1. Si **X** és una variable aleatoria contínua amb distribució **N(5,2)**, calculeu:

a) $P(|X| \le 2)$

b) $P(-2{,}7 \le X \le 4)$

c) $P(|X-6| \ge 1)$

Sol.: a) 0,0666 ; b) 0,3084 ; c) 0,6587

Solució

En primer lloc, recordeu que, en ser X del tipus N(5,2), la variable $Z = \dfrac{X-5}{2}$ serà del tipus N(0,1). Utilitzarem, doncs, en tot moment la igualtat $X = 2Z + 5$, on la Z serà la normal estàndar (o normal reduïda).

a) $p(|X| \le 2) = p(-2 \le X \le 2) = p(X \le 2) - p(X \le -2) = \boxed{A} - \boxed{B}$

$$\boxed{A} = p(X \le 2) = p(2Z+5 \le 2) = p(Z \le -1'5) = 1 - p(Z \le 1'5) = 1 - 0'9332 = 0'0668$$
$$\boxed{B} = p(X \le -2) = p(2Z+5 \le -2) = p(Z \le -3'5) = 1 - p(Z \le 3'5) = 1 - 0'9998 = 0'0002$$

$$\boxed{A} - \boxed{B} = 0'0668 - 0'0002 = 0'0666$$

b) $p(-2'7 \le X \le 4) = p(X \le 4) - p(X \le -2'7) = \boxed{A} - \boxed{B}$

$$\boxed{A} = p(X \le 4) = p(2Z+5 \le 4) = p(Z \le -0'5) = 1 - p(Z \le 0'5) = 1 - 0'6915 = 0'3085$$
$$\boxed{B} = p(X \le -2'7) = p(2Z+5 \le -2'7) = p(Z \le -3'85) = 1 - p(Z \le 3'85) = 1 - 0'9999 = 0'00001$$
$$\boxed{A} - \boxed{B} = 0'3085 - 0'00001 = 0'3084$$

c)

$$\begin{aligned} p(|X-6| \ge 1) &= p(X-6 \ge 1 \;\; o \;\; X-6 \le -1) = p(X-6 \ge 1) + p(X-6 \le -1) = \\ &= p(X \ge 7) + p(X \le 5) = p(2Z+5 \ge 7) + p(2Z+5 \le 5) = p(Z \ge 1) + p(Z \le 0) = \\ &= 1 - p(Z \le 1) + 0'5000 = 1 - 0'8413 + 0'5000 = 0'6587 \end{aligned}$$

2. Determineu la probabilitat que una variable aleatòria **X**, amb distribució $\mathbf{N(3,\sigma)}$ prengui valors compresos entre $\mathbf{3 - 0{,}5\sigma}$ i $\mathbf{3 + 1{,}5\sigma}$.

Sol.: 0,6247

Solució

Fent, com en el cas anterior, el canvi $X = s\,Z + 3$, obtenim

$$p(3 - 0'5s \le X \le 3 + 1'5s) = p(3 - 0'5s \le s\,Z + 3 \le 3 + 1'5s) \underset{\uparrow \text{ Restem 3}}{=} p(-0'5s \le s\,Z \le 1'5s) \underset{\uparrow \text{ Dividim per } s}{=} p(-0'5 \le Z \le 1'5) =$$

$$= p(Z \le 1'5) - p(Z \le -0'5) = 0'9332 - (1 - p(Z \le 0'5)) = 0'9332 - (1 - 0'6915) = 0'9332 - 0'3085 = 0'6247$$

3. La durada d'un determinat tipus de bombetes, expresada en hores, segueix una distribució **N(750, 175)**. Quin percentatge de bombetes dura entre 400 i 575 hores? En un lot de 1000 bombetes d'aquest tipus, quantes duraran menys de 330 hores?

Sol: 13,59%; 8

Solució

Si anomenem X a la variable aleatòria de l'enunciat, procedint com en els casos anteriors, tindrem $X = 175Z + 750$. Aleshores,

$$p(400 \le X \le 575) = p(400 \le 175Z + 750 \le 575) = p(-350 \le 175Z \le -175) = p(-\tfrac{350}{175} \le Z \le -\tfrac{175}{175}) =$$
$$= p(-2 \le Z \le -1) = p(Z \le -1) - p(Z \le -2) = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0'1359 \equiv 13'59\%$$

Per a la segona part, hem de calcular primer la probabilitat de durar menys de 330 hores:

$$p(X \le 330) = p(175Z + 750 \le 330) = p(Z \le -\tfrac{420}{175}) = 1 - p(Z \le \tfrac{420}{175}) = 1 - p(Z \le 2'4) = 1 - 0'9918$$
$$= 0'0082 \equiv 0'82\%$$

Com que el 0'82% de 1000 és 8'2, i s'ha de tractar d'un nombre enter de bombetes, és d'esperar que 8 bombetes durin menys de 330 hores.

4. Els errors aleatoris de les pesades d'una balança segueixen una distribució normal de desviació típica 16 g. Trobeu la probabilitat de que pesi amb un error menor que 12 g en més o en menys (Suposeu que la mitjana és zero).

Sol.: 0,5468

Solució

Si anomenem X a la variable aleatòria de l'enunciat, X serà una normal del tipus $N(0,16)$. Per tant, farem $16Z = X$. Aleshores,

$$p(-12 \le X \le 12) = p(-12 \le 16Z \le 12) = p(-0'75 \le Z \le 0'75) = p(Z \le 0'75) - p(Z \le -0'75) =$$
$$= p(Z \le 0'75) - (1 - p(Z \le 0'75)) = 2p(Z \le 0'75) - 1 = 2 \cdot 0'7734 - 1 = 0'5468$$