F. GRAELL I DENIEL

LA PROPORCIÓ D'ÈUDOX
I
LA GENERALITZACIÓ
DE LA PROPORCIÓ

QUADERNS DE FILOSOFIA

11

F. GRAELL I DENIEL

LA PROPORCIÓ D'ÈUDOX
I
LA GENERALITZACIÓ
DE LA PROPORCIÓ

11
QUADERNS DE FILOSOFIA

Barcelona 2023

2ª edició novembre 2023 [1ª edició juny de 2001]

ISBN: 84-931608-0-6

www.quadernsdefilosofia.cat
www.xtec.cat/~fgraell
E-mail: fgraell@xtec.cat

El web permet de baixar la còpia d'un qualsevol quadern editat.
Podeu fer ús de l'adreça electrònica per a qualsevol correspondència amb *Quaderns de Filosofia*.

CONTINGUT

Presentació, 7.

I
DE LA PART I DEL TOT.
DINS DE L'ÀMBIT DELS NOMBRES RACIONALS POSITIUS, 8.

II
MÚLTIPLES I SUBMÚLTIPLES
DINS DE L'ÀMBIT DELS NOMBRES RACIONALS POSITIUS, 12.

III
LA RAÓ I LA PROPORCIÓ GEOMÈTRIQUES
DINS DE L'ÀMBIT DELS NOMBRES RACIONALS
COM ARRIBEN A SER AFERS MERAMENT NUMÈRICS, 14,

IV
LA RAÓ I LA PROPORCIÓ
GEOMÈTRIQUES D'ÈUDOX, 18.

V
LA GENERALITZACIÓ DE LA PROPORCIÓ
DES DEL PUNT DE VISTA
DE LA PROPORCIONALITAT RACIONAL, 27.

VI
NOTA SOBRE LA GENERALITZACIÓ
DE LA PROPORCIÓ DES DEL PUNT DE VISTA
DEL CÀLCUL AMB RADICALS, 32.

VII
ADDENDA: LA RAÓ COMPOSTA, 36.

PRESENTACIÓ

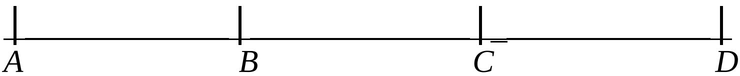
La proporcionalitat geomètrica configurà des dels grecs i per prou temps el mètode d'exposició en matemàtiques i sens dubte es bastí a tall d'un llenguatge tècnic del tot exacte en els *Elements* d'Euclides, mentre els estudiosos admeten comunament que la teoria de la proporcionalitat d'Èudox generalitzà la proporcionalitat anterior, reservada sols als nombres (en l'accepció grega del mot), per tant independentment d'aquests. El nostre treball vol assumir doncs com a tasca l'assaig de circumscriure una mica més l'abast d'unes tals afirmacions – lliura un llenguatge per a apropar-se al llenguatge de la proporció geomètrica –, en especial degut al fet que la nostra generalització de la proporció té contactes amb la generalització grega, i que sembla convenient de destriar, en la mesura que sigui possible, els dèbits a les vàries tradicions matemàtiques precisament per a comprendre-les, i per a comprendre la nostra activitat matemàtica. Car l'esquematisme al qual ens veurem forçats per tal de no allargar desmesuradament l'escrit no lleva que un dels objectius de la filosofia rau a lliurar un llenguatge que permeti la recta intel·lecció d'altres llenguatges, històrics o contemporanis[1].

¿És possible de concebre la proporcionalitat d'Èudox independentment de l'univers numèric?¿Suposà la introducció de radicals i del càlcul radical una transformació bàsica d'aquella proporcionalitat? Aquestes preguntes, i d'altres, ens obliguen a fer un cop d'ull a alguns rudiments matemàtics per a major claredat.

[1] La filosofia tracta de l'ens, és a dir, del que hi ha. Les propostes expressades es comprenen des d'aquí, i un mateix ho assumeix o no, creu que necessita una complementarietat o no, unes distincions o no, etc.

I
DE LA PART I DEL TOT.
DINS DE L’ÀMBIT DELS NOMBRES RACIONALS POSITIUS.

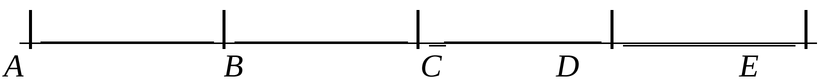
1. Considerem el següent gràfic, on *AD* s'anomena 'múltiple' de *AB*, i *AB* 'submúltiple de *AD*, quan *AB* = *BC*, *BC* = *CD*, *AB* = *CD*;



el múltiple de quelcom fa que aquest quelcom li sigui submúltiple: el tot és un múltiple vist des de la part, la part és un submúltiple vista des del tot.

En efecte la relació entre el tot i la part és aquí (1) la d'un nombre enter respecte de la unitat; (2) la de la unitat respecte d'una unitat decimal o fraccionària; (3) la de dos nombres que resulten de prendre una nova unitat model, respecte de la qual es compta la part i el tot. Però sigui quin sigui el nombre de la part, el tot tindrà un nombre que es diu tantes vegades més gran que el nombre de la part com el tot a la part – parlem d'un múltiple del nombre de la part – (o la part tindrà un nombre que es diu tantes vegades més petit que el nombre del tot, com la part ho és del tot – parlem d'un submúltiple del nombre del tot): per tant arribem fàcilment a la multiplicació (abstracta) del nombre de la part per les vegades que la part està continguda en el tot, o a la divisió (abstracta) del nombre atribuït al tot pel nombre de parts que té el tot.

Podem observar en el gràfic que adjuntem una relació, on hom, usant nombres, es capaç d’expressar-se així:



el múltiple multiplica per 4

TOT	PART	
40	10	
20	5	
4	1	
4/2	1/2	
4/4	1/4	
4/12	1/12	
0,04	0,01	
0,006	0,0015	etc.

el submúltiple divideix per 4

Per tant el tot i la part, quan són un múltiple i un submúltiple, poden tenir dos qualssevol nombres que conservin la relació entre aquell tot i la part, per això parlem[2] de nombres múltiples i submúltiples, això és, nombres múltiples del de la part i nombres submúltiples del del tot.

Adonem-nos també que el producte resultant del nombre de parts per la part (tingui el nombre que tingui) ens ofereix el tot (amb el corresponent nombre), per tant la divisió del tot (amb el seu nombre) i la part (amb el seu) ens podrà oferir el nombre de parts contingudes en el tot: en efecte un és múltiple de l'altre el nombre de vegades que la part està en el tot – o un és un submúltiple de l'altre d'acord amb el nombre de vegades que cal repetir-lo per a obtenir el tot.

2. Tenint una part i un tot, i aquest no essent un múltiple de la primera, podem intentar de discriminar-hi una colla de subparts iguals, respecte de les quals la part i el tot en siguin múltiples.

Llavors, com abans, quan el tot no és un múltiple de la part, i trobem subparts alíquotes respecte de les quals tant la part com el

[2] Cf. *Lògica, llenguatge i matemàtica*, Barcelona, Anthropos, 1993, pàgs. 220-228.

tot són múltiples, llur relació tampoc no es modifica pels nombres que tenen el tot i la part. En efecte la relació entre el tot i la part és aquí: (1) la de dues coses comptades (nombres) respecte de la part alíquota com a unitat; (2) la d'aquells dos nombres que resulten de prendre una *nova* unitat model, respecte de la qual es compta la subpart alíquota que mesura la part i el tot. Però sigui quin sigui el nombre de la subpart alíquota de la part i del tot, la part i el tot tindran uns nombres que es diuen tantes vegades més grans que el nombre de la subpart alíquota com vegades la part i el tot contenen, respectivament, la part alíquota (diem que són múltiples del nombre de la part alíquota, i el nombre d'aquesta és submúltiple del d'aquells); per tant arribem fàcilment a la multiplicació (abstracta) del nombre de la subpart alíquota per les vegades que està continguda en la part i en el tot respectivament.

En el mateix exemple de dalt tenint el tot *AE* i la part *AD*, la relació, usant nombres, es va expressant així:

TOT	SUBPART ALIQUOTA	PART
40	10	30
20	5	15
4	1	3
4/2	1/2	3/2
4/4	1/4	3/4
4/12	1/12	3/12
0,04	0,01	0,03
0,006	0,0015	0,0045
etc.	etc.	etc.
el múltiple multiplica per 4		el múltiple multiplica per 3

Per tant el tot i la part, els dos essent múltiples d'una subpart alíquota, poden ser dos qualssevol nombres que continguin tantes vegades el nombre de la subpart alíquota, com vegades el tot conté la subpart, i la part la subpart, respectivament, i per això parlem també de nombres múltiples, del tot i de la part, del nombre de la subpart alíquota.

Aquí, és obvi, el nombre del tot i el nombre de la part contenen un nombre enter de vegades el nombre de la subpart (en són simples múltiples), i per tant la divisió dels nombres del tot i de la part pel nombre de la subpart alíquota ens dirà les vegades que la subpart està continguda en el tot i en la part, respectivament. Però, també per motius obvis, és impossible d'obtenir el nombre enter de vegades que la part està continguda en el tot, però sí que podem expressar el nombre trencat de vegades que la part està continguda en el tot; en el nostre exemple sols cal dividir el nombre del tot pel nombre de la part, això és:

TOT		PART	
40	:	30	= 4/3
20	:	15	= 4/3
4	:	3	= 4/3
4/2	:	3/2	= 4/3
4/4	:	3/4	= 4/3
4/12	:	3/12	= 4/3
0,04	:	0,03	= 4/3
0,006	:	0,0045	= 4/3
etc.		etc.	

i diem que la part està continguda 4/3 vegades en el tot; per tant la multiplicació del nombre de la part pel nombre de vegades que està continguda en el tot ens oferiria també el nombre del tot. I d'una manera semblant podríem obtenir el nombre fraccionari que expressi la relació de la part respecte del tot [3/4].

II
MÚLTIPLES I SUBMÚLTIPLES
DINS DE L'ÀMBIT DELS NOMBRES RACIONALS POSITIUS

1. *Deixant ara els nostres exemples*, i agafant les sèries

40	10	40	30
20	5	20	15
4	1	4	3
4/2	1/2	4/2	3/2
4/4	1/4	4/4	3/4
4/12	1/12	4/12	3/12
0,04	0,01	0.04	0,03
0,006	0,0015	0,006	0.0045
etc.	etc.	etc.	etc.

observem que la parella de nombres que ens han servit a l'hora de fer esment del tot i de la part [per exemple, 20 i 5 de es dues primers columnes, o 20 i 15 de les dues últimes] s'obté en multiplicar o en dividir una altra parella [per exemple, 4 i 1 de les dues primers columnes, o 4 i 3] per un mateix nombre enter. Un tal fet ens permet el següent excurs: aquests dos nombres de la part [en l'exemple, 5 i 1 de la segona columna, o 15 i 3 de la quarta] serien iguals als d'un altre tot i una altra part, l'un múltiple o l'altra submúltipla, respectivament, de l'altra/e [és a dir, una nova relació tot-part 5 i 1]; i la mateixa cosa s'esdevindria entre el dos nombres dels tots del cas [en l'exemple, 20 i 4 de la primera columna].

En poques paraules: la relació entre aquests dos nombres de la part passa, *en la interpretació*, a la d'entre un múltiple i un submúltiple; i la d'entre els dos respectius nombres del tot també passa a la d'entre un múltiple i un submúltiple.

Fent una passa més (en l’abstracció) parlem del múltiple d'un nombre sempre si més no que el multipliquem per un nombre enter.

2. Parlant en general d'un nombre múltiple o d’un nombre submúltiple cal tenir cura que això pot referir-se o als nombres d'una mateixa cosa (i llavors no hi ha múltiple o submúltiple més que pels nombres que usem), o pot referir-se al nombre d'una part o d'un tot (i llavors hi ha múltiples i submúltiples en totes les accepcions), malgrat que en ambdós casos parlem de múltiples i de submúltiples perquè en conjunt definim els múltiples i els submúltiples per mitjà dels nombres abstractes.

3. D'altra banda val la pena de remarcar que hi ha una equivalència estructural (en la mesura que ho podem més o menys seguir per a nombres petits) entre els nombres exemplars d'una part i d'un tot, i els nombres nominalment iguals als primers que tenen una unitat exemplar diferent. Però aconseguida aquesta equivalència (que no és pas una igualtat), la podem traslladar als nombres estructurals (que són iguals entre si) i als abstractes.

En conjunt doncs sembla que la base dels múltiples i dels submúltiples ragui sobretot en els nombres exemplars, que garanteixen la igualtat de les unitats dels nombres implicats, que permeten la cerca, en una primera instància, de parts alíquotes; però alhora això és incardinat pel conjunt de l'aritmètica i de les seves operacions (amb nombres grans), permet totes les equivalències amb d'altres nombres, i tot plegat rau a la llarga en el domini numèric abstracte, que fa que la multiplicació o la divisió d'un nombre per un altre en fa múltiples i submúltiples, i ja instal·lats dins del domini abstracte del nombre i de la reversibilitat de les operacions.

III
LA RAÓ I LA PROPORCIÓ GEOMÈTRIQUES DINS DE L'ÀMBIT DELS NOMBRES RACIONALS
COM ARRIBEN A SER AFERS MERAMENT NUMÈRICS

Quan quatre termes són de tal manera que un d'aquests és tantes vegades múltiple o submúltiple d'un segon com vegades el tercer ho és del quart; o el primer és tantes vegades múltiple d'una part alíquota quantes el tercer de la seva part alíquota, com el segon ho és tantes vegades quantes el quart de la seva; això és, quan els quatre termes poden permetre dos jocs paral·lels com els esmentats, llavors la relació entre les dues parelles que ho permenten s'anomena 'proporció (geomètrica)' en un primer ús de l'expressió, i la relació entre els dos termes de cada parella s'anomena 'raó (geomètrica)' també en un primer ús del mot; per tant també es diu que la proporció s'estableix entre aquestes raons.

Semblaria en principi que les proporcions no haurien d'establir necessàriament igualtats. La raó entre quatre termes presos de dos en dos sols seria *la mateixa* o seria *igual* quan hi hagués justament una tal relació, quan s'establís doncs sobre les mateixes coses o bé entre coses iguals: la raó entre costats i entre paral·lelograms no seria la mateixa o igual – parlant d'una manera estricta –, sinó que hi hauria aquí un peculiar paral.lelisme. Però, fins on sabem, totes les definicions de la proporció (començant per *Eucl*.V.Defs. 5 i 6) han definit les proporcions a través de la igualtat.

Perquè una raó és una relació entre un tot (una part) i una part (un tot), per tant correspon a (1) un nombre respecte de la unitat (o la unitat respecte d'una unitat fraccionària o decimal); (2) la unitat respecte d'un nombre (o una unitat fraccionària o decimal respecte de la unitat); (3) o és un nombre que es diu tantes vegades més gran que el nombre de la part com vegades el tot conté la part en (1) (parlem d'un múltiple del nombre de la part); (4) o tantes vegades més petit que el nombre del tot com vegades ho és la part respecte del tot en (2) (parlem d'un submúltiple del nombre del tot); (5) o [quan el tot no és un múltiple de la part] és la relació de dos nombres respecte d’una unitat; (6) o [quan el tot no és un múltiple de la part] és la relació de dos nombres respecte d'un altre nombre, els dos primers dels quals es diuen tantes vegades més grans o més petits que aquest tercer com vegades la part i el tot contenen una unitat en (5), i diem que aquells dos nombres són múltiples o submúltiples del tercer.

Dalt hem vist que un tot conté un nombre enter o trencat de vegades la part (o que la part és un nombre trencat de vegades el tot), independentment dels nombres que s’hi usin, i que això era també l'expressió de dividir un dels termes per l'altre, independentment dels nombres que s’hi usin, car el quocient dirà el nombre de vegades que l'un terme conté l'altre. La divisió, considerada com el joc entre els termes, i el quocient com a vegades que l'un conté l'altre, és certament la raó, però la divisió en tant que quocient no és pas tota la raó, sinó un dels seus elements; tot i això la resultant de la divisió és *una* expressió de la raó, i d'aquí que el càlcul numèric trobi igualtats entre raons; tenint la raó A,B proporcional a C,D, llavors

$$A : B = C : D$$

com a igualtat de resultants en el càlcul numèric, que entra per tant així en el regne del domini numèric racional[3].

---

[3]La fórmula per a la proporció geomètrica:

$$a : b = c : d$$

és de Leibniz, que s’exclamà de l’ús de signes especials per això, mentre cregué (1693) que bastava el signe de la divisió i de la igualtat: «*Sic quidam solent* a ÷ b ∺ c ÷ d *significare, eandem esse rationem seu proportionem ipsius* a *ad* b, *quae est ipsius* c *ad* d. *Sed ego deprehendi regulariter non esse opus in calculo peculiaribus signis pro rationibus et proportionibus, earumque analogiis seu proportionalitatibus, sed pro ratione sive proportione sufficere signum divisionis et pro analogia seu*

És fàcil de veure doncs que tenint la proporció

$$A : B = C : D$$

passem a:

$$A : C = B : D$$

perquè, introduïts en el domini numèric racional, generalitzem la proporció de manera que diem que el producte dels termes mitjans és igual al producte dels extrems; en efecte

$$A : B = C : D$$
$$A : n.A = C : n.C$$
$$A.(n.C) = C.(n.A)$$
$$\text{i} \quad A : C = n.A : n.C$$

mentre l'alternança entre els termes d'una proporció sempre aconsegueix una nova proporció (dins del regne dels nombres racionals), car sempre ha de ser possible que l'última línia que hem escrit sigui del tipus:

$$A : m.A = n.A : mn.A.$$

Repetim també, dins del regne dels nombres racionals positius (en especial dels abstractes i dels exemplars), que tenint la proporció:

$$A : B = C : D$$

---

proportionum coincidentia sufficere signum aequalitatis. Itaque rationem seu proportionem ipsius a *ad ipsum* b *ita scribo* a : b *seu* $\frac{a}{b}$, *quasi de divisone ipsius* a *per* b *ageretur. – Et analogiam seu duarum proportionum aequalitatem sive convenientiam designo per aequalitatem duarum divisionum seu fractionum. Et cum designo, eandem esse rationem* a *ad* b*, quae est* c *ad* d*, sufficit scribere a : b = c seu* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ...» (Cf. J.Tropfte, *Geschichte der Elementar-Mathematik*, vol III. *Proportionen-Gleichungen*, Berlín i Leipzig [2.ª ed., 1922], pàgs.11ss).

A i *B* (o *B* i *A*) (1) o són la relació d'un nombre respecte de la unitat, o de la unitat respecte d'una unitat fraccionària o decimal; (2) o la relació d'un nombre que es diu múltiple (o submúltiple) respecte d'un altre nombre, i que alhora els dos nombres es diuen iguals múltiples (o submúltiples) des de (1); (3) o la relació de dos nombres primers entre si; (4) o la relació de dos nombres, etc..., i que es diuen iguals múltiples o submúltiples dels de (3) -- i llavors els nombres de (3) son els seus submúltiples o múltiples.

IV
LA RAÓ I LA PROPORCIÓ GEOMÈTRIQUES D'ÈUDOX

1. La sèrie numèrica natural es pot usar per a una qualsevol reguitzell de coses, és a dir, la sèrie numèrica natural abstracta pot usar-se de moltes maneres – alhora es pot calcular d'una manera abstracta una operació numèrica qualsevol sense preocupació d'una altra tasca, o pot haver-n'hi; això és vàlid, és clar, per al cas dels múltiples i dels submúltiples, de les raons i de les proporcions: quan ho establim d'una manera merament numèrica formalitzem en l'accepció que abandonem d'altres afers, i fins i tot en l'accepció que hi usem lletres – però també podem anar estudiant els vessants que no són de mer ús de nombres.

De primer considerem la circumstància que la proporcionalitat (amb nombres racionals) s'estableixi amb raons de diversa mena; per exemple, la proporcionalitat de la raó entre segments rectilinis (coses doncs de la seva mateixa mena), i la raó de paral.lelograms de la mateixa altura que els tenen com a base (coses doncs de la seva mateixa mena, i diferent de l'anterior): sembla que en aquest cas – és a dir, si es volgués servar algun element, per als múltiples i els submúltiples, que no fos la mera significació numèrica – es podria cercar una raó de línies i la corresponent proporcional amb la raó de paral.lelograms tot usant nombres racionals, o podria alternar els termes, en el cas de servir-se un pèl més del domini numèric i dins del camp d'ús dels racionals, sense perdre per això alguna referència que no fos el mer ús de nombres; la primera opció fou un requisit euclidià de la proporcionalitat entre magnituds. Sens dubte una exposició merament numèrica de la proporcionalitat, com aquella a la qual hem pogut arribar abans o, si més no en part i salvant que sempre s'estableix entre íntegres, la que podríem llegir en els llibres VII-

IX dels *Elements* (d'arrel pitagòrica), no tindrien en compte aquest requisit, i fóra més fàcil que s'aconseguís (com hem fet nosaltres i com potser ho feren primerament els grecs) a partir d'unitats de la mateixa mena per a tots els termes de la proporció. Si més no nosaltres no tindríem cap inconvenient de subsumir la proporcionalitat establerta entre magnituds en una proporcionalitat de mers nombres racionals, i tenim prou motius per a creure que fins i tot un grec *euclidià* ho hauria fet – n'és testimoni la teoria numèrica de la proporcionalitat tal i com es troba en els *Elements;* al cap i a la fi les unes i les altres conductes la hi haurien suggerit, com a nosaltres, una tal aproximació.

2. El requisit euclidià d'establir la raó entre magnituds de la mateixa mena, que sembla que convidi a no perdre algun element que no sigui la mera significació numèrica (racional), no es deuria certament a una manca grega de capacitat per a operar amb mers nombres (racionals) – amb una mera significació numèrica; aquell requisit es troba en les definicions del llibre V dels *Elements*, un escoli del qual, d'autor desconegut, recull el comentari que hi ha qui diu que aquest llibre dels *Elements* es deu a Èudox, el deixeble de Plató. En efecte és prou sabut que els *Elements* tracten dues vegades la teoria de la proporció (llibres V i VII, la primera per a magnituds en general, la segona referida a nombres), recollint possiblement dues tradicions anteriors; sembla que Aristòtil coneix aquestes diferents tradicions: esmenta l'alternança en les proporcions i que primer fou provada individualment per a nombres, línies, sòlids i temps, malgrat que fos possible de provar-la de manera general com es feia ja en el seu temps (*Segons analítics*, I 5, 74a). Es podria defensar que Èudox segurament fou qui generalitzà la doctrina, i tenint en compte així mateix que els grecs veien els incommensurables com un escull, hom no es desencaminaria a l'hora d'avaluar la teoria general de la

proporcionalitat com una manera de generalitzar les proporcions – si més no en la intenció – per a dues qualssevol magnituds[4].

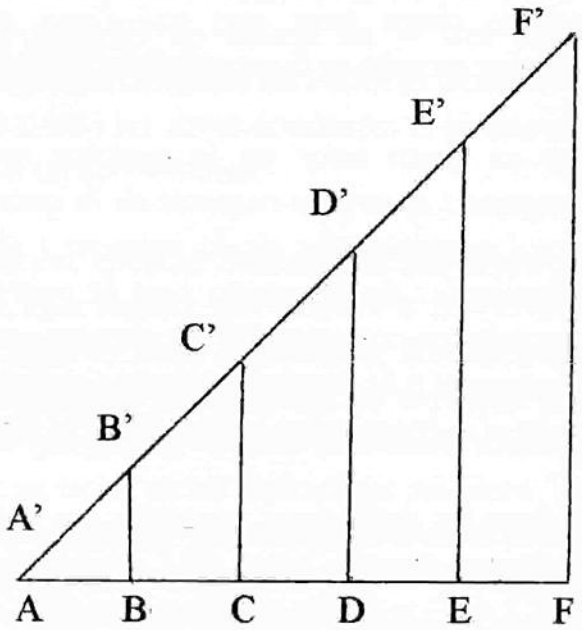
Aquest darrer punt es veu especialment quan es prenen les definicions de «raó», de «tenir una raó» i d'«estar en la mateixa raó»:

«*Una raó és un tipus de relació, segons mesura, entre dues magnituds de la mateixa mena*» (*Eucl.*V.Def.3).

«*Les magnituds es diuen tenir una raó l'una amb l'altra si, multiplicades, poden excedir-se l'una a l'altra*» (*Eucl.*V.Def.4).

«*Les magnituds es diuen estar en la mateixa raó, la primera respecte de la segona i la tercera respecte de la quarta, quan, si es prenen qualssevol equimúltiples de la primera i de la tercera, i qualssevol equimúltiples de la segona i de la quarta, els primers equimúltiples excedeixen comunament els darrers equimúltiples, els són iguals comunament o hi queden en manca comunament, presos respectivament en el corresponent ordre*» (*Eucl.*V.Def.5).

[4]Com diu molt bé T.L.Heath, «*in its primitive sense λόγος was only used of a ratio between commensurables, i.e. a ratio which could be expressed, and the manner of expressing it is indicated in the proposition, Eucl.X.5, which proves that* commensurable magnitudes have to one another the ratio which a number has to a number. *That this was the primitive meaning of λόγος is proved by the use of the term ἄλογος for the incommensurable, which means irrational in the sense* of not having a ratio *to something taken as rational (ῥητός)», The thirteen books of Euclid's Elements*, 3 vols., Nova York, Dover, 1956, vol. II, pàg.117.



Podem exemplificar les definicions amb un triangle rectangle isòsceles, de la següent manera: entre *AB* i *AC* hi ha una raó, o n'hi ha una entre *A'B'* i *A'C'*, o àdhuc n'hi ha entre *AB* i *A'B'*, en aquest cas sense que calgui analitzar més les magnituds. Diem, però, que la raó de *AB* a *AC* és proporcional a la raó de *A'B'* a *A'C'* quan: (1) iguals múltiples de la primera i de la tercera excedeixen alhora iguals múltiples de la segona i de la quarta: *AF* i *A'F'*, iguals múltiples de *AB* i *A'B'*, excedeixen alhora *AE* i *A'E'*, iguals múltiples de *AC* i *A'C';* (2) els són iguals: *AE* i *A'E',* iguals múltiples de *AB* i *A'B'*, són també iguals múltiples de *AC* i d'*A'C'*; (3) hi queden en manca: *AD, A'D'*, iguals múltiples de *AB* i *A'B'* queden en manca respecte de *AE* i *A'E'*, iguals múltiples de *AC* i *A'C'*, respectivament. Per tant s'estableix la proporcionalitat deixant de banda qualsevol problema d'incommensurables[5].

5 Ometem l'exemplarització de T.L. Heath (cf. ibíd., pàgs.117-129), que segueix De Morgan, versemblantment sota la influència de concepcions aritmetitzants de l'irracional. Car, al costat dels fets obvis que el sistema de

¿En quina accepció, tanmateix, podem afirmar que la teoria de la proporcionalitat del llibre V dels *Elements* és més general? En principi sembla que el grec euclidià defensaria – seguint l'exemple del triangle rectangle isòsceles – que ho és en l'accepció que aquella teoria té en compte, a l'hora d'establir la raó entre el costat i la hipotenusa, que són magnituds incommensurables, per tant sense la raó d'un nombre a un nombre (cf. *Eucl.*X, 6-8); seria general perquè serveix tant per a magnituds commensurables com per a les incommensurables, per això avui dia algú podria dir que no es tracta d'una mera teoria de la proporcionalitat numèrica (racional).

Ara bé: nosaltres voldríem fer veure que (1) l'accepció en la qual hem de comprendre una tal generalització té en compte, a través de l'assimilació des dels casos en els quals hi ha d'altres nombres, casos en els quals no disposem de cap nombre racional per a una magnitud (per exemple, per a la hipotenusa respecte dels catets), i potser podríem afegir que les nostres tècniques són un recurs estratègic per a usar una expressió lingüística (l'irracional) que remet a nombres racionals. També que (2) no sembla que la proporcionalitat pugui basar-se aquí en d'altres motlles que aquells que s'han establert per a la proporcionalitat de quantitats racionals, és a dir, la incommensurabilitat i la proporcionalitat euclidianes serien en principi problemes diversos del tractament matemàtic, que certament es podrien superposar, però que l'un problema no afectaria les bases de l'altre. I llavors que (3) – l'exercici matemàtic de la proporcionalitat del llibre V dels *Elements* essent impecable – una tal teoria sols tindria com a base l'única proporcionalitat possible aquí, i veuríem el fet que el grec euclidià no considerés que fos possible un nombre (racional) per a allò incommensurable

---

raons i de proporcions és anterior a Èudox i que, com recorda T.L.Heath (ibíd., pàg. 119), Euclides coneixia sens dubte mètodes d'aproximació per a irracionals, uns tals mètodes no lliurarien una concepció *exacta* de la raó i de la proporció, i per això precisament es bastí la nova teoria: fet i fet bastaria potser un cop d'ull a *Eucl.*V,1-4 per a palesar que sembla impossible d'admetre les aproximacions *no exactes* que T.L.Heath hauria assumit.

com un assumpte d'un altre ordre (i el nostre nombre irracional no seria certament cap nombre – racional –, sinó «una estratagema»).

3. Dalt ja insinuàrem que una proporcionalitat entre la raó de segments i la dels corresponents paral·lelograms de la mateixa altura en termes de quantitats racionals sembla possible; l'exemple il·lustrava que les raons que es posen en proporció no cal que tinguin unitats de la mateixa mena: sens dubte que sí que ho han de ser quan hom vol establir una raó, i abans de caure en el mer regne del nombre (abstracte) racional; però els llibres numèrics dels *Elements* palesen ja un tal domini abstracte (representat en línies), i per això mateix fins i tot defensen l'alternança en els termes de les proporcions.

En aquest sentit la definició d'*Eucl*.V de la proporcionalitat representa un retorn a posicions racionals que no són de mera significació numèrica (d'aquí s'entén que s'insisteixi que les magnituds en una raó siguin de la mateixa mena -- *Eucl*.V, Def.3): no tenint manera d'expressar numèricament (racionalment) allò incommensurable es creu necessari de retornar a l'exemplaritat; per dir-ho així: la certesa que en principi era possible d'establir una proporcionalitat (amb nombres racionals) entre quatre magnituds (les quatre de la mateixa mena o, si més no, dues d'una mena, les altres d'una altra mena), però alhora que, establerta una unitat base, podria no trobar cap nombre racional per a un terme de la proporció, haurien suggerit d'establir la proporció, no a base de mers nombres (no hi hauria pas nombre racional per a la magnitud que descobrim incommensurable quan la volem mesurar per una unitat prèvia establerta, i d'acord amb una assimilació d'operacions, tal i com ho defensàrem en un altre lloc[6]), sinó prenent les mateixes magnituds. En d'altres paraules: la definició de la proporcionalitat del llibre V dels *Elements* està bastida en termes de proporcionalitat numèrica racional (es parla de *múltiples* i d'*equimúltiples*, i que les magnituds estan en la *mateixa* raó), sols

[6] *En quina accepció els grecs demostraren la incommen-surabilitat?* QF4.

que no abandona els elements racionals que no són la mera significació dels nombres (s'hi esmenta doncs *magnituds*) perquè unes tals magnituds poden ser incommensurables quan es volen comptar per una predeterminada mesura, la qual cosa indicaria la diferent natura de les bases de la proporció clàssica i de la incommensurabilitat.

La definició esmentada de la proporcionalitat seria per tant la conseqüència d'una racionalització, és a dir, del fet que les assimilacions numèriques i l'afany d'una mesura comuna menen a un atzucac numèric (palesaria la manca de mots numèrics racionals per a aquestes tècniques), amb la qual cosa s'hauria estimat necessari de revisar una teoria de la proporcionalitat abstracta (i racional) – hi hauria entrat un motiu de desconfiança – i s'evitaria d'insistir en el caràcter numèric (racional) de la proporcionalitat, més enllà del fet que la pròpia definició *d'Eucl*.V palesa una tal proporcionalitat numèrica racional.

4. Aquí sols sembla haver-hi un sol tipus de proporcionalitat (en qualsevol cas amb nombres racionals), i la descoberta dels incommensurables forçà una revisió de la mera proporcionalitat numèrica racional i obligà a tenir present elements (com la magnitud) que no són de mera significació numèrica. Alhora podríem estimar que fou l’entrellaçament de proporcionalitat (numèrica racional) i d'incommensurabilitat la que suggerí l'esmerç de la proporcionalitat numèrica racional, d'una banda, l'exemplificació en magnituds, de l'altra; això és, que se subsumís *dins* de la teoria de la proporcionalitat numèrica (racional) – coneguda i dominada prèviament – allò que, a un altre nivell, era incommensurable. Mirem-ho a través de l'exemple del triangle rectangle isòsceles, on trobem la proporcionalitat entre la raó de costats i la d'hipotenuses precisament per la que hi ha entre la raó numèrica de *nombres* d'unitats alíquotes dels costats i la raó numèrica de *nombres* d'unitats alíquotes de les hipotenuses, deixant doncs de banda que la unitat concreta de costat i la d'hipotenusa no puguin tenir una relació numèrica (racional); però

tot això sols és una expressió del domini numèric racional (com ho palesa *Eucl.* VII): d'aquí que *Eucl.*V parli de múltiples, d'equimúltiples i d'igualtat de raons, i que alhora tingui algunes prevencions a explicitar una tal proporcionalitat en termes merament numèrics. En d'altres paraules, *l'exemplaritat geomètrica* treballa com les nostres arrels irracionals: mentre nosaltres estimem √2 com una estratagema expressiva a partir dels «altres» nombres, el grec euclidià pren directament com a expressió d'allò incommensurable una mesura de magnitud; en aquesta accepció tant en els grecs com en nosaltres la proporcionalitat seria sempre un afer racional.

En els grecs hi hauria *una ampliació* dels objectes a caure sota la proporcionalitat *racional*, però no un canvi de proporcionalitat; perquè aquesta es mantindria com una proporcionalitat bàsicament de mera significació numèrica, seria una resultant d'aquest fet, que s'exemplificaria fins i tot per a una raó amb unitats-mesures concretes desiguals: entre el costat d'un triangle rectangle isòsceles i la seva hipotenusa hi ha certament una raó d'un nombre qualsevol d'unitats de costat respecte d'un nombre qualsevol d'unitats d'hipotenusa; la manca de parts alíquotes no llevaria la racionalitat *numèrica* de la raó, mentre l'exemplaritat de les magnituds bandejaria qualsevol qüestió sobre els incommensurables. Es tracta, com dèiem, d'una mera proporcionalitat numèrica racional que s'exemplifica en coses.

*Eucl.*V representa una superposició de consideracions, és a dir, la d'una proporcionalitat numèrica racional que s'exemplifica amb coses; i la nostra representa en un sentit una paral·lela superposició: la d'una proporcionalitat numèrica racional que s'exemplifica amb unitats que tenen unes expressions lingüístiques resultants de la nostra estratagema numèrica. Sembla doncs que com a activitat matemàtica tenen una similitud perfecta. L'una i l'altra són sols una generalització de la proporció en el sentit que subsumeixen els casos per als quals no disposem de nombre (racional) des d'una unitat concreta donada (i fetes les respectives assimilacions), i per això els anomenem «de qualsevol manera» (una magnitud, una estratagema lingüística), però al cap i a la fi sols seria proporció en aquest sentit *per allò merament numèric (racional) que hi ha,* independentment de l'exemplificació de les respectives unitats o dels revestiments lingüístics que tinguin. La proporcionalitat *d'Eucl*.V i la nostra, en aquest sentit, serien la resultant d'un *pòsit* de problemes diversos. En aquesta accepció la definició *d'Eucl*.V és motiu avui dia d'admiració en superposar perfectament la proporcionalitat racional a la pluralitat de coses (amb els seus problemes: per exemple, que hi pugui haver incommensurabilitat), fins i tot malgrat que un tal fet tendís a lligar el progrés matemàtic a la representació geomètrica.

V
LA GENERALITZACIÓ DE LA PROPORCIÓ DES DEL PUNT DE VISTA DE LA PROPORCIONALITAT RACIONAL

Dèiem que, en un sentit, àdhuc la nostra proporcionalitat sols ho seria per allò merament numèric (racional) que hi ha: que no tinguéssim necessitat d'exemplificar la proporcionalitat numèrica racional en magnituds geomètriques es deuria als nostres mitjans lingüístics per a expressar *una cosa* que no sabem comptar des d'una certa unitat, i assimilada a certes operacions, mitjans lingüístics que ens permetrien no haver de fer un esment constant de la magnitud geomètrica exemplar. Car la raó entre el costat i la hipotenusa d'un triangle rectangle isòsceles és la d'entre el nombre a i el nombre $a\sqrt{2}$, on la unitat de costat i la unitat, que expressem per $\sqrt{2}$, d'hipotenusa, palesarien una raó racional. Per això també en nosaltres no hi hauria d'altre criteri de proporcionalitat en aquest sentit que el de la racional, car tot allò expressiu irracional seria com una unitat: i el problema lingüístic de com fer les operacions amb nombres reals no seria una qüestió de la proporcionalitat, sinó de l'establiment de les regles d'escriptura lingüística que els són pròpies.

Però mentre la proporcionalitat dins dels nombres reals[7] podria avaluar-se tal i com ho fem amb la proporcionalitat d'Èudox, i en aquesta accepció qualsevol expressió irracional podria ser considerada una unitat o un nombre (racional); mentre, per exemple, la proporcionalitat entre una raó de catets (o del catet i la hipotenusa) i la raó d'hipotenuses (o dels respectius termes), o la proporcionalitat de la raó del costat i la hipotenusa amb la raó

[7] El text ha tingut en compte els irracionals algèbrics: fóra fàcil d'estendre les consideracions als transcendents. Això seria vàlid per a totes les ocasions en què parlem del nombres reals.

dels paral·lelograms de la mateixa altura sobre seu, podria estimar-se tal qual com un afer racional (unes tals línies i paral·lelograms establirien la proporcionalitat euclidiana per a les magnituds), de fet la pròpia introducció d'un llenguatge d'arrels de nombres o d'expressions que no en tenen (dins dels nombres racionals) per a la formulació d'allò irracional, trastorna la nitidesa que la proporció sigui tal qual un afer numèric racional en la mesura que l'irracional numèric és una operació indicada.

En efecte podem defensar – per exemple (i com a punt de partida) – que, en la proporció entre les raons de catets i d'hipotenuses de triangles rectangles isòsceles, hi va havent entre els dos catets o igualtat mumèrica, o l'un és múltiple de l'altre, o n'és submúltiple, o múltiple d'una part alíquota, i que entre les dues hipotenuses hi ha una relació paral.lela igual, és a dir, d'igualtat numèrica quan n'hi ha entre catets, l'una igualment múltipla de l'altra com l'un catet ho és de l'altre, o igualment submúltiples, o igualment múltipla d'una part alíquota, i sempre dins d'una concepció numèrica racional.

Introduint ara els nombres irracionals (i parlant d'un triangle rectangle isòsceles) és obvi que la raó de catets és la d'entre dos nombres un dels quals es diu múltiple o submúltiple, o és igual, respecte de l'altre, o els dos múltiples d'una part alíquota, i que la raó d'hipotenuses és, a més a més de la de la igualtat:

(1) la d'entre $\sqrt{2}$ i un múltiple quan la raó de catets és entre la unitat i un nombre;

(2) la d'entre un submúltiple de $\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$, quan la raó de catets és entre la unitat fraccionària i una unitat;

(3) la raó entre dos nombres enters de vegades $\sqrt{2}$ quan una tal raó és també la dels corresponents catets;

(4) la raó entre dos nombres trencats (o decimals) de vegades $\sqrt{2}$ quan una tal raó és també la dels corresponents catets. Per exemple:

$$(1)\ \frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}(\text{o }\sqrt{32})}$$

$$(2)\ \frac{0{,}25}{1}=\frac{0{,}25\sqrt{2}(\text{o }\sqrt{0{,}125})}{\sqrt{2}}$$

$$(3)\ \frac{15}{20}=\frac{15\sqrt{2}(\text{o }\sqrt{450})}{20\sqrt{2}\ (\text{o }\sqrt{800})}$$

$$(4)\ \frac{0{,}2}{0{,}8}=\frac{0{,}2\sqrt{2}\ (\text{o }\sqrt{0{,}08})}{0{,}8\sqrt{2}\ (\text{o }\sqrt{1{,}28})}$$

on arreu apliquem sols el criteri de la proporcionalitat racional que ja estudiàrem (deixant doncs sols indicat $\sqrt{2}$) − amb la doble possible lectura de les raons −, o bé (avançant-nos una mica) ja lliurem una expressió de l'irracional on només hi ha radicand (quelcom que com a mínim trobem ja al segle VI a l'Índia).

Dèiem que el fet d'introduir en l'expressió d'allò que és incommensurable un irracional numèric, fins i tot admetent-lo com una unitat, trastorna el propi criteri de la proporcionaliat en tant que avaluem allò que tenim per unitari en l'irracional com una operació indicada, això és, en la mesura que l'avaluem com a quelcom numèric susceptible del seu càlcul. En efecte els *Elements* contenen la proposició de la igualtat de productes de la multiplicació dels termes extrems i de la dels mitjans en la proporcionalitat numèrica racional (*Eucl.*VII,19); d'altra banda, si per a les magnituds en general defensen la igualtat dels rectangles formats pels termes extrems i mitjans d'una proporció (*Eucl.*VI,16) − que caldria comprendre d'acord amb la nostra interpretació de superposar un esquema numèric racional i les magnituds exemplificadores −, en l'un cas i en l'altre el patró de la proporcionalitat continua essent el que hi ha entre nombres racionals, mentre que la circumstància d'expressar una arrel irracional a la manera d'un nombre permet el pas que es deriva de les consideracions numèriques irracionals i del seu càlcul, de tal manera que la circumscripció de la proporcionalitat per la igualtat dels productes de la multiplicació dels termes extrems i la dels termes mitjans ja no és una conseqüència d'allò que hi ha de racionalitat numèrica en la proporció, sinó una conseqüència de comprendre els radicals irracionals i el seu càlcul, injustificable tal qual tant des d'*Eucl.*VII,19 (i els seus pressupòsits) com des d'*Eucl.*VI,16 (i els seus pressupòsits), com sigui que deriva de la pròpia sintaxi de la nova escriptura; de tal manera que, considerant l'expressió irracional com una operació indicada, per tant «quelcom» que no sols es comprèn com a unitat d'alguna mena, s'altera la noció de raó (que pot ser ja també entre «quelcom» que sols té una expressió radical i una segona quantitat) i la de proporció (que no cal concebre sols com el paral·lelisme de processos racionals), i de fet podem definir la raó com a relació entre «dues quantitats», racionals o reals (és a dir, d'una manera de cap a cap genèrica), i la proporció per la igualtat del producte de la multiplicació dels termes mitjans i el de la dels termes extrems.

Arribem així a una generalització de la proporció: com a tal té un precedent en la proporcionalitat racional, però la supera perquè indiquem resultats d'operacions que no tenen nombre dins dels nombres racionals. No es tracta doncs pròpiament d'una generalització en el sentit d'usar un recurs lingüític que ha subsumit directament casos plurals, sinó de la conseqüència històrica que la introducció d'expressions numèriques irracionals (els «nous nombres»), en tant que pensats com a operacions, feia que no calés copsar sols la proporcionalitat a base dels anteriors nombres, sinó que es poguessin imbricar l'anterior racionalitat i les operacions indicades, resultant un càlcul proporcional on forçosament entraven. La certesa que una proporció és la relació de quatre termes, el producte de la multiplicació dels extrems dels quals és igual al de la dels mitjans, esdevé sols la conseqüència lingüística general d'aquest fet.

Certament la proporcionalitat generalitzada així té com a mínim dos avantatges: (1) que no necessita de l'exemplaritat geomètrica; (2) que no cal que sigui possible una exemplaritat geomètrica una vegada s’ha fet càlcul autònom.

VI
NOTA SOBRE LA GENERALITZACIÓ DE LA PROPORCIÓ DES DEL PUNT DE VISTA DEL CÀLCUL AMB RADICALS

La generalització de la proporcionalitat en l'àmbit dels nombres reals certament és també una conseqüència del càlcul amb radicals, de tal manera que hagués estat inconcebible aquella extensió de la proporcionalitat sense el previ domini d'un tal càlcul: la proporcionalitat de catets (1 : 2) i d'hipotenuses d'un triangle rectangle isòsceles (√2 : 2√2) ja suposaria, és obvi, que es copsa què és √2, que se sap operar 2√2, que es domina una raó de quantitats, etc. Però tot això es fa més palès quan deixem exemples tan elementals; la proporcionalitat dels catets esmentat i de les hipotenuses del cas ens convida, per exemple, a la proporcionalitat de les hipotenuses respectives (√2 : 2√2) i dels paral.lelograms d'igual altura que les tenen per bases (√2√3 : 2√2√3), per tant a la proporcionalitat de catets (1 : 2) i de paral.lelograms (√2√3 : 2√2√3), on veiem encara clarament la proporció racional (si es vol també així: √6 : 2√6 respecte de 1: 2), on cal comprendre de bell nou què és √2√3; on cal assumir que se sap operar √2√3, que es domina les raons de quantitats reals, etc.; i on no es podria tampoc definir sols la proporcionalitat en termes racionals quan es pensa els radicals irracionals com a afers numèrics, etc.

Sembla en efecte que el domini d'un cert càlcul radical (ja palès en la matemàtica hindú) és anterior a la seva aplicació a la teoria eudoxiana de les proporcions, per tant que en principi hagués estat fundat d'una manera independent als mètodes propis d'una tal teoria; d'altra banda la petjada de les concepcions gregues de l'irracional en els matemàtics àrabs, que també reberen el càlcul numèric hindú (i el descabdellaren) es deixà sentir en la direcció de considerar un radical irracional una magnitud (una línia, per exemple), per tant en la voluntat d'exemplificar amb magnituds de què parlaven quan tenien a les mans un irracional, per tant d'aproximar la manipulació del tractament de radicals als mètodes de la proporció d'Èudox, i fins i tot provaren de *justificar* el càlcul amb radicals d'acord amb el tarannà de la proporcionalitat grega i, en conjunt, de la matemàtica grega, cosa que es perllonga a l'Occident cristià i que arribà fins al segle XVI.

Certament no fou aquesta l'única direcció d'investigació en la matemàtica àrab i fins i tot no fou potser la determinant[8], en tant que provaren de definir de bell nou què era la proporcionalitat, i que també hi trobem una important línia aritmetitzant del càlcul, i fins i tot de la pròpia noció de nombre (al-Ḥayyām, al-Ṭūsī): però no hi ha dubte que també hi hagué aquella primera direcció, i que obres cabdals de la matemàtica àrab traduïdes al llatí en l'Edat Medieval la seguiren.

És cert que *nosaltres* no creuríem pas que s'hagués pogut concebre un radical irracional (i considerat pròpiament què és) altrament que com una estratègia numèrica, o que s'hagués pogut *justificar* de fet la resultant del càlcul de, per exemple, $\sqrt{2}\sqrt{3}$ per mitjà de la teoria de les proporcions; o que la justificació per aquesta teoria que $\sqrt{8}$ és el doble de $\sqrt{2}$ no passés per res més que per una exemplificació de relacions numèriques (per tant que tal qual no la lliuraria: la teoria de les proporcions d'Èudox no ho podria fer), etc., afers que veurem en detall en un altra ocasió; però fou enmig d'unes tals ambivalents captinences que *de facto* s'anà descabdellant més i més el càlcul radical, quelcom que sols obeiria *per se* al domini numèric

Des d'aquí es podria comprendre els plurals i varis esforços per a «donar magnitud» al càlcul amb radicals, fins a arribar a la *Geometria* de Descartes (amb gloriosos precedents entre els àrabs), on les operacions bàsiques amb nombres s'associen a la proporcionalitat d'Èudox, podent-se reiterar *ad libitum* sempre

[8] Cf. A.P.Juschkewitsch, *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*, Moscou, 1961 (trad.al. de Viktor Ziegler, Basilea, Pfalz, 1964), pàgs.175-325.

amb la possibilitat de lliurar-ne una magnitud tot seguint un mètode senzill i eficaç.

És clar que, d'una banda, n'hi ha prou a fer un repàs dels grans matemàtics àrabs (per exemple als treballs d'Abū Kāmil i els d'al-Karaği), o a les obres de Leonardo de Pisa, de Nicolas Chuquet, de Luca Pacioli, de Michael Stifel, etc., per a adonar-se que el càlcul amb radicals s'havia descabdellat amb prou autonomia numèrica; d'una altra, que l'obvietat de traduir la proporcionalitat d'Èudox en una proporcionalitat dins dels nombres reals no seria més que la conseqüència d'un perllongat exercici de càlculs amb radicals, que hauria permès més tard la generalitzaciò algèbrica sense esment especial si es tractava d'un nombre (racional) o no. D'aquí que la nova proporcionalitat, en assumir l'anterior d'Èudox, no tant hauria estès la proporcionalitat racional a allò que no es deixa comptar (racionalment), quelcom propi de la segona, com hauria generalitzat per a l'àmbit numèric real els teoremes corresponents. La proporcionalitat de costats i d'hipotenuses (per exemple) no tindria ja el mateix contingut semàntic ni com a generalització, car en un cas es mou dins de l'àmbit dels afers racionals (i de les magnituds), en l'altre dins de l'àmbit dels nombres reals (i, en aquest cas, de les magnituds).

D'altra banda es comprendria potser els titubeigs seculars per a la noció extensa de nombre i per a l'assumpció de la proporció d'Èudox dins d'una proporció generalitzada, certament per la influència decisiva de la concepció grega del nombre, però potser també per la pròpia natura dels radicals, és a dir, pel fet que no hi ha una continuïtat numèrica irracional, sinó que cada radical o cada expressió irracional *seria una estratagema independent d'un altre radical o expressió irracional*, quelcom doncs allunyat d'una qualsevol continuïtat numèrica irracional. En efecte el càlcul dins dels nombres reals no tindria la «intuïtivitat» del càlcul dins dels nombres racionals: fent una metàfora diríem que aquest es descabdella en una direcció horitzontal, l'altre en una que li és transversal.

Això potser suggeriria que la generalització de la proporcionalitat fou una resultant del domini del càlcul (i de problemes), i alhora tingué quelcom d'aventura sempre confirmada; palesaria els dèbits dels progressos del llenguatge matemàtic al seu propi exercici, i a la seva història[9]. És clar que caldria estudiar tot això d'una manera molt més detallada.

[9] Des d'aquest punt de mira els esforços aritmetitzants de l'irracional del segle XIX obeirien també al desig de superar la sensació d'una certa disfuncionalitat dels irracionals respecte dels racionals: els primers «estarien en la mateixa direcció d'aquests».

VII
ADDENDA: LA RAÓ COMPOSTA

L'esmerç de la raó duplicada i, en general, de la raó composta en els *Elements* (prendrem *Eucl*.VI,19 per a la raó duplicada, cf.*Eucl*.VI,23 per a la composta) té un interès històric indubtable i val la pena de dir-ne alguna cosa.

Quan tres magnituds són proporcionals, es diu que la primera té respecte de la tercera la raó duplicada de la que té respecte de la segona (*Eucl*.V.Def.9). Tot encetant el comentari d'aquesta definició Heath ens diu[10]: «*Aquí, i en connexió amb les definicions de raó duplicada, triplicada, etc., seria el lloc escaient d'una definició de "raó composta". Tanmateix no n'hi trobarem cap, i l'única "definició" seva que tenim és la que constitueix VI.Def.5, que és una interpolació feta potser fins i tot després dels temps de Teó. Segons la definició interpolada "una raó es diu composta de raons quan les mesures* (sizes, *πηλικότητες*) *de les raons multiplicades juntes fan una (? raó)". Però la multiplicació de les* mesures *(o magnituds) de dues raons de magnituds incommensurables, i fins i tot commensurables, és una operació desconeguda pels geòmetres grecs clàssics. Eutoci (Archimedis opera omnia, ed.Heiberg, III, p.120) arriba a explicar la definició fent que πηλικότητες significqui el* nombre *pel qual s'anomena la raó donada o, en d'altres paraules, el nombre que multiplicat pel conseqüent de la raó dóna l'antecedent. Però sols és capaç d'elaborar la seva idea en referència a les raons entre nombres, o entre magnituds* commensurables*; i de fet la definició és prou estranya a la teoria de la proporció d'Euclides.*

Hi ha doncs una sola afirmació en el text d'Euclides, tal i com el tenim, que indiqui què significa la raó composta; es troba

[10] Ibíd., II, pàgs.132-133.

a VI.23, on de sobte diu: "Però la raó de K a M es compon de la raó de K *a* L *i de la de* L *a* M*". Simson*[11]*, d'acord amb això, dóna una definició (A del llibre V) de raó composta suggerida directament per l'afirmació en VI.23 acabada de citar.*

"Quan hi ha un nombre de magnituds de la mateixa mena, la primera es diu que té respecte de l'última la raó composta de la raó que la primera té respecte de la segona, i de la raó que la segona té respecte de la tercera, i de la raó que la tercera té respecte de la quarta, etc., fins a l'última magnitud.

Per exemple, si A, B, C, D *són quatre magnituds de la mateixa mena, la primera,* A*, es diu que té respecte de l'última,* D*, la raó composta de la raó de* A *a* B*, de la raó de* B *a* C*, i de la raó de* C *a* D*; o la raó de* A *a* D *es diu que està composta de les raons de* A *a* B*, de* B *a* C*, i de* C *a* D*.*

I si A *té respecte de* B *la mateixa raó que* E *té respecte de* F*; i* B *respecte de* C *la mateixa raó que* G *té respecte de* H*; i* C *respecte de* D *la mateixa que* K *té respecte de* L*; llavors, per aquesta definició,* A *es diu que té respecte de* D *la raó composta de raons que són el mateix que les raons de* E *a* F*, de* G *a* H*, de* K *a* L*: i cal entendre això mateix quan s'expressa d'una manera més breu tot dient que* A *té respecte de* D *la raó composta de les raons de* E *a* F*, de* G *a* H*, i de* K *a* L*.*

De manera semblant, i suposant les mateixes coses, si M *té respecte de* N *la mateixa raó que* A *té respecte de* D*, llavors, per a fer-ho curt,* M *es diu que té respecte de* N *la raó composta de les raons de* E *a* F*, de* G *a* H*, i de* K *a* L*"...*

... És clar que la raó duplicada, la raó triplicada, etc., definides en V.Defs.9 i 10 són merament casos particulars de la raó composta, essent en efecte les raons compostes de dues, tres, etc., raons iguals. L'ús que els geòmetres grecs feren de les raons composta, duplicada, triplicada, etc., està ben il·lustrat pel descobriment d'Hipòcrates que el problema de doblar un cub (o,

---

[11] La referència és a Robert Simson: cf. per exemple, *Cassell's Edition of Euclid. The Elements of Geometry, etc.*, Londres, 1852, pàg.99.

més generalment, la construcció d'un cub que ha d'estar respecte d'un cub donat en una raó donada) es redueix al de trobar "dos mitjans proporcionals en proporció contínua". Això significà veure que, si x, y *són dos mitjans proporcionals en proporció contínua entre dues línies qualssevol* a, b*; en d'altres paraules, si* a *és a* x *com* x *és a* y, *i* x *és a* y *com* y *a* b, *llavors un cub de costat* a *és a un cub de costat* x *com* a *és a* b; *i això és equivalent a dir que* a *té respecte de* b *la raó triplicada de* a *a* x.

Euclides té cura d'usar les formes διπλασίων, τριπλασίων, etc. per a expressar el que traduïm per raó duplicada, triplicada, etc.; tanmateix els matemàtics grecs usaren correntment διπλάσιος λόγος, "raó doble", τριπλάσιος λόγος, "raó triple", etc., en l'accepció de raons de 2 a 1, de 3 a 1, etc. L'intent, si n'hi hagué, de guardar una única forma per a una única significació i l'altra per a l'altra tingué sols un èxit parcial, pel fet que hi ha alguns casos de l'ús contrari, per exemple en Arquímedes, en Nicòmac i en Pappos»

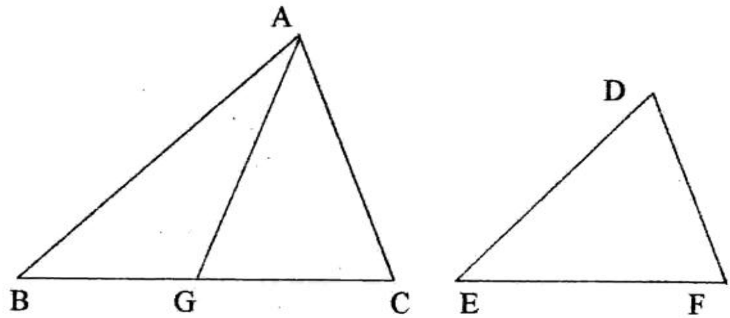
El text il·lustra perfectament allò que és la raó composta. Anem, però, a les aplicacions mateixes d'aquesta raó, i al cas més fàcil, la raó duplicada, tal i com apareix a *Eucl.*VI,19:

«Proposició 19.

La raó entre triangles semblants és la duplicada dels costats correponents.

Siguin ABC, DEF *dos triangles semblants amb l'angle a* B *igual a l'angle a* E, *i tals que, com* AB *és a* BC, *així és* DE *a* EF *(V.Def.11);*

dic que el triangle ABC *té respecte del triangle* DEF *la raó duplicada de la que* BC *té respecte de* EF.



Perquè prenguem un tercer proporcional BG *a* BC, EF, *talment que, com* BC *és a* EF, *així sigui* EF *a* BG *(VI,11); i traci's* AG.

Llavors com AB *és a* BC, *així és* DE *a* EF*;*
per això, alternativament, com AB *és a* DE, *així és* BC *a* EF *(V.16).*

Però com BC *és a* EF, *així és* EF *a* BG*;*
per això també, com AB *és a* DE, *així és* EF *a* BG *(V,11).*

Per això en els triangles ABG, DEF *els costats dels angles iguals són recíprocament proporcionals.*

Però aquells triangles que tenen un angle igual i en què els costats dels angles iguals són recíprocament proporcionals són iguals (VI,15);
per això el triangle ABG *és igual al triangle* DEF.

Ara, des del moment que, com BC *és a* EF, *així* EF *a* BG
i, si tres línies rectes són proporcionals, la primera té respecte de la tercera una raó duplicada de la que té respecte de la segona (V.Def.9),
per això BC *té respecte de* BG *una raó duplicada de la que* BC *té respecte de* EF.

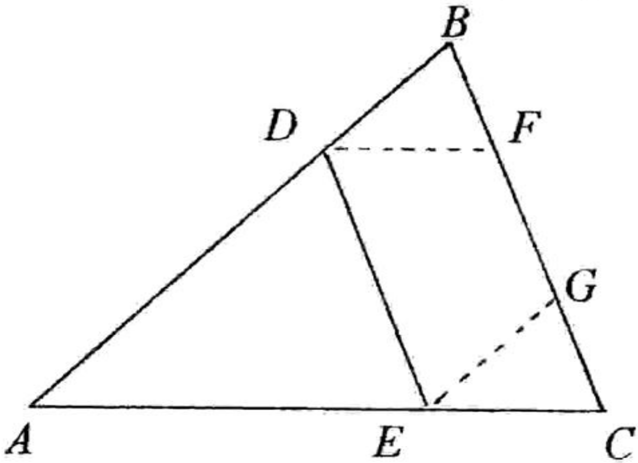
Però, com BC *és a* BG, *així és el triangle* ABC *al triangle* ABG *(VI,1);*
per això el triangle ABC *també té respecte al triangle* ABG *una raó duplicada de la que* BC *té respecte de* EF.

Però el triangle ABG *és igual al triangle* DEF*;*

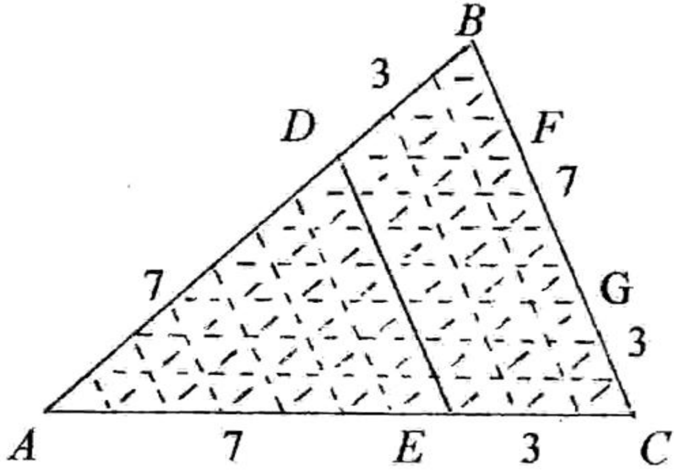
per això el triangle ABC *també té respecte del triangle* DEF *una raó duplicada de la que BC té respecte de EF.*

Per això, etc.

Porisme. De tot això es palesa que, si tres línies rectes són proporcionals, llavors, com la primera és a la tercera, així és la figura descrita sobre la primera a la que és similar i descrita similarment sobre la segona.»



Assumim un triangle *ABC, DE* paral·lel a *BC,* i *DF* i *EG* paral·lels respectivament als altres costats; cerquem parts alíquotes en el segment *AB*, de tal manera que tant *AD* com *DB* en siguin múltiples; fem les paral·leles a *DE* pels punts trobats: llavors tindrem *AC* distribuït en parts alíquotes; tracem paral·leles per aquests punts a *AB*: distribuirem *BC* i *DE* en parts alíquotes; dibuixem (si es vol) les paral.leles a *AC* per aquests punts. Per tant arreu tindrem, per exemple, raons entre 10 unitats concretes d'una classe i 10



d'una altra enfront de raons de 7 unitats concretes d'una classe i 7 de l'altra, etc.

Fixem-nos que podem canviar els nombres dels segments; a més a més hem agafat un triangle qualsevol, per tant hi podria haver un llenguatge generalitzador, etc..

Quan se’ns lliura doncs dos triangles *ABC* i *DEF* (*Eucl*.VI, 19) de costats proporcionals i angles iguals (els triangles són semblants), i hi ha un punt *G* donat en la base *BC* tal que la raó de *BC* a *EF* és proporcional a la de *EF* a *BG*, es tracta, és obvi, d’una expressió generalitzadora de la proporcionalitat dels triangles i de les relacions entre els segments. Projectant el nostre exemple en *Eucl*.VI,19, la raó de *BC* a *EF* era de 10 a 7; llavors la nova raó entre *EF* i *BG* esdevé de 7 a [?]; podem canviar l'ordre d'unitats: som al càlcul numèric, que troba la proporcionalitat entre la raó de 100 i 70, i la de 70 i 49, o qualsevol altra proporcionalitat entre nombres escaients.

Deixem de banda l'afer de la igualtat dels triangles *ABG* i *DEF* a fi de circumscriure'ns a l'estudi de la raó duplicada; s'afirma que, si tres línies rectes són proporcionals, la primera té respecte de la tercera una raó duplicada de la que té respecte de la segona, però en el cas de voler comprendre l'expressió «una raó duplicada de la que té respecte de la segona», la raó duplicada afecta el càlcul numèric; perquè, seguint *Eucl.*VI,19, si la raó de *BC* a *EF* és proporcional a la de *EF* a *BG*, la raó duplicada de la de *BC* a *BG* no hauria de ser duplicada de la de *BC* a *EF*, sinó un altre nom per a la proporcionalitat entre la raó de *BC* a *EF* i la de *EF* a *BG*; però si la raó de 100 a 70 és proporcional a la raó de 70 a 49, tenim:

$$\begin{array}{c} \mathrm{BC} \rightarrow \mathrm{EF} \rightarrow \mathrm{BG} \\ 100 \rightarrow 70 \rightarrow 49, \end{array}$$

hi ha la raó de *BC* a *BG* o entre 100 i 49. *Per què és la raó duplicada només de la raó de* BC *i* EF*?* Simplement perquè hi hauria la multiplicació de raons iguals, no sembla que hi hagi d'altra explicació: això és, una raó (de termes racionals) és una relació de termes un dels quals és un múltiple o submúltiple de l'altre, o els dos múltiples o submúltiples d’una part alíquota, per tant la proporcionalitat estableix el paral·lelisme estructural entre les raons o, expressat a través d'un càlcul numèric on sempre hi ha alguna igualtat, la igualtat del nombre enter o quebrat de vegades que un terme és més gran que un altre. Llavors:

$$BC : EF \;=\; EF : BG$$

però $$(BC : EF)(EF : BG) = (BC : BG),$$

i ens adonem que la raó *BC* : *BG*, com a expressió del nombre enter o quebrat de vegades que BC és BG, esdevé igual a la raó duplicada de *BC : EF*, com a expressió del nombre enter o quebrat de vegades que *BC* és *EF* − o que *BC : BG*, resultant de multiplicar membre a membre les dues raons anteriors, que són iguals, esdevé la raó duplicada d'una d'aquelles.

Segurament les paraules de Heath que es refereixen a la impossibilitat que la teoria de la proporció d'Euclides es basi en la multiplicació dels quocients de les raons que entren en la proporció són del tot vàlides en la mesura que uns tals quocients podrien ser, en les matemàtiques gregues clàssiques, els de la divisió de magnituds incommensurables (a banda que introduirien els nombres fraccionaris fins i tot per a termes commensurables), motius suficients que explicarien la doble referència a les proporcions en els *Elements*. Deixant l'encert d'aquell gran professor de respectar escrupolosament els mètodes clàssics, els nostres propòsits ens obliguen a explicitar el càlcul numèric (els *Elements* pressuposen en part llur domini i hàbit) a pesar fins i tot de qualsevol racionalització grega dels nombres i de les magnituds, i amb la important circumstància que el grec esmentaria amb el nom de magnituds allò que nosaltres esmentaríem amb nombres reals (o fins i tot amb lletres tal i com fa el grec), descabdellaria un estil conseqüent en el cas exemplar que estudia, etc.