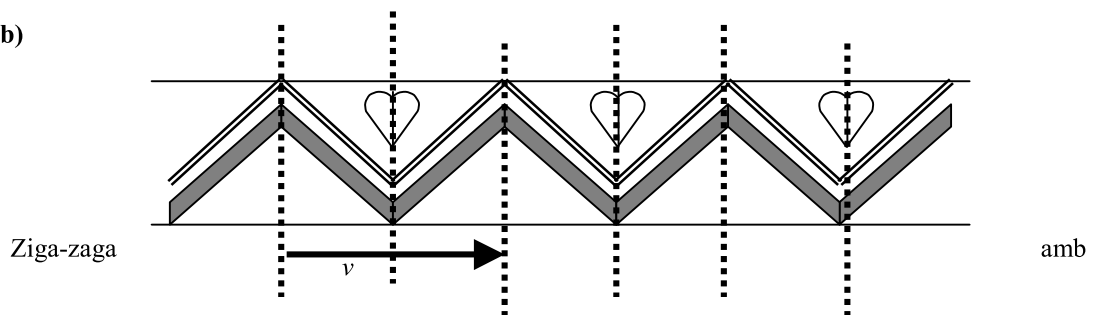
L'arquivolta sisena començant per l'exterior i que es troba entre els arquets encreuats i la doble ziga-zaga no és una sanefa, tal com ho entenem en aquest context. De l'exterior a l'interior:

a)



El vector v és la translació mínima i la recta r és l'eix de simetria.

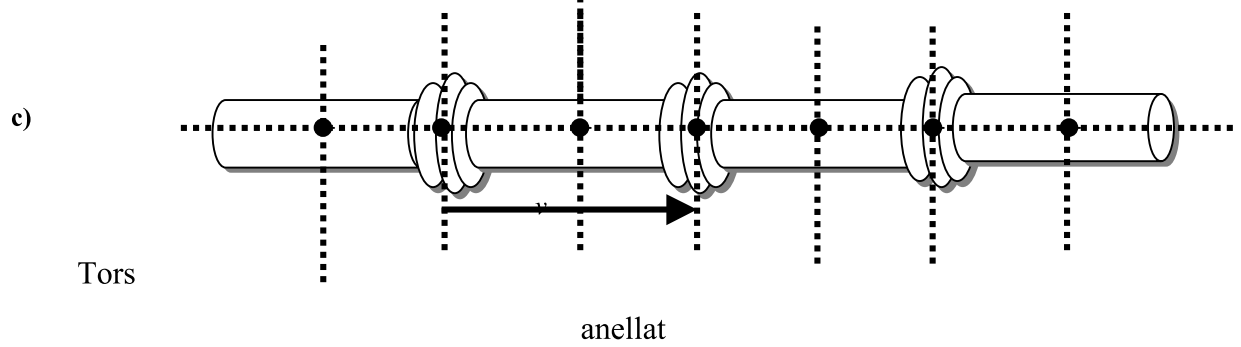
b)



superfície decorada.

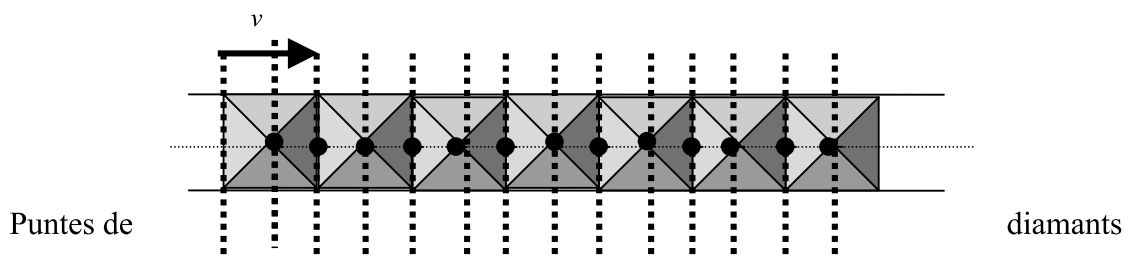
El vector v és la translació mínima i les rectes

verticals són els eixos de simetria.



El vector v és la translació mínima i les rectes de punts són els eixos de simetria i els punts indiquen els centres de gir d'amplitud 180° .

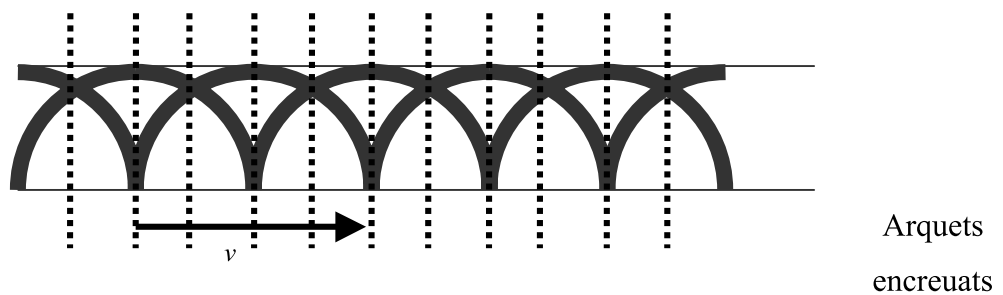
d)



Nota: Cal tenir en compte que està dibuixada des de baix i que la gamma de grisos es deguda a l'ombra, el fris es compon de petites piràmides de base quadrada.

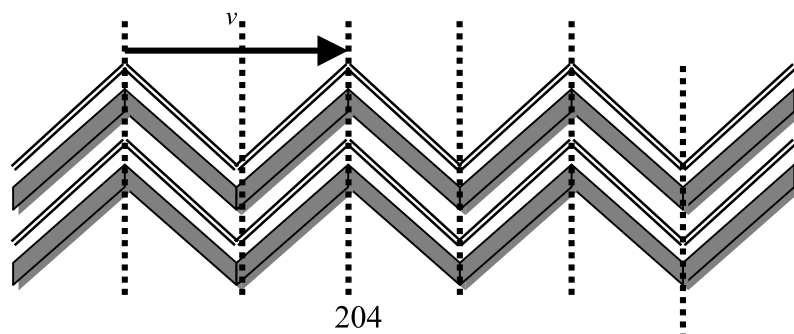
El vector v és la translació mínima i les rectes de punts són els eixos de simetria i els punts indiquen els centres de gir d'amplitud 180° .

e)



El vector v és la translació mínima i les rectes verticals són els eixos de simetria.

f)



Doble Ziga-zaga

El vector v és la translació mínima i les rectes verticals són els eixos de simetria.

g)

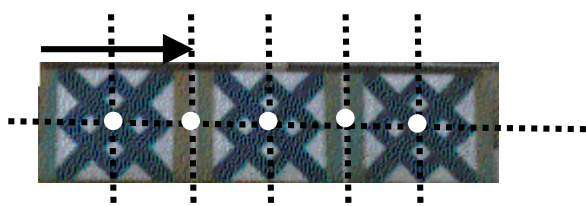


Tiges perlades

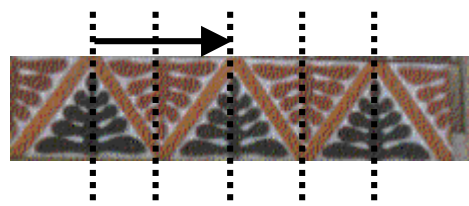
El vector v és la translació mínima i és l'única isometria que deixa invariant el fris.

Exercici 6

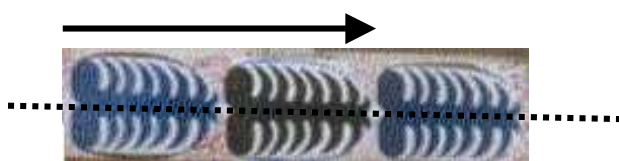
En els balcons dels pisos 4t, 5è, 9è i 11è la sanefa no és periòdica, no hi ha un motiu que es vagi repetint per translació i per tant no podem saber com continuaria el disseny al prolongar la longitud de la banda. Es donen a continuació l'estudi detallat de les sis primeres sanefes. Les rectes de punts senyalen els eixos de simetria, la fletxa indica el vector de translació mínima i els punts, en color blanc, perquè es distingeixin sobre la fotografia, indiquen els centres de gir d'amplitud 180°.



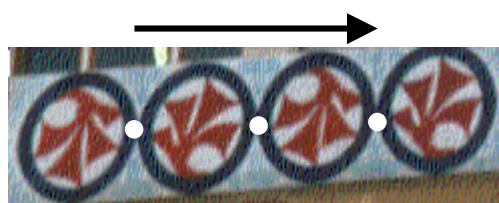
Pis 1



Pis 2



Pis 3

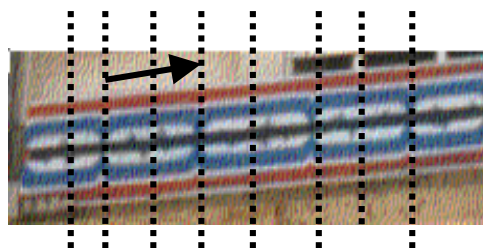


Pis 6



Pis 7

El
balcó



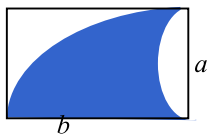
Pis 8

del 10è pis té simetria horitzontal i simetries verticals i té girs amb centre el punt de tall els eixos de simetria i amplitud de 1180° . Les sanefes del 12è i 13è pis tenen un motiu que es va repetint per translació, però no hi ha cap simetria, ni gir, ni simetria amb lliscament que les deixi invariants. El balcó de l'últim pis està decorat amb una sanefa invariant per simetries verticals.

Exercici 7

Fabricació del fris que només té translacions.

c)



d)

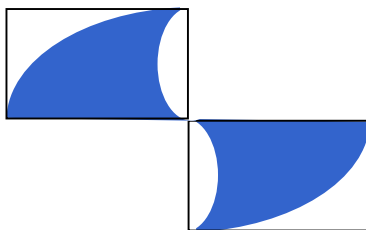


- e) La translació que hem aplicat és la de vector \vec{b}
- f) La franja té una amplitud igual a a .

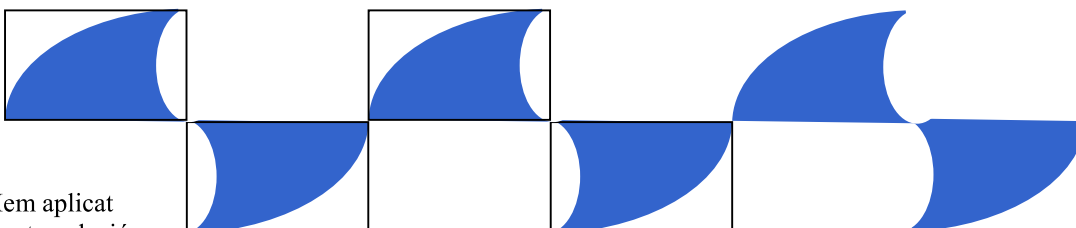
Exercici 8

Fabricació d'un fris amb gir i sense simetries.

e)



f)



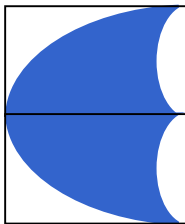
- e) Hem aplicat una translació de vector $2\vec{b}$.
- f) L'amplitud de la franja és $2a$.

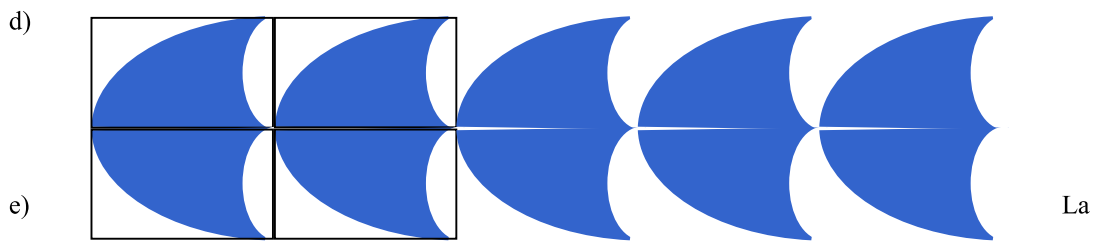
Nota: El centre de gir pot ser qualsevol punt que sigui del costat a del rectangle. L'amplada de la franja variarà entre a i $2a$.

Exercici 9

Fabricació d'un fris sense girs i només amb simetria horitzontal

c) .

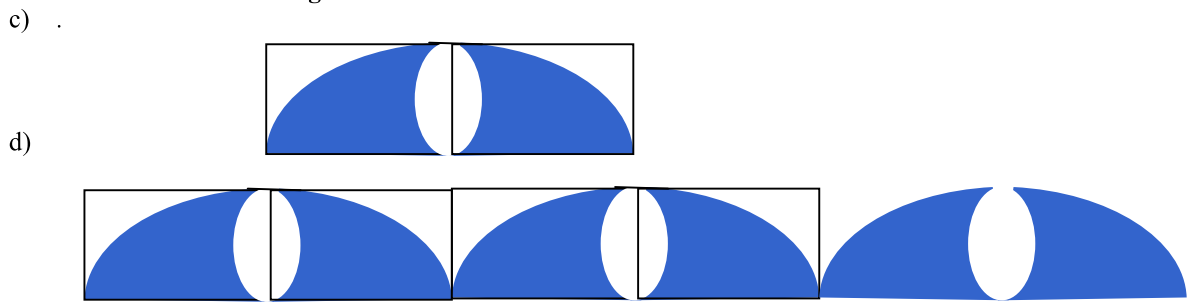




- translació que hem aplicat és la de vector \vec{b}
- f) La franja té una amplitud igual a $2a$

Exercici 10

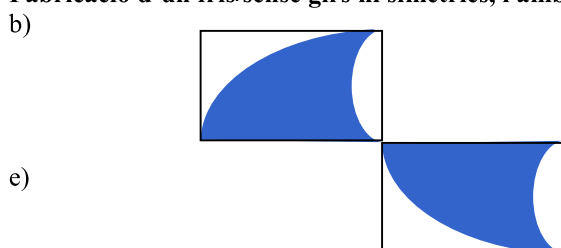
Fabricació d'un fris sense girs i només amb simetries verticals.

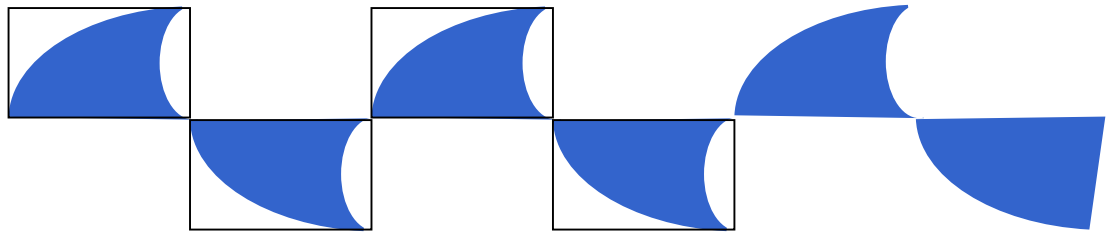


- e) La translació que hem aplicat és la de vector $2\vec{b}$
- f) La franja té una amplitud igual a a

Exercici 11

Fabricació d'un fris sense girs ni simetries, i amb una simetria amb lliscament.

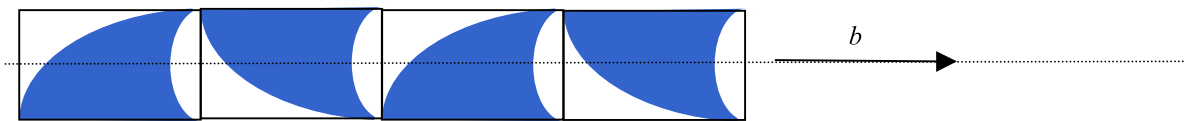




e) La translació que hem aplicat és la de vector $2\vec{b}$

d) La franja té una amplitud igual a $2a$

Nota: L'eix de la simetria amb lliscament pot ser qualsevol recta paral·lela a la recta que conté a b . Per exemple si prenem la recta paral·lela a b que parteix per la meitat al rectangle inicial obtenim:



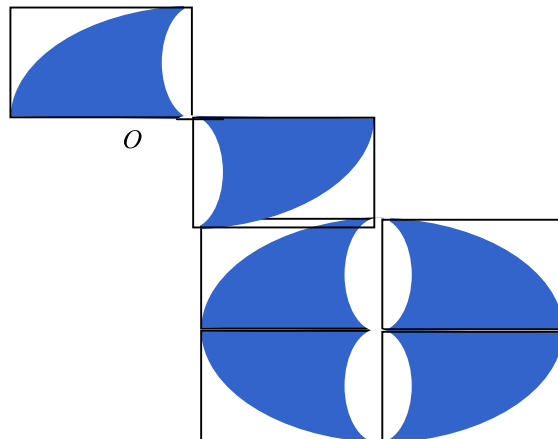
Aleshores l'amplitud és igual a a .

En general l'amplada de la sanefa varia entre a i $2a$.

Exercici 12

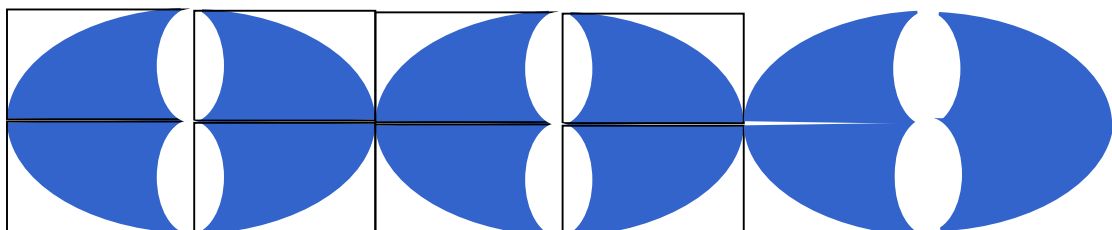
Fabricació d'un fris amb gir, simetria horitzontal i simetria vertical.

f)



g)

h)

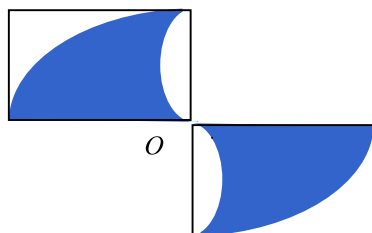


- i) La translació que hem aplicat és la de vector $2\vec{b}$
- j) Els eixos de simetria vertical estan marcats en el dibuix i es troben a una distància igual a b , que és la meitat de la longitud del vector de translació.

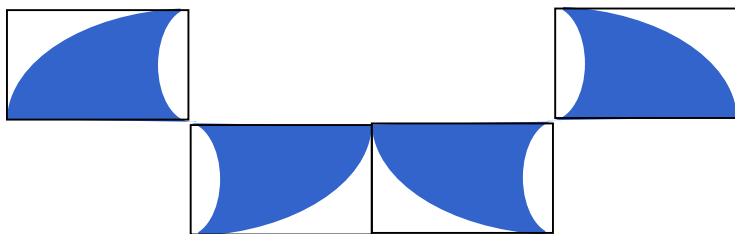
Exercici 13

Fabricació d'un fris amb girs, simetria vertical i sense simetria horitzontal.

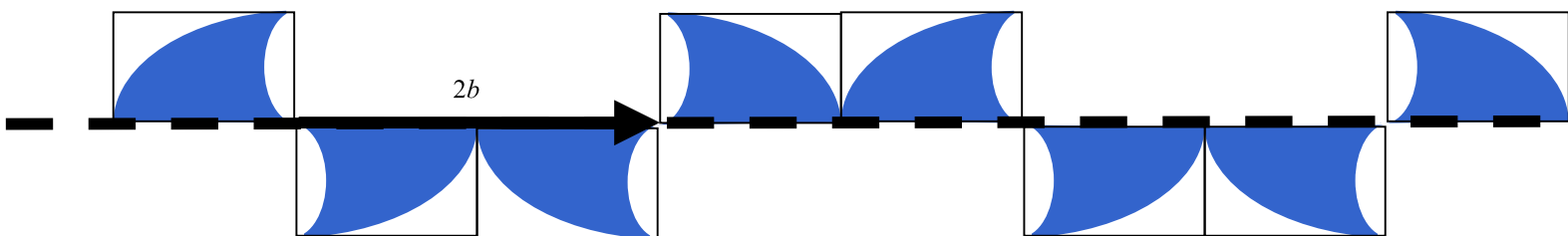
b)



c)



f)



d) La translació que hem aplicat és la de vector $4\vec{b}$

e) La simetria amb lliscament està marcada en el dibuix el vector és $2\vec{b}$, la meitat del vector de translació.

Exercici 14

Classificació de frisos:

| Fris | Isometries | Tipus |
|--------------|---|--------------|
| 1a | Translacions | F_1 |
| 1b | Translacions i simetria horitzontal | F_1^1 |
| 1c | Translacions i simetria vertical | F_1^2 |
| 1d | Translacions i simetria amb lliscaent | F_1^3 |
| 1e | Translacions i girs | F_2 |
| 1f | Translacions, girs, simetria vertical i simetria horitzontal | F_2^1 |
| 1g | Translacions, girs, simetria vertical i simetria amb lliscament | F_2^2 |
| Pis 1 | Translacions, girs, simetria vertical i simetria horitzontal | F_2^1 |
| Pis 2 | Translacions i simetria vertical | F_1^2 |
| Pis 3 | Translacions i simetria vertical | F_1^2 |
| Pis 6 | Translacions i girs | F_2 |
| Pis 7 | Translacions | F_1 |
| Pis 8 | Translacions i simetria vertical | F_1^2 |
| Pis 10 | Translacions, girs, simetria vertical i simetria horitzontal | F_2^1 |
| Pis 12 | Translacions | F_1 |
| Pis 13 | Translacions | F_1 |
| Pis 14 | Translacions i simetria vertical | F_1^2 |
| Palmetes | Translacions i simetria horitzontal | F_1^1 |
| Ziga-zaga | Translacions i simetria vertical | F_1^2 |
| Tors anellat | Translacions, girs, simetria horitzontal i simetria vertical | F_2^1 |
| Diamants | Translacions, girs, simetria horitzontal i simetria vertical | F_2^1 |
| Arquets | Translacions i simetria vertical | F_1^2 |

| | | |
|-----------------|----------------------------------|---------|
| Doble ziga-zaga | Translacions i simetria vertical | F_1^2 |
| Tiges perlades | Translacions | F_1 |

Els set primers frisos corresponen als dibuixats a la làmina 1.

Els frisos que indiquem com a Pis corresponen a l'edifici de Girona.

Els set frisos últims són els de les arquivoltes que decoren la porta dels Fillols de la Seu Vella de Lleida

Exercici 15

En el Museu de la Ceràmica de Barcelona i en el Museu d'Art de Girona es poden trobar en les decoracions de les peces de ceràmica exemplificacions de frisos amb diferents grups d'isometries.

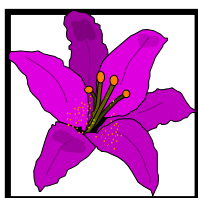
En el Museu Arqueològic de Tarragona s'hi troben diferents models de frisos decorant elements arquitectònics, ceràmiques i paviments romans.

També en el Museu Nacional d'Art de Catalunya (Barcelona) trobem en els retaules romànics diferents tipus de sanefes decoratives.

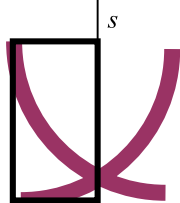
Exercici 16

Els motius mínims dels frisos de la làmina 1 són els requadrats, a partir d'aquest motius aplicant les corresponents isometries es genera el fris

a)



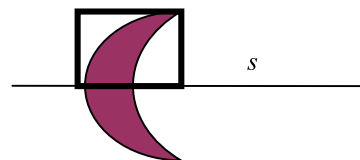
Aplicant translació de vector v



c)

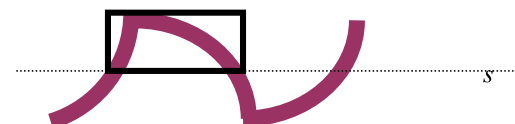
Aplicant simetria respecte a s i translació de vector v

b)



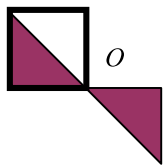
Aplicant simetria respecte a s i translació de vector v

d)



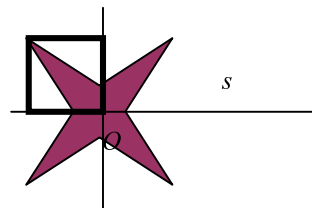
Aplicant simetria amb lliscament respecte a s i de vector $v/2$ i translació de vector v

e)



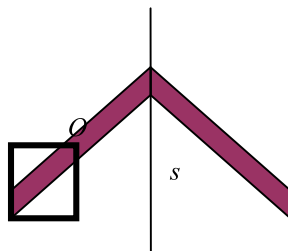
Aplicant gir de 180° i centre O i translació de vector v

f)



Aplicant gir de 180° i centre O , simetria d'eix s i translació de vector v

g)



Aplicant gir de 180° i centre O , simetria d'eix s i translació de vector v