SOBRE INEQUACIONS (Quinzena 6)

1. Inequacions amb dues incògnites

- **Se suprimeixen**; així doncs, no entraran inequacions de dues incògnites en els exàmens.

2. Inequacions, i sistemes d'inequacions, amb una incògnita

2.1 De primer grau

- **No oblideu que es resolen fent transformacions com si fossin equacions**; per exemple, els termes que estan en un membre "*sumant*" passen a l'altre membre "*restant*", i als que estan "*restant*", passen "*sumant*", conservant-se sempre el signe de la desigualtat. Així,

  de $-2x-10<x+5$ es dedueix primer $-2x<x+5+10$ i després, $-3x<15$

  (noteu que en tot moment hem conservat el signe <)

  A l'hora de canviar de membre els termes que estan "multiplicant" o "dividint", s'ha d'anar amb cuidado perquè el símbol de la desigualtat pot canviar al signe contrari.

  Quan s'ha de canviar i quan s'ha de mantenir?

  Si el terme que volen canviar està multiplicant i és positiu, passarà a l'altre membre dividint i no haurem de canviar el símbol de la desigualtat. Així,

  de $5x<-20$ es dedueix $x<-20/5$, o sigui, $x<-4$

  i, com es veu, no ha canviat el signe < perquè el terme que s'ha canviat de membre (el 5) és positiu.

  Si el terme que volen canviar està multiplicant i és negatiu, passarà a l'altre membre dividint i haurem de canviar el símbol de la desigualtat (el símbol < passarà a ser >, etc.). Així,

  de $-3x<18$ es dedueix $x>18/(-3)$, o sigui, $x>-6$

  i, com es veu, hem canviat el signe < pel signe > perquè el terme que s'ha canviat de membre (el -3) estava multiplicant i és negatiu.

2.2 De segon grau

Una inequació de segon grau es pot resoldre per diferents mètodes. **Us aconsello el següent**.

2.2.1 En primer lloc, reduïu-la a un d'aquests tipus (segons el símbol de desigualtat que tingui)

$$ax^2+bx+c<0\,,\qquad ax^2+bx+c\le 0\,,\qquad ax^2+bx+c>0\,,\qquad ax^2+bx+c\ge 0$$

Per fer això, heu de transposar termes, treure'n denominadors, etc, com si es tractés d'una equació, però no oblideu que quan es multiplica (o es divideix) tot per un negatiu, aleshores s'ha de canviar el símbol de desigualtat pel seu símbol contrari corresponent. Per exemple,

de $\dfrac{x^2}{-3}+5x-4<6x+5$, resulta primer (traient el denominador –3) $x^2-15x+12>-18x-15$

i després, passant els termes del segon membre al primer membre (els dos passen sumant, ja que estan restant) ens quedaria

$$x^2-15x+18x+12+15>0\,,\ \text{és a dir,}\ x^2+3x+27>0$$

- **A partir d'aquí**, imaginarem que ens ha quedat una inequació com aquesta: $\boxed{ax^2+bx+c<0}$

2.2.2 En segon lloc, resoleu l'equació $\boxed{ax^2+bx+c=0}$. Hi haurà les tres possibilitats següents:

2.2.2.1 Que aquesta equació no tingui cap solució real

Llavors, comprovarem si amb *x=0* es compleix la inequació (ja reduïda). Si la compleix, tots els nombres reals seran solució de la inequació. Més concretament,

- la solució de la inequació és l'interval $[-\infty, +\infty]$, si posant *x=0* es compleix la desigualtat,
- no existeix cap solució de la inequació, si amb *x=0* no es compleix la desigualtat

2.2.2.2 Que aquesta equació tingui una solució real $x=x_1$

Llavors, els nombres reals quedaran dividits en tres parts

$]-\infty, x_1[$ $\qquad x = x_1 \qquad$ $]x_1, +\infty[$

Agafarem un nombre en cada part i comprovarem si és, o no, solució de la inequació. Si és solució, tots els nombres d'aqueixa part seran solució, si no ho és, aqueixa part no conté cap solució.

2.2.2.3 Que aquesta equació tingui dos solucions reals: $x=x_1$, $x=x_2$

Llavors, com en el cas anterior, els nombres reals quedaran dividits en tres parts

$]-\infty, x_1[$ $\qquad]x_1, x_2[\qquad$ $]x_1, +\infty[$

Agafarem un nombre en cada part i comprovarem si és, o no, solució de la inequació. Si és solució, tots els nombres d'aqueixa part seran solució, si no ho és, aqueixa part no conté cap solució. Pel que fa als números x_1 i x_2 , només seran solució quan la desigualtat sigui una d'aquestes: $\le$, $\ge$

RESUM

RESOLUCIÓ D'UNA INEQUACIÓ DE SEGON GRAU: $ax^2 + bx + c < 0$ (1)	
1ª pas:	Es calculen les solucions de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ (2)
2º pas:	Les solucions de l'equació anterior dividiran els nombres reals en un, dos o tres intervals; **llavors**, es comprova si és solució cada un d'aquests intervals, per a la qual cosa és suficient fer la comprovació amb un nombre qualsevol triat en cada interval. Les solucions de l'equació (2) s'hauran de comprovar apart en (1).

Exemple: Trobar les solucions de la inequació $2x^2 + x - 3 \le 0$ (1)

Solució

1r pas: Resolent l'equació $2x^2 + x - 3 = 0$, trobem els valors $x_1 = -1'5$, $x_2 = 1$. Així, els nombres reals ens queden repartits en 3 intervals $]-\infty, -1'5[$, $]-1'5, 1[$, $]1, +\infty[$

2n pas: Agafem un nombre qualsevol en cada interval i comprovem si és o no solució de la desigualtat (1)

- En $]-\infty, -1'5[$, agafem el –2 i el comprovem: $2(-2)^2 + (-2) - 3 = 8 - 2 - 3 \not\le 0$. Per tant, en aquest interval no hi ha cap solució.
- En $]-1'5, 1[$, agafem el 0 i el comprovem: $2 \cdot 0^2 + 0 - 3 = 0 + 0 - 3 \le 0$. Per tant, tots els nombres d'aquest interval seran solució.
- En $]1, +\infty[$, agafem el 2 i el comprovem: $2 \cdot 2^2 + 2 - 3 = 8 + 2 - 3 \not\le 0$. Per tant, en aquest

interval no hi ha cap solució.

- Només ens quedarien per comprovar els números –1'5 i 1. Donat que la desigualtat conté també el signe "igual", tots dos seran solució.

En definitiva, les solucions de la inequació proposada formen l'interval $[-1'5,\ 1]$

OBSERVACIONS: Amb les indicacions donades fins aquí, no hauries de tenir cap dificultat per resoldre els exercicis 1 i 3 proposats per a la quinzena 6. Per resoldre exercicis com el 2 proposat per a la quinzena, continua llegint.

3. Desigualtats amb el valor absolut

3.1 Els nombres que compleixen $|f(x)| \leq k$ **són els mateixos que compleixen** $-k \leq f(x) \leq k$ **,** és a dir, equival a dues desigualtats que s'han de complir alhora (anàlogament, $|f(x)| < k$ equival a les desigualtats $-k < f(x) < k$)

Exemple: Resoldre la inequació $|1-2x| < 3$

Solució

$|1-2x| < 3$ equival a $-3 < 1-2x < 3$. Aquestes dues últimes es poden resoldre conjuntament, si aconseguim deixar aïllada la *x* al mig. Per fer-ho,

- **En primer lloc**, restem 1 en les tres parts:

  $-3 < 1-2x < 3 \ \Rightarrow\ -3-1 < 1-2x-1 < 3-1 \ \Rightarrow\ -4 < -2x < 2$

- **En segon lloc**, dividim per -2 les tres parts (recorda que en dividir per un negatiu... ?):

  $$-4 < -2x < 2 \ \Rightarrow\ \frac{-4}{-2} > \frac{-2x}{-2} > \frac{2}{-2} \ \Rightarrow\ \boxed{2 > x > -1}$$

Per tant, la solució de la inequació $|1-2x| < 3$ la formen els nombres de l'interval $]-1,\ 2[$.

3.2 Els nombres que compleixen $|f(x)| \geq k$ **són els que compleixen** $f(x) \geq k$ **o** $f(x) \leq -k$ **,** és a dir, equival a dues desigualtats independents (anàlogament per a $|f(x)| > k$)

Exemple: Resoldre la inequació $|1-2x| > 3$

Solució

Els nombres que compleixen $|1-2x| > 3$ seran els que compleixin una d'aquestes:

$$1-2x > 3 \quad \text{ó} \quad 1-2x < -3$$

Hem de resoldre, doncs, aquestes últimes.

Solució de $1-2x > 3$: $\quad 1-2x > 3 \Rightarrow -2x > 3-1 \Rightarrow -2x > 2 \Rightarrow \boxed{x < -1}$

Solució de $1-2x < -3$: $\quad 1-2x < -3 \Rightarrow -2x < -3-1 \Rightarrow -2x < -4 \Rightarrow \boxed{x > 2}$

Per tant, la solució de la inequació proposada és la unió dels intervals $]-\infty, -1[$ i $]2, +\infty[$.