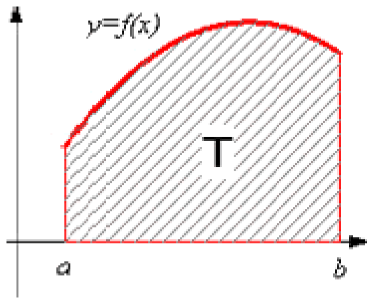
INTRODUCCIÓ: OBJECTIUS

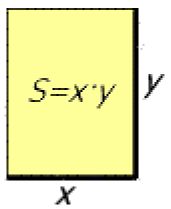


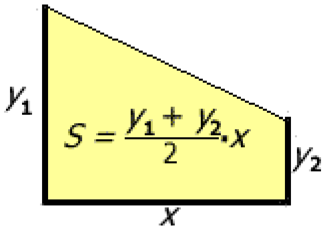
L'objectiu d'aquest capítol és que arribeu a entendre el concepte d'*integral definida d'una funció* i a calcular integrals de forma aproximada, per a la qual cosa us mostrarem primer com calcular, **de manera aproximada**, l'àrea de figures limitades per

- la gràfica d'una funció *y = f(x)*,
- dues rectes verticals, *x=a* i *x=b,*
- □ i l'eix *OX.*

Les regions planes d'aquest tipus s'anomenen *trapezis mixtilínis* (regió **T** de la figura).

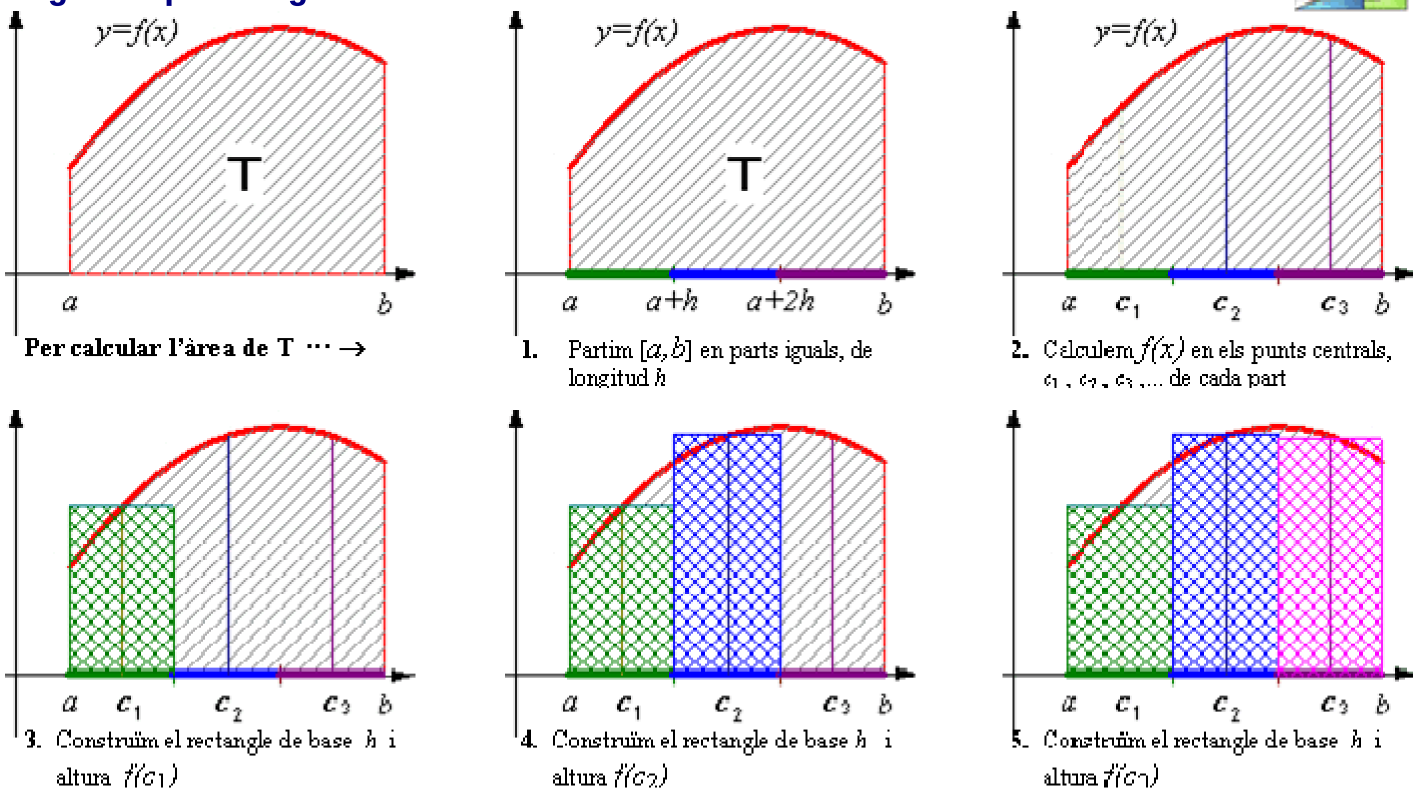
En principi, n'hi ha prou que sàpigueu que "l'àrea d'una regió és el nombre de *quadrats unitaris* que hi caben en ella, i si la regió es 'divideix en trossos', l'àrea és la suma de les àrees de tales trossos". Has de saber també que en els casos d'un ***rectangle*** i d'un ***trapezi*** *de costats rectes,* la superfície es calcula amb les fórmules següents (la 2a es pot deduir de la 1a; per comprovar-ho, clica en l'escena):

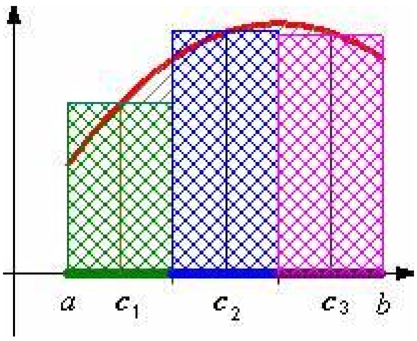




FORMES D'APROXIMAR L'ÀREA DE TRAPEZIS MIXTILINIS

1. Regla del punt mig





$S_{aprox} = h \cdot (f(c_1) + f(c_2) + f(c_3))$

essent $h = \frac{b-a}{3}$

Els rectangles de l'última figura de la sèrie anterior, que reproduïm aquí, a l'esquerra, ens donen un valor aproximat de la superfície del trapezi mixtilini que volíem obtenir.

Com tots aquests rectangles (3 en aquest cas) tenen base igual a *h,* la suma de les seves àrees ens dóna:

$$\mathbf{h \cdot f(c_1) + h \cdot f(c_2) + h \cdot f(c_3) = h \cdot (f(c_1) + f(c_2) + f(c_3))}$$

En general, si dividim l'interval [a,b] en N parts iguals, obtindrem la següent fórmula d'aproximació a l'àrea del trapezi mixtilini, coneguda com a **regla del punt mig**.

$$\boxed{S_{aprox} = h \cdot (f(c_1) + f(c_2) + \ldots + f(c_N))}, \quad \text{essent} \quad h = \frac{b-a}{N}$$

Quin error màxim ens podria donar la regla del punt mig?

Si f(x) és l'expressió d'una paràbola, $f(x) = Ax^2+Bx+C$, es pot demostrar que l'error absolut que ens donarà la regla del punt mig mai no superarà el valor $\frac{(b-a)^3}{12N^2} \cdot |A|$, o sigui, es compleix la fórmula següent:

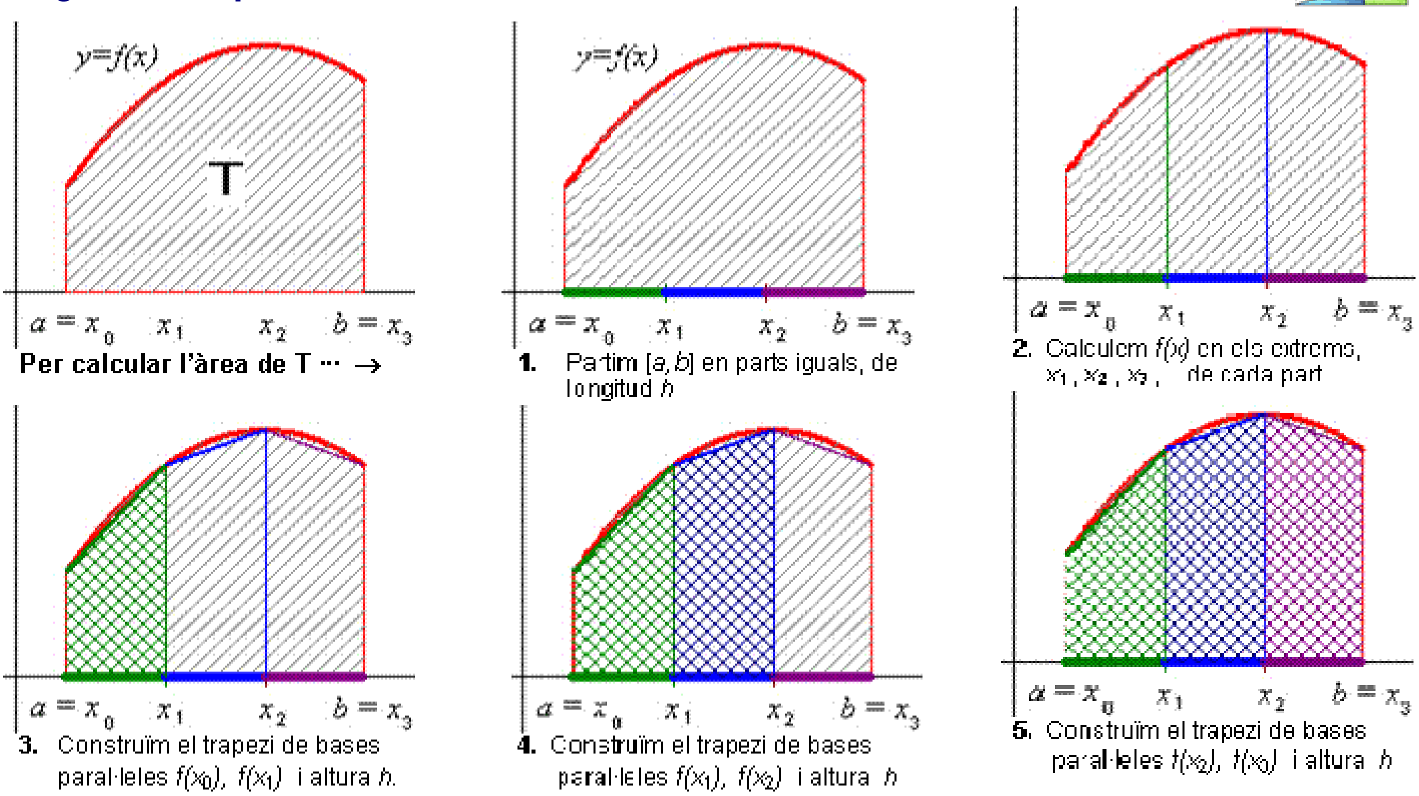
$$\boxed{|E_{regla\ p.m.}| \le \frac{(b-a)^3 \cdot |\mathbf{A}|}{12 \cdot N^2}}, \quad \text{si} \quad f(x) = \mathbf{A}x^2 + Bx + C$$

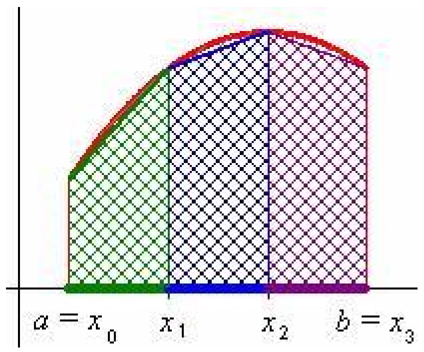
D'aquesta fórmula es dedueix en quants intervals heu de dividir l'interval [a,b] per estar segurs que l'error obtingut no superarà un valor màxim tolerable $\boldsymbol{E}_{\textbf{tolerat}}$:

Serà suficient obligar a què es compleixi $\frac{(b-a)^3}{12 \cdot N^2} \cdot |A| \le \boldsymbol{E}_{tolerat}$, de la qual resulta

$$\boldsymbol{N} \ge \sqrt{\frac{(b-a)^3 \cdot |A|}{12 \cdot \boldsymbol{E}_{tolerat}}}, \text{ per estar segurs que l'error no supera } \boldsymbol{E}_{tolerat}$$

2. Regla dels trapezis





$S_{apr} = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + f(x_3)\right)$

essent $h = \frac{b-a}{3}$

Els trapezis de l'última figura de la sèrie anterior, que reproduïm aquí, a l'esquerra, ens donen tots plegats un valor aproximat de la superfície del trapezi mixtilini que volíem obtenir.

Com tots aquests trapezis (3 en aquest cas) tenen *altura* igual a *h* (recordeu que l'altura d'un trapezi és la distància entre els seus costats paral·lels), la suma de les seves àrees ens dóna la següent aproximació de l'àrea:

$$\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\cdot h + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\cdot h + \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}\cdot h$$

En general, si dividim l'interval [a,b] en N parts iguals, obtindrem la següent fórmula d'aproximació a l'àrea del trapezi mixtilini, coneguda com a **regla dels trapezis**:

$$\boxed{S_{apr} = \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)\right)} \quad \text{on } h = \frac{b-a}{n}$$

Quin error màxim ens podria donar la regla dels trapezis?

Si f(x) és l'expressió d'una paràbola, $f(x) = Ax^2+Bx+C$, es pot demostrar que l'error absolut que ens donarà la regla del punt mig mai no superarà el valor $\frac{(b-a)^3}{6\cdot N^2}\cdot|A|$, o sigui, es compleix la fórmula següent:

$$\boxed{|E_{regla\ trap}| \le \frac{(b-a)^3\cdot|\mathbf{A}|}{6\cdot N^2}}, \quad \text{si} \quad f(x) = \mathbf{A}x^2 + Bx + C$$

D'aquesta fórmula es dedueix en quants intervals heu de dividir l'interval [a,b] per estar segurs que l'error obtingut no superarà un valor màxim tolerable: $\boldsymbol{E}_{\textbf{tolerat}}$:

Serà suficient obligar a què es compleixi $\frac{(b-a)^3}{6\cdot N^2}\cdot|A| \le \mathbf{E}_{tolerat}$, de la qual resulta:

$N \geq \sqrt{\dfrac{(b-a)^3 \cdot |A|}{6 \cdot E_{tolerat}}}$, per estar segurs que l'error no supera $E_{tolerat}$

RESUMS

Regla del punt mig

- Si *f* és una funció contínua i positiva a l'interval [*a*,*b*], una aproximació de l'àrea del seu trapezi mixtilini és:

$$S_{apr} = \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} f(c_i)$$

essent c_1, c_2,..., c_N els punts centrals dels N intervals que resulten en dividir [*a*,*b*] en N parts iguals.

- Si $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, l'error que ens pot produir la fórmula anterior compleix:

$$|Error| \leq \frac{(b-a)^3}{12 \cdot N^2} \cdot |A|$$

$$Si\ N \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 \cdot |A|}{12 \cdot E_{tolerat}}}\text{, l'error no supera } E_{tolerat}$$

Regla dels trapezis

- Si *f* és una funció contínua i positiva a l'interval [*a*,*b*], una aproximació de l'àrea del seu trapezi mixtilini és:

$$S_{apr} = \frac{b-a}{2N}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + y_N)$$

essent $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, ... , $y_n=f(x_N)$, i on x_0, x_1, ..., x_N són els punts de divisió de [*a*,*b*] en N parts iguals.

- Si $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, l'error que ens pot produir la fórmula anterior compleix:

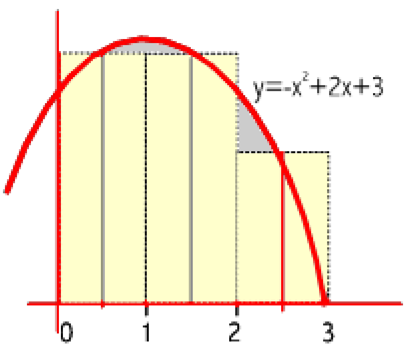
$$|Error| \leq \frac{(b-a)^3}{6 \cdot N^2} \cdot |A|$$

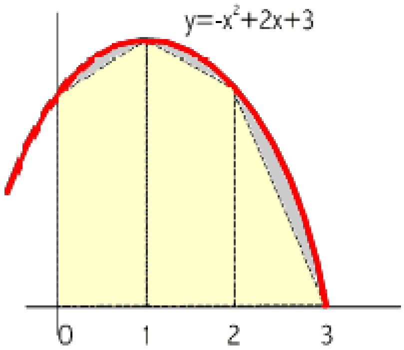
$$Si\ N \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 \cdot |A|}{6 \cdot E_{tolerat}}}\text{, l'error no supera } E_{tolerat}$$

EXERCICIS RESOLTS

1 Considera l'àrea sota la paràbola d'equació $y = -x^2 + 2x + 3$ al llarg de l'interval [0,3]. Dividint aques interval en 3 parts iguals, calcula una aproximació de l'àrea mitjançant la regla del punt mig, i altra mitjançant la regla dels trapezis.
En els dos casos, dibuixa l'àrea que serveix d'aproximació i indica l'error màxim comès.

Resposta





En els dos casos, ordenarem els càlculs en forma de taula.

En el 1r cas, observa que els punts centrals dels intervals són 1/2, 3/2 i 5/2.

Càlculs per regla del punt mig · **Càlculs per regla dels trapezis**

x_i	c_i	$y(c_i)$
0		
	1/2	3'75
1		
	3/2	3'75
2		
	5/2	1'75
3		
	Suma:	9'25;

$$S_{apr} = h\cdot(y_1+y_2+y_3) = 9'25$$

$$n=3;\quad h=\frac{3-0}{n}=\frac{3}{3}=1$$

x_i	y_i	k	ky_i
0	3	1	3
1	4	2	8
2	3	2	6
3	0	1	0
		Suma:	17
		n=3	h=1

$$S_{apr} = (y_0+2y_1+2y_2+y_3)\cdot\frac{h}{2}$$

$$= 17\cdot\frac{1}{2} = 8'5$$

Per esbrinar el màxim error que podríem tenir en cada cas, apliquem la fórmula de l'error corresponent:

$$y=-x^2+2x+3 \Rightarrow A=-1 \Rightarrow |A|=1$$

Cota d'error en regla del punt mig

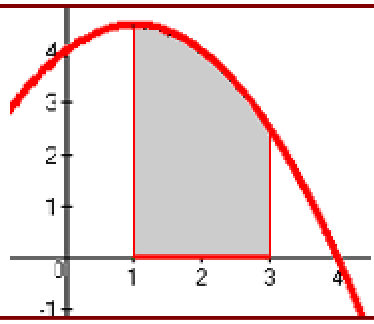
$$E_{regla\ pm} \le \frac{(3-0)^3}{12n^2}\cdot 1 = \frac{27}{12\cdot 9} = 0'25$$

Cota d'error en regla dels trapezis

$$E_{regla\ trap} \le \frac{(3-0)^3}{6n^2}\cdot 1 = \frac{27}{6\cdot 9} = 0'5$$

2 Raona que la funció $y=-0'5x^2+x+4$ és positiva en l'interval [1,3].

En quantes parts, com a mínim, hauríem de dividir l'interval [1,3] perquè, aplicant la *regla del punt mig* amb aquesta funció, tinguéssim la seguretat d'obtenir l'àrea del trapezi corresponent amb error menor que tres centèsimes? Després d'esbrinar-ho, calcula aproximadament tal àrea utilitzant el nombre de parts calculat.



Resposta

Les solucions de $-0'5x^2+x+4=0$ són –2 i 4. Per tant, com amb qualsevol paràbola, entre elles té sign constant; també el tindrà, doncs, entre 1 i 3. El signe serà, per exemple, el de *y(0)*, el qual és evidentment positi (*y(0)=4*)

Pel que fa al nombre mínim de parts que necessitem per assegurar un error màxim tolerable de 0,03, poden aplicar directament la fórmula

$$N \ge \sqrt{\frac{(b-a)^3\cdot|A|}{12\cdot F_{tolerat}}} = \sqrt{\frac{(3-1)^3\cdot|-0,5|}{12\cdot 0,03}} = \sqrt{\frac{8\cdot 0,5}{0,36}} = 3,33$$

Per tant, hauríem de dividir en un mínim de 4 parts iguals l'interval [1,3] per estar segurs que obtindrem un aproximació amb error no superior a 3 centèssimes.

Càlcul de la aproximació

x_i	c_i	$y(c_i)$		
1				
	1'25	4,46875		
1+0'5				
	1'75	4,21875		
1+1				
	2'25	3,71875		
2+0'5				
	2'75	2,96875		
3				
	Suma:	15'375	$n=4$	$h = (3-1)/4 = 1/2$

$$S_{apr} = h \cdot (\ y(c_1) - y(c_2) + y(c_3) + y(c_4)) = \frac{1}{2} \cdot 15'375 = 7'6875$$

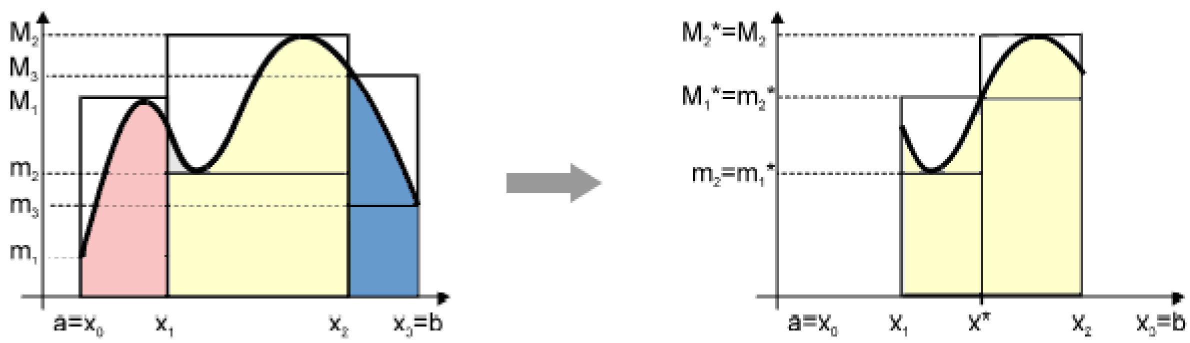
DEFINICIÓ GENERAL D'ÀREA D'UN TRAPEZI MIXTILINI

Pretenem ara definir l'àrea d'un *trapezi mixtilini* definit per la gràfica d'una funció acotada[(*)] i positiva, *f*, en un interval [*a*,*b*]. (*Acotada* significa que els seus valors, *f(x),* no poden ultrapassar una certa constant)

Per fer-ho, dividim l'interval [*a*,*b*] en *n* subintervals (de longituds iguals o no). Siguin aquests intervals els següents:

$[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, ……., $[x_{n-1},x_n]$, on suposem $x_0=a$, $x_n=b$

Si ara aixequem en els extrems de cada interval les ordenades fins a la corba, haurem dividit el *trapezi mixtilini* en "faixes" de amplituds (veure fig. 1):



$S_3=M_1\cdot(x_1-x_0)+ M_2\cdot(x_2-x_1)+ M_3\cdot(x_3-x_2)$

$s_3=m_1\cdot(x_1-x_0)+ m_2\cdot(x_2-x_1)+ m_3\cdot(x_3-x_2)$

L'àrea del trapeci està entre s_3 i S_3.

En dividir en parts algun dels intervals, la suma de rectangles superiors disminueix, i la dels rectangles inferiors augmenta:

$M_1^*\cdot(x^*-x_1)+M_2^*\cdot(x_2-x^*) < M_2\cdot(x_2-x_1)$

$m_1^*\cdot(x^*-x_1)+m_2^*\cdot(x_2-x^*) > m_2\cdot(x_2-x_1)$

Mireu la figura 1 i les "faixes" que hem format. Si fem les horitzontals pels punts d'altures "màxima" i "mínima" de la corba en cada "faixa", haurem format una sèrie de rectangles superiors i altra sèrie de rectangles inferiors. L'àrea de cada "faixa" quedarà compresa entre la dels seus *rectangles superior i inferior*, és a dir,

$$m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \le \textbf{Àrea de la faixa} \le M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Llavors, si indiquem amb $\mathbf{S_n}$ la suma dels rectangles l'ordenada dels quals és màxima

$$S_n = M_1 \cdot (x_1 - x_0) + M_2 \cdot (x_2 - x_1) + ... + M_n \cdot (x_n - x_{n-1})$$

i indiquem amb $\mathbf{s_n}$ la suma dels rectangles l'ordenada dels quals és mínima

$$s_n = m_1 \cdot (x_1 - x_0) + m_2 \cdot (x_2 - x_1) + ... + m_n \cdot (x_n - x_{n-1})$$

resulta evident que el que intuïtivament entenem per *àrea del trapezi mixtilini* quedarà entre les sumes $\mathbf{S_n}$ i $\mathbf{s_n}$, és a dir,

$$s_n \le (\text{Àrea } T.M.) \le S_n \qquad \textbf{(1)}$$

A més, si s'augmentéssim el nombre d'intervals dividint en parts els que n'hi ha, en cada una de les noves faixe disminuiria l'ordenada màxima M_i (o quedaria igual) i augmentaria l'ordenada mínima m_i (o quedaria igual). Per tant disminuiria la suma dels rectangles d'altura màxima i augmentaria la dels d'altura mínima. Podem comprovar l'afirmació anterior en la figura 2, on hem separat la faixa de l'interval $[x_1,x_2]$, i hem partit aquest en 2 parts mitjançant un punt intermig x^*. Es veu que $M_1^* < M_2$ i $M_2^* = M_2$ i, per tant,

$$M_1^*\cdot(x^*-x_1) + M_2^*\cdot(x_2-x^*) < M_2\cdot(x^*-x_1) + M_2\cdot(x_2-x^*) = M_2\cdot(x_2-x_1)$$

és a dir, *la suma dels 2 rectangles superiors obtinguts en partir l'interval $[x_1,x_2]$ és menor que el rectangle superior definit per l'únic interval* $[x_1,x_2]$. Anàlogament, podeu veure que la suma dels rectangles inferiors obtinguts partint l'interval $[x_1,x_2]$ serà més gran que el rectangle inferior corresponent l'únic interval $[x_1,x_2]$.

Tot això ens fa pensar que *"si s'augmentés indefinidament el nombre de faixes de forma que les seves amplades tendissin a 0, llavors probablement les sumes* S_n *i* s_n *tendirien a un mateix valor* S*".* Doncs, bé, quan això succeeix(*) es diu que el trapezi mixtilini corresponent té àrea definida, i que el valor de la seva àrea és S.
Així doncs,

$$\boxed{\text{Àrea T.M.} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n} \qquad \textbf{(2)}$$

on se suposa que les sumes S_n i s_n es formen de manera que les longituds dels intervals que fan de base tendeixen a 0.

De fet, si forméssim S_n i s_n agafant qualsevol successió de sumes, S_n , però prement com a altures les ordenades en punts intermitjos qualssevol, c_n , tindríem

$$m_n \le f(c_n) \le M_n \quad \text{i, per tant,} \quad S_n \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\ (x_i - x_{i-1}) \le s_n$$

Així doncs, també **es pot definir l'àrea d'un trapezi mixtilini mitjançant l'única fórmula següent**:

$$\boxed{\text{Àrea del T.M.} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ x_i - x_{i-1}\to 0 \\ c_i \text{ en } [x_{i-1},x_i]}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot(x_i - x_{i-1})} \qquad \textbf{(3)}$$

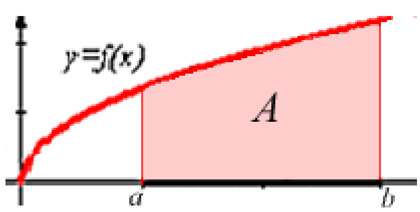
DEFINICIÓ D'INTEGRAL D'UNA FUNCIÓ EN UN INTERVAL TANCAT [*a*,*b*]

El símbol $\int_a^b f$ es llegeix integral definida de la funció ***f*** entre ***a*** i ***b***, i es defineix mitjançant el límit (3) de l'apartat anterior (per a funcions acotades). Més exactament: si el límit (3) dóna sempre el mateix valor, independentment de la forma de dividir l'interval $[a,b]$ en parts, les longituds dels quals tendeixin a 0, i independentment també dels punts intermitjos c_i , llavors "es diu que la funció f és **integrable** en l'interval $[a,b]$, i que el límit (3) és la seva integral".

La veritat és que el concepte d'integral definida està completament associat al càlcul d'àrees. Així es posa de manifest en les següent figures i en l'escena del final.

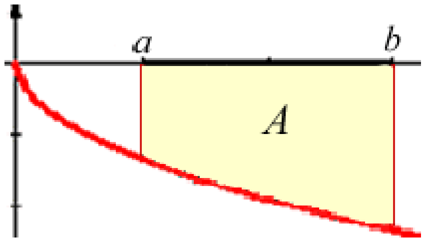
1. Si f és una funció positiva en $[a,b]$, llavors $\int_a^b f$ coincideix amb l'àrea del seu trapezi mixtilini.

$$\boxed{\int_a^b f = A}$$



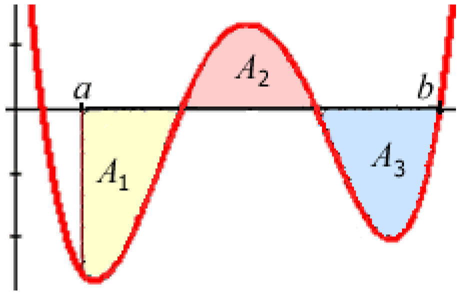
2. Si f és una funció negativa en $[a,b]$, llavors $\int_a^b f$ és negatiu, pero el seu valor absolut coincideix amb l'àrea del seu trapezi mixtilini.

$$\boxed{\int_a^b f = -A}$$



3. Si *f* prem valors positius i negatius en [*a*,*b*], llavors $\int_a^b f$ és una *suma algebraica* d'àrees (*suma* en què porten signe positiu les àrees que estan per sobre de l'eix X, i signe negatiu les àrees que estan per sota)

$$\boxed{\int_a^b f = -A_1 + A_2 - A_3}$$



CÀLCUL APROXIMAT D'INTEGRALS DEFINIDES

Per calcular una integral de forma aproximada, es poden aplicar els mateixos mètodes explicats per al càlcu d'àrees en els primers apartats: La *regla del punt mig* i la *regla dels trapezis.* Tanmateix, valen les mateixe fórmules d'error que es van exposar.

Concretament,

1. Regla del punt mig

$$\boxed{\int_a^b f \approx h\cdot\left(f(c_1)+f(c_2)+\ldots+f(c_N)\right)}, \quad \text{essent} \quad h=\frac{b-a}{N}$$

$$\boxed{|E_{regla\ p.m.}| \leq \frac{(b-a)^3\cdot \boldsymbol{M}}{24\cdot N^2}}$$

- M és una cota de la derivada segona de la funció |***f*** | en l'interval [a,b].
- Si ***f*** és una funció parabòlica, ***f*** (x) = Ax^2+Bx+C, aleshores M=2·|A|

2. Regla dels trapezis

$$\boxed{\int_a^b f \approx \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{N-1})+f(x_N)\right)} \quad \text{on} \quad h=\frac{b-a}{n}$$

$$\boxed{|E_{regla\ trap.}| \leq \frac{(b-a)^3\cdot \boldsymbol{M}}{12\cdot N^2}}$$

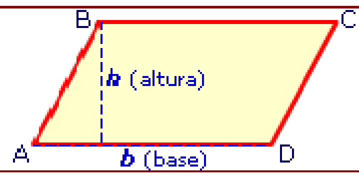
- M és una cota de la derivada segona de la funció |***f*** | en l'interval [a,b].
- Si ***f*** és una funció parabòlica, ***f*** (x) = Ax^2+Bx+C, aleshores M=2·|A|

EXERCICIS PROPOSATS

1 Raoneu que l'àrea d'un paral·lelogram és igual al producte de la *base* per l'*altura*, és a dir,

$$\textbf{Àrea} = \boldsymbol{b\cdot h}$$

Indicació.



2 Dividint l'interval [0,2] en 3 parts iguals i aplicant després la fórmula de la *regla dels trapezis*, calculeu un valor aproximat de l'àrea del quadrant d'el·lipse representat en la figura. Només necessiteu saber que La funció que delimita la corba és

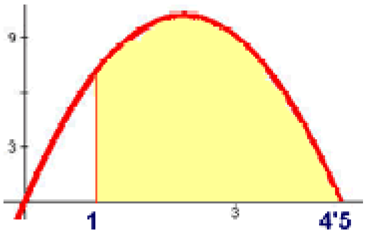
$$f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$$

3 Dividint l'interval [0,2] en 5 parts iguals i aplicant després la fórmula de la *regla del punt mig*, calculeu un valor aproximat de l'àrea del quadrant d'el·lipse representat en la figura de l'exercici anterior

4 Considereu l'àrea del recinte indicat en la figura adjunta, el costat corb de la qual correspon a la gràfica de la funció següent:

$$f(x) = -2x^2 + 9x$$

Esbrineu en quantes parts s'hauria de dividir l'interval [1, 4'5] per tenir la seguretat que en aplicar la *regla del punt mig* ens sortiria l'àrea amb error menor que 5 centèssimes. Després, feu la taula de càlculs corresponent per tal d'obtenir el valor aproximat de l'àrea.



(*) Malgrat que totes les presentacions gràfiques les farem amb funcions contínues, les definicions valdrán igualment per a funcions acotades no contínues,

(*) Es pot demostrar que el valor límit, *S,* no depèn de la forma en què es divideixin els intervals, i es pot demostrar també que això ocurrirà així amb qualsevol funció contínua, f.