F. GRAELL I DENIEL

APUNTS DE L'ÚS FORMAL EN LA DEFINICIÓ DELS DIFERENCIALS I DE LES DERIVADES D'ACORD AMB CAUCHY I WEIERSTRASS

QUADERNS DE FILOSOFIA

24

F. GRAELL I DENIEL

APUNTS DE L'ÚS FORMAL EN LA DEFINICIÓ DELS DIFERENCIALS I DE LES DERIVADES D'ACORD AMB CAUCHY I WEIERSTRASS

24

QUADERNS DE FILOSOFIA

Barcelona 2017

2ª edició: març de 2017 [1ª edició: febrer de 2008]

ISBN: 978-84-935669-3-7

www.xtec.cat/~fgraell
E-mail: fgraell@xtec.cat

La web permet de baixar la còpia d'un qualsevol quadern editat.
Podeu fer ús de l'adreça electrònica per a qualsevol correspondència amb *Quaderns de Filosofia.*

CONTINGUT

Pròleg a la segona edició

El treball ha rebut modificacions, algunes toquen afers secundaris (reblar l'ús impersonal, evitar el terme «lingüístic» o algun mot equívoc, etc.), d'altres refan alguna explicació que semblava poc clara, finalment s'ha corregit algun error manifest. Tanmateix el conjunt manté el seu contingut i insisteix que cal diferenciar entre l'esforç lloable de trobar la millor i més acurada presentació del pensament formal, i l'obligació des d'un altre àmbit d'establir una avaluació de les significacions d'aquells afers i, sobretot, la d'entendre i fer entendre la seva utilitat en els àmbits que no són sols els formals.

Barcelona març 2017

INTRODUCCIÓ

Les definicions bàsiques del càlcul infinitesimal van rebre una empenta decisiva de les obres de Cauchy (i de Bolzano). No hi hauria abans seu res tan rigorós, i que evités les dificultats conceptuals que es derivaren de les nocions infinitesimals, no tant perquè aquestes nocions hi poguessin introduir equivocacions, com pel fet que feien inevitable una ambigüitat que els és consubstancial, i que alhora és allò que precisament transforma el càlcul en una eina magnífica i útil.

Les línies iniciades llavors serà perllongada per d'altres estudiosos, hi destaca amb llum pròpia Weierstrass, en una direcció que menà a una millor aritmetització, a un prou original presentació dels límits, etc. En efecte el treball que es fa en matemàtiques no pot suposar, ni ha de suportar, fer marxa enrera, pel simple motiu que tota alternativa seva es troba cap endavant. Si es vol així: sols hi ha una manera d'entendre el pensament formal matemàtic, que rau a fer-lo i a exercitar-s'hi.

Tanmateix, si l'única legitimació rau aquí en l'exercici de pensar-lo, de fonamentar-lo i de descabdellar-lo, s'esdevé que una tal activitat encara deixa al marge l'avaluació de les relacions entre aquesta activitat i la resta dels afers reals. En particular la cerca de més rigor i, en un cert sentit, simplicitat, en les bases del càlcul, esdevé sempre una conducta autolegitimadora en tant que és per si mateixa que s'assumeix, però no pot rebutjar les reflexions que, al marge seu i de la seva autosuficiència, volen explicitar que se'ls accepta perquè (i seguint els afer bàsics de l'anàlisi) són, en una aparent paradoxa, un final de camí, una resultant, l'exponent d'un comportament que ha demanat moltes hores de treball a partir de l'aprenentatge dels nombres i de les operacions bàsiques fetes des de la infantesa, i a partir del que s'ha anat assimilant dels predecessors.

L’aparent paradoxa es resol quan un mateix s’adona que l’admissió que un final de trajecte és alhora l’inici d’un discurs comporta que aquell final i aquest inici no es mouen en el mateix pla, perquè el primer es descabdella a nivell de l’adquisió d’habilitats formals, el segon a nivell d’un exercici a partir d’un comportament adquirit. Per això aquest domini, mentre es manté mestrívolament en una activitat matemàtica que desenvolupa, no habilita *per se* per a establir les seves relacions amb una qualsevol altra cosa que no sigui la pròpia conducta.

Per tant hi ha l’obligació de proporcionar quelcom que faci de pont entre un saber adquirit i reeixit amb la resta dels afers, inclosos els d’altres possibles usos formals, etc., i de dur a la llum tot allò que es trobi rellevant en aquest ordre de les coses. La vida és plena d’interrogants, i la sorprenent activitat que es desplega en el càlcul n’ofereix alguns. Fet i fet hi ha aquí una tasca que compromet tota la filosofia de la matemàtica: basti circumscriure’s ara a algunes notes esparses, a propòsit de la derivada i del diferencial en Cauchy i en Weierstrass, que de cap manera no poden ser eshaustives[1].

---

[1] L’ús de formalitats en la base de l’anàlisi palesa un llarg aprenentatge que remunta fins al primers anys de la vida d’un individu: sols s’assumeix de debò aquell ús a partir del que s’ha anat aprenent des de l’experiència numèrica, en conjunt, de les disciplines matemàtiques. La negació de tot això suposaria recaure en alguna mena d’apriorisme epistemològic, i llavors no hi hauria més remei que posar-ho al descobert fent veure que suposa sempre molts afers que implícitament assumeix, que són en efecte resultants.

La circumstància que es gaudeix de quelcom adquirit sembla fer sempre possible una revisió dels fonaments de l’aritmètica i del càlcul en l’accepció que un hom no pot dir mai que hagi arribat a una presentació seva definitiva. La qual cosa s’esdevé perquè aquí tot és un resultant de moltes experiències, hi ha molts fils conductors possibles des del mateix ús assumit, és gairebé sempre possible que algú altre trobi aquí i allà passes que es creuen no fonamentades sense moure’s d’aquest nivell formal. Tot això ocorre perquè un hom es troba en un nivell formal-general, i que assumeix les aportacions del càlcul no tant per les seves discussions sobre principis elementals, teoremes bàsics, etc., com en conjunt pel cos de problemes i de teoremes que

I

SOBRE LA FUNCIÓ CONTÍNUA D'ACORD AMB CAUCHY

Havent de lliurar alguna consideració de les derivades i dels diferencials en Cauchy sembla convenient de deturar-se en la seva formulació de continuïtat d'una funció; la continuïtat de les magnituds en el càlcul estava ja pressuposada implícitament, si no explícitament, en els autors anteriors: Newton parlà d'un moviment continu, Leibniz feia ús del postulat de continuïtat, etc., a partir de la segona meitat del divuit hauríem de fer esment com a mínim dels treballs d'Euler i de les conseqüències dels estudis a propòsit de la vibració de cordes, de les aportacions d'Arbogast, de Lacroix, etc. Però Cauchy n'oferí una formulació prou rigorosa.

Per a col·locar-nos a començaments del XIX són vàlids els mots de Judith V.Grabiner[2] quan diu que «les primeres discussions del segle XVIII sobre les propietats de les funcions contínues es confinen a les funcions de bon comportament [*well-behaved*]. Del concepte de continuïtat, no se'n feia ús per a distingir entre funcions contínues i discontínues més que quan era necessari algun «obvi» fet de les funcions contínues. Per exemple, la propietat de ser continu s'usà en geometria per a mostrar que una corba que té un punt a cada costat d'una línia ha d'intersecar-se amb aquesta línia. En àlgebra els polinomis es prenien com a funcions contínues, de tal manera que el fet de trobar límits a l'arrel d'un polinomi podria prendre's que implicava l'existència d'aquella arrel. Fou el reconeixement que això era una assumpció el que portà fet i fet Lagrange a tractar de provar la propietat del valor intermedi. En el procés d'aquesta prova Lagrange necessità lliurar una descripció de continuïtat per a polinomis amb termes positius, i ho feu de la següent manera. Si P i Q són polinomis amb termes positius, definits entre $x = p$ i $x = q$, digué: "és evident que aquestes quantitats creixen necessàriament

---

ha lliurat, i per l'eficàcia que ha tingut en els camps on se l'ha usat, palesant pel seu cantó que es una resultant d'una llarga experiència matemàtica.

[2] *The origens of Cauchy's rigourous calculus*, The Massachusetts Institut of Technology, 1981, pàgs.88-89, cf. pàgs. 87-97.

segons com creix x, i, si x creix per tots els graus imperceptibles des de p fins a q, els primers [P i Q] creixen també per graus imperceptibles". Això, malgrat limitat a polinomis, fou la primera aproximació a la propietat que Bolzano i Cauchy fet i fet havien d'usar per a definir la continuïtat.

Els termes *continuïtat* i *llei de continuïtat* s'usaren doncs en un sentit totalment diferent en les discussions dels límits i de les derivades. La continuïtat es prenia de vegades per a significar que, si cada element d'una seqüència donada tenia una propietat, també la tenia el límit de la seqüència. Un argument d'aquest tipus proveí una mena de prova ontològica de l'existència de les derivades. És en virtut de la "llei de la continuïtat", escrigué Lacroix, "que els increments, malgrat ser evanescents, preserven encara la raó a la qual s'han apropat gradualment abans de desaparèixer". Així la continuïtat semblava estar relacionada d'alguna manera amb la diferenciabilitat.

Fins a mitjans del segle divuit no semblà que hi hagués cap problema real a definir la continuïtat: aquesta retenia un caràcter geomètric. Però ni la intuïció geomètrica ni l'exemple dels polinomis era suficient per a desentortolligar el que ara veiem com la propietat essencial de la funció contínua, de la resta de les descripcions existents, com sigui que les corbes uniformes [*smooth*] i els polinomis gaudeixen de totes les propietats que hem enumerat. I fet i fet definir la continuïtat esdevingué un problema urgent». En efecte el debat sobre la vibració de cordes on intervingueren matemàtics de la talla d'Euler, d'Alembert, Daniel Bernoulli i Lagrange, esperonà l'estudi de les propietats de la funció contínua i del propi concepte de funció.

El nostre autor defineix la funció contínua a partir dels augments infinitament petits de la següent manera:

«Sigui $f(x)$ una funció de la variable x, i suposem que, per a cada valor de x intermedi entre dos límits donats, aquesta funció admeti constantment un valor únic i finit. Si, partint d'un valor de x comprès entre aquests límits, s'atribueix a la variable x un creixement infinitament petit α, la funció mateixa rebrà com a creixement la diferència

$$f(x+\alpha)-f(x),$$

que dependrà alhora de la nova variable α i del valor de x. Això establert, la funció $f(x)$ serà, entre els dos límits assignats a la variable x, funció *contínua* d'aquesta variable si, per a cada valor de x intermedi entre aquests límits, el valor numèric de la diferència

$$f(x + \alpha) - f(x)$$

decreix indefinidament amb el de α. En d'altres termes: *la funció* f(x) *restarà contínua en relació a* x *entre els límits donats, si, entre aquesta límits, un creixement infinitament petit de la variable produeix sempre un creixement infinitament petit de la funció mateixa.*

A més a més es diu que la funció *f(x)* és, en el veïnatge d'un valor particular atribuït a la variable *x*, funció contínua d'aquesta variable, totes les vegades que és contínua entre dos límit de *x*, fins i tot molt propers, que inclouen el valor del qual es tracta.

Finalment, quan una funció *f(x)* deixa de ser contínua en el veïnatge d'un valor particular de la variable *x*, es diu llavors que esdeve *discontínua* i que hi ha per a aquest valor particular *solució de continuïtat*»[3]

La continuïtat de valors de la funció té en compte afers numèrics infinitesimals que afecten l'àmbit circumscrit de la variable independent entre els límits assenyalats i els valors corresponents de la funció, formulació que, gràcies al propi tarannà del llenguate d'infinitèsims, permet de salvar definitòriament la continuïtat de funcions del tipus de y = sin x entre els valors de x = 10º i x = 200º, per exemple, mentre que l'accent en els valors numèrics del decreixement de la funció i de la variable independent bandeja llur diferència de signes. En d'altres paraules: és una definició prou hàbil gràcies al fet que es duu als infinitèsims quelcom que s'ha après en les quantitats no infitesimals (però que és difícil de definir), i que es fa extensible a tot l'àmbit circumscrit dels valors de x: d'aquí que esdevingui eficaç tant per a un infinitèsim com per a l'àmbit esmentat.

Unes tals definicions de la continuïtat d'una funció volen doncs circumscriure aquells àmbits d'una funció on (1) hi ha un únic valor de la funció per a cada valor de la variable independent; on (2) els valors de la funció, creixin o decreixin,

[3] Augustin Cauchy, *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique (Analyse algébrique)*[1821], *Oeuvres complètes*, II sèrie, tom III, París, 1897, pàg.43.

van passant en un ordre per tots els valors intermedis mentre els valors de la variable independent, creixin o decreixin, també van passant en un ordre per tots els seus valors intermedis; on, per consegüent, (3) es considera que un valor intermedi infinit per a una funció trenca la continuïtat; on (4) els altres valors extrems infinits de la funció serien així mateix desconsiderats en la definició de continuïtat precisament per la dificultat conceptual d'un valor infinit; i on (5) el valor zero de la variable dependent no comporta solució de continuïtat: la funció va obtenint valors intermedis per a passar d'un valor a un altre, de $+\beta$ a $-\beta$.

II

SOBRE LA DERIVADA I ELS DIFERENCIALS D'ACORD AMB CAUCHY

1. Seguint l'autor es defineix la funció derivada de la següent manera[4]:

«Quan la funció $y = f(x)$ es manté contínua entre dos limits donats de la variable x, i s'assigna a aquesta variable un valor comprès entre els dos límits en qüestió, aleshores un creixement infinitament petit, atribuït a la variable, produeix un creixement infinitament petit de la mateixa funció. Per conseqüent, si es posa llavors $\Delta x = i$, els dos termes de la *relació en les diferències*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

seran quantitats infinitament petites. Però, mentre que aquests dos termes s'aproximen indefinidament i simultàniament al límit zero, la relació mateixa podria convergir cap a un altre límit, sigui positiu o negatiu. Aquest límit, quan existeix, té un valor determinat per a cada valor particular de x; però varia amb x. Així, per exemple, si es pren $f(x) = x^m$, m designant un nombre enter, la relació entre les diferències infinitament petites serà

$$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} i + ... + i^{m-1}$$

i tindrà per límit la quantitat mx^{m-1}, és a dir, una funció nova de la variable x. En general serà sempre el mateix: la forma de la funció nova que servirà de límit a la relació $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ dependrà sols de la forma de la funció proposada. Per a indicar

---

[4] *Résumé des leçons données a l'École Royale Polytechnique, sur le Calcul infinitésimal* [1823], *Oeuvres,* IIª sèrie, tom IV, París, 1899, pàgs. 22-23.

aquesta dependència es dóna a la funció nova el nom de *funció derivada,* i se la designa, amb l'ajuda d'un accent, per la notació

y' o *f'(x)*».

Pel cap baix, segons Cauchy[5], hi ha la necessitat de delimitar la funció contínua respecte de la discontínua: en el cas que *f(x)* no anés recorrent tots els valors intermedis seria difícil de parlar d'estrènyer els increments a infinitèsims, i de dur-los al límit, pel simple motiu que es podria estimar que hi ha valors intermedis que no es donen; alhora quan el valor de *f(x)* fos infinit, l'expressió *f(x + i)* o *f(x – i)* no podria usar-se en cap altra accepció, és a dir, no hi hauria una resultant òbvia en la relació de diferències.

2. S'acostuma a accentuar, a propòsit de la definició de la derivada de Cauchy, que aquí ja no s'interpreta com la raó entre *dy* i *dx*, o com el quocient entre zero i zero, sinó com una funció; per dir-ho així, no s'hi emfatitzaria el límit de cada increment (que és zero), sinó el límit de la relació dels increments (que, quan existeix, no cal que sigui zero)[6].

3. Això es corrobora amb la presentació que féu el nostre autor del diferencial d'una funció, afer que es troba en connexió

---

[5] Hi ha d'haver funció contínua perquè s'hi trobi derivació, però Weierstrass, per exemple, féu notar que – contra el que diu el text – no tota funció contínua és derivable. Una lectura d'aquest fet podria portar a fer veure que les definicions que es fa en matemàtiques, que contenen forçosament diferents nivells de generalitzacions, d'estratègies, de simplificacions, etc., que esdevenen al capdavall uns afers d'intel·ligència formal, no esdevenen entitats exemptes de crítica, de superació, de provisionalitat, etc. Un hom ignora tot allò que va més enllà de l'abast finit que té una qualsevol formulació, i mai no és impossible que brolli el cas que no es podia preveure, quan un mateix se circumscriu a totes les induccions a partir d'una experiència amb un ús formal.

[6] És una opinió àmpliament compartida per tots aquells que s'ocupen dels fonaments, i pels historiadors de la matemàtica: el mateix excel·lent treball de C.B.Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover, Nova York, 1959, té constantment un tal supòsit; cf., per exemple, pàgs. 1-13.

amb l'accent de la derivada com una funció a tall de límit d'una relació (més que com a relació entre dos límits). Se'ns diu[7]:

«Sigui sempre $y = f(x)$ una funció de la variable independent x; i una quantitat infinitament petitat, i h una quantitat finita. Si es posa $i = \alpha h$, α serà encara una quantitat infinitament petita, i es tindrà idènticament

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}=\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha h}$$

d'on es conclourà

$$\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}h\ . \qquad (1)$$

El límit cap al qual convergeix el primer membre de l'equació (1), mentre la variable α s'aproxima indefinidament a zero, la quantitat h romanent constant, és el que s'anomena el *diferencial* de la funció $y = f(x)$. S'indica aquest diferencial per la característica d, de manera que tenim

$$dy \text{ o } df(x).$$

És fàcil d'obtenir el seu valor quan es coneix el de la funció derivada y' o $f'(x)$. En efecte, en prendre els límits dels dos membres de l'equació (1), generalment es trobarà

$$df(x) = hf'(x)\ . \qquad (2)$$

En el cas particular en què $f(x) = x$, l'equació (2) es redueix a

$$dx = h. \qquad (3)$$

Així el diferencial de la variable independent x no és res més que la constant finita h. Això establert, l'equació (2) esdevindrà

$$df(x) = f'(x)dx \qquad (4)$$

o, el que torna a ser el mateix

$$dy = y'dx \qquad (5).$$

D'aquests darrers resulta que la derivada $y' = f'(x)$ d'una funció qualsevol $y = f(x)$ és precisament igual a $\frac{dy}{dx}$, és a dir, a la relació entre el diferencial de la funció i el de la variable o, si es vol, al coeficient pel qual cal multiplicar el segon diferencial per

[7] A.Cauchy, *op.cit.*, pàgs.27-28.

a obtenir el primer. És per aquesta raó que es dóna de vegades a la funció derivada el nom de *coeficient diferencial*.

Diferenciar una funció és trobar el seu diferencial. L'operació per la qual es diferencia s'anomena diferenciació».

Certament des d'un punt de mira analític es tracta d'un mestratge que extreu perfectament la relació entre diferencials (*dy/dx*) des de la derivada a partir de la descomposició de l'expressió algèbrica que hi duu; i pel fet que hom dóna un valor constant arbitrari a *dx* (que pot ser també infinitesimal[8]).

[8] Cf. ídem, pàgs. 288-289.

III

DE L’ÚS FORMAL EN DERIVADES I DIFERENCIALS D’ACORD AMB CAUCHY

1. La formulació de Cauchy havia de rebre noves precisions internes en la direcció de millorar encara més les definicions bàsiques del càlcul. Convida, tanmateix, a algunes notes des del punt de mira del mateix pensament formal.

Per exemple, no semblaria descabdellat que un hom raonés així a propòsit de Cauchy: la distinció entre un quocient d’increments que tendissin a zero (tenen zero per límit) i el límit d’una relació d’increments es podria deure al punt de vista que s’agafés en

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}; \qquad (1)$$

car, mantenint-se la igualtat, el quocient d’increments tendiria a un límit per les operacions i simplificacions que haurien estat possibles en la relació d’increments; unes tals operacions i simplificacions serien les d’una relació d’increments, per tant mantintrien sempre un tal origen operacional. És a dir, el quocient entre els dos límits dels increment esdevindria el límit d’una expressió algèbrica per l’operació entre increments abans de dur-los al límit, per tant per la seva relació. No tindria massa importància l’accent en la derivada com la funció resultant del límit d’un quocient quan una tal funció fóra alhora la de la relació entre els límits dels increments. En poques paraules: el límit d’un quocient seria el quocient de límits, malgrat que en el primer cas s’hagués arribat a una expressió determinada, en el segon a una d’indeterminada si se la mantigués separada de l’altra; però seria precisament la igualtat de (1) la que determinaria d’una banda el quocient del límits d’increments del terme de l’esquerra des del límit de la resultant de les operacions que es fa en el de la dreta, i la que faria significatiu aquest límit perquè se sabria què es fa pel terme de l'esquerra. D'altra banda hom podria tenir com a indeterminat el quocient entre els límits dels increments quan el prengués de manera independent i separada del límit de la resultant d'operar amb les expressions descabdellades algèbricament.

2. Des de la presentació que fa el text semblaria si més no que la troballa dels diferencials fos quelcom casual: perquè les descomposicions d'una expressió poden ser sovint nombroses. Certament la relació de diferencials equival a una relació entre quantitats finites (ja ho digué Leibniz), però es podria defensar que, ni històricament ni en el progrés analític, hom no ha tingut en conjunt el diferencial com una magnitud finita. L'aproximació al diferencial feta per Cauchy seria doncs més aviat enigmàtica si no fos per la importància que tingué el diferencial (i els infinitament petits) en la història i en els orígens del càlcul, i per la significació pragmàtica que tingué i té actualment.

La presentació elusiva de Cauchy evita el quocient entre quantitats que tendeixen a zero, i es procura de no entendre des d'aquí els diferencials; els dos fets provenen dels dubtes i de les reticències que aparegueren des de la fundació del càlcul sobre la natura de les quantitats indefinidament petites, i caldrà tenir present – s'indicarà tot seguit – que els diferencials poden tenir un tal caràcter que els exposa per això mateix a la crítica[9].

3. L'encert de la posició de Cauchy no lleva el fet de dur ara les consideracions a fer notar que, si més no com a estudi dels

[9] És prou sabut que també Bolzano (*Paradoxien des Unendlichen* § 37) insistí que cal explicar els elements del càlcul en termes de límits de raons de diferències finites. Defineix la derivada a la manera que ho farà Cauchy, ens diu que $\frac{dy}{dx}$ no s'ha d'interpretar com una raó entre *dy* i *dx*, o com el quocient de zero dividid per zero, sinó més aviat com un símbol per a una simple funció, etc..

usos formals, es pot establir[10] que un qualsevol límit numèric sembla la passa resultant d'estimar el que val un infinitèsim: quan es diu que el límit d'una quantitat és zero hi hauria l'admissió de la insignificança de quelcom que pot esdevenir tant petit com es vulgui; quan el límit és una quantitat finita es faria a partir dels límits propis, etc.

Mirem-ho de bell nou, i ara per a $f(x) = x^m$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} i + ... + i^{m-1}$$

on, essent la funció continua, quan Δx tendeix a zero també hi tendeix Δy, i on la manipulació de $\Delta x/\Delta y$ en la seva expressió algèbrica permet eliminar el divisor: sens dubte és una sort que es pugui expressar $\Delta x/\Delta y$ a través d'un polinomi, però una tal resultant és la coneqüència d'una relació d'increments. El límit doncs del polinomi de la dreta de la igualtat és el quocient del límit dels increments que hi ha a l'esquerra de la igualtat, però en aquest últim cas sols pot significar que tant Δy com Δx tendeixen a zero; en efecte en

$$\frac{0}{0} == mx^{m-1}$$

hi ha a la dreta una formulació que ja no expressa unes quantitats infinitesimals que es fan tant petites com es vulgui; però en els increment Δy, Δx hi ha així mateix un simbolisme respecte a quantitats tan petites com es vulgui.

Convé no oblidar que les diverses expressions

$$\frac{0}{0} = mx^{m-1} + 0 + ... + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} dx + ... + dx^{m-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} + 0 + ... + 0$$

[10] Cf. *Sobre l'ús lingüístic en els límits d'acord amb l'obra de Cauchy*, Quaderns de filosofia 18.

$$\frac{0}{0} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}dx + ... + dx^{m-1},$$

els diferencials considerats com a infinitèsims, tindrien totes els mateixos drets, malgrat que els uns termes s'expressen per mitjà dels límits de quantitats infinitesimals, els altres per mitjà de quantitats infinitesimals.

La circumstància de poder dur al límit una quantitat infinitesimal palesa, tant pel cantó de la derivada com a límit d'una relació, com pel cantó dels increments Δy, Δx presos d'un a un, la indiferència d'una expressió amb fórmules de diferencials (o d'infinitèsims, en conjunt) o amb el simbolisme del zero, altrament el pas al límit seria impossible; d'aquí que val la pena de notar curosament que l'ús de les quantitats indefinidament petites (els infinitèsims) en lloc del quocient 0/0 representa sols un pas enrere de la formulació dels seus límits, és a dir, és un pas enrere d'una tal formulació del primer membre de la igualtat, no pas en l'expressió algèbrica de la derivada, però alhora *una tal reformulació no té cap rellevància algèbrica en l'accepció que es tracta de quantitats indefinidament petites, més petites que qualsevol quantitat pensable (i que per això difereixen sols de l'ús de zero pel que representen per si mateixes)*; en d'altres paraules: l'ús dels zeros respectius o dels diferencials és, en l'expressió formal, un afer estètic en l'accepció que la relació de diferencials és la d'entre quantitats més petites que unes qualssevol pensables, cosa que permetia de considerar l'afer des de la relació dels seus límits. I una cosa semblant caldria afegir per a l'expressió de la derivada com a límit d'una relació.

És fàcil de veure així mateix que la relació de diferencials pot ser concebuda sense cap problema (mentre hi hagi una funció derivada) com la que hi ha entre *dues quantitats finites*, i retrotreure des d'aquí la definició dels diferencials de Cauchy, dalt transcrita.

Cal admetre que la facultat d'estimar més útil l'elecció dels infinitèsims o la dels seus límits (zero) és allò que fa poderós i útil el càlcul, malgrat que pugui semblar arbitrària a una primera mirada: però de fet hom pot considerar arreu un ús d'infinitèsims o arreu un ús dels seus límit, i en qualsevol cas hi hauria una indistinció de resultants quan es tingués en compte què és un infinitèsim (encara que sí que hi podria haver un allargament indefinit de les formalitats en alguns casos). En efecte semblaria més aviat que es prendria els seus límits o se'ls mantindria, per exemple, conforme si els infinitèsims que apareixen en l'expressió fossin d'ordre $n + 1$ respecte d'altres d'ordre n (cf. Cauchy, *Cours d'Analyse*, pàgs. 37-42); o conforme si fossin un divisor que fes quocients infinits o no; o, per esmentar un altre exemple, conforme si llur anul·lació comportés que s'esvaís les quantitats que interessa conservar, amb significació geomètrica/física o no, quan es fes les operacions, etc. La regla general faria: quan una expressió es lliura independentment de la sort de l'infinitèsim en principi se l'anul·laria, aquest; si la fes esvair, i en el cas de voler conservar el problema, seria indiferent que s'usés una escriptura de zeros sense operar, però llavors es deixa més aviat els infinitèsims tal qual per motius, si es vol, estètics. Per això es diu en conjunt que s'anul·laria els infinitèsims (se'ls portaria al límit) o se'ls mantindria segons com afectés la decisió ja al càlcul formal o a l'estudi algebricogeomètric (o físic) que es tingués a les mans. I en un sentit invers s'afegiria un infinitèsim (o se'l mantindria si se'l pogués bandejar sense problemes) a l'estudi (per a demostrar un teorema, per exemple) quan aquest afegitó no alterés les dades fins llavors establertes.

En el cas de la derivada l'escriptura $0/0 = y'$ en seria una perfecta expressió, com ho seria $0 = y'.0$, que operat faria $0 = 0$, amb la qual cosa desapareixeria el treball que es té a les mans: l'ús de $0 = y'.0$ fóra prou plausible, però es conserva els diferencials àdhuc en un mer càlcul formal, i sobretot quan el càlcul està animat de significacions geomètriques o físiques que no es vol pas que s'esfumin.

En conjunt tots els límit, deixant els geomètrics, no són més que la resultant d'anul·lar infinitèsims pels propis interessos del càlcul.

Si es vol, es pot parlar que hi ha un «error» en el fet d'usar el límit d'una quantitat infinitesimal en lloc d'aquesta, però sols quan s'atén també que hi ha el rigor i l'exactitud demanades, és a dir, *que hi ha el rigor i l'exactitud que es vulgui postular*, on l'afegit «tot» (el rigor) i «tota» (l'exactitud) no comprometria gairebé res més, sinó que hi afegiria un tal element emfàtic[11].

[11] Mentre alguns estudiosos tendeixen a obviar el caràcter indefinidament aproximatiu de tot límit, també hi ha l'exemple històric d'altres estudiosos que han burxat en un tal «negligible» per a accentuar-hi precisament el caràcter d'error, això és, de falta de rigor i d'exactitud. Per tal de citar-ne

En la història del càlcul, s'hi observa un cert cartesianisme: la sobrevaloració de l'exactitud (quelcom comportamental) o fa negar simplement que un qualsevol límit comporti un «error» tant petit com un hom vulgui postular, o ha estat històricament capaç de burxar un tal fet per a admetre'l com a error (sense cometes) que atempta contra l'exactitud matemàtica. Però el caràcter peculiar dels infinitèsims i la circumstància d'esdevenir resultants d'una conducta formal i algèbrica apresa poden fer precisament que es palesin amb una certa opacitat quan hom els vol considerar d'una manera clara i distinta: repeteixi's que el mèrit de l'infinitèsim rau en aquesta faceta seva, que pot permetre dur-lo al límit o de conservar-lo tal qual sense alterar les igualtats algèbriques; com a quelcom doncs que pot simplement bandejar-se, o que pot gaudir d'una significació (geomètrica, física o simplement formal).

5. És prou sabut que la funció contínua derivable pot ser la que expressa les propietats algèbriques d'una línia en un sistema de coordenades cartesianes.

Hi hauria en efecte una correspondència entre el límit algèbric i el geomètric: perquè el mateix manteniment de l'expressió diferencial, la circumstància que els diferencials són d'una manera tal que es pot usar els seus límits en lloc seu, es complementa amb la possibilitat d'interpretar la relació entre els increments de variable i de funció entre dos punts de la corba com la tangent trigonomètrica de la línia recta secant que els uneix, i llavors

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

pot ser tingut com la relació entre els increments de variable i de funció entre dos punts de l'esmentada corba que es troben a una distància infinitament petita, o considerar que ja han coincidit en un punt (per on pot passar una línia tangent a la corba, d'acord amb els *Elements*, cf.*Eucl*. III, Def.2), com sigui que s'hi pensi una aproximació tan propera com es vulgui. Si es vol: el

---

algun, això es pot veure en el voluntariós llibre de Lazare Carnot *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* [1797], Blanchard, París, 1970, cf.pags.24-25. D'altra banda Carnot cregué d'una manera enginyosa (però versemblantment poc encertada) en l'exactitud del càlcul infinitesimal per una compensació d'errors (cf. *ídem*, pàgs. 10-12; 28-29; etc.); avaluà les quantitats que s'esvaeixen (nul·les) d'Euler com a estris escaients, sense el que l'autor esmentaria com a error (sense cometes), i afegí que la relació 0/0 es trobava especificada d'acord amb les dades del problema, malgrat que preferís un mètode d'infinitèsims (amb errors – sense comentes – compensats) (cf. *ídem*, pàgs. 113-119).

decreixement indefinit de la variació de l'argument i de la de la funció provoca el de l'arc de la corba; la secant que passa pels extrems que delimiten la corba es va doncs apropant al punt d'una línia tangent a la corba: el propi arc que va resultant pot tenir-se o com un arc indefinidament petit, o com un nul en el límit, i la secant pot avaluar-se així mateix o indefinidament petita, o inexistent (els punts es confonen). Hom pot parlar doncs d'una confusió de l'arc i de la secant (sols són un punt en el límit) o mantenir-los com a magnituds indefinidament petites (es mantenen doncs com a línies), i en els dos casos la tangent trigonomètrica es concep a partir dels increments entre dos punts infinitament propers de la corba o que permeten concebre'ls com confosos l'un amb l'altre. En poques paraules: el caràcter dels diferencials i de les magnituds indefinidament petites per les qual es pot prendre els seus límits en lloc seu es retroba arreu[12].

La funció derivada lliura la tangent trigonomètrica de l'angle que formen la tangent a la corba pel punt (x,y) i l'eix de les abcisses. Allò infinitesimal ha permès de prendre el seu límit en lloc seu, tant a nivell algèbric com geomètric.

6. Definida la velocitat d'un moviment com la relació entre l'espai i el temps, una tal relació lliurarà en el cas d'un moviment irregular la velocitat mitjana, és a dir, aquella que seguiria constantment un mòbil que recorregués espais iguals en temps iguals. Llavors es pot pensar si més no que, a mesura

---

[12] Hom sols podria parlar de l'existència d'una paradoxa en afers d'aquest caire (cf., per exemple, Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen* §§45ss) – un arc constaria de segments infinitesimals *rectes*, etc. – quan pren literalment una manera de parlar còmoda, i quan alhora interpreta unilateralment els límits; és a dir, un hom mantenint tant un llenguatge infinitesimal com el seu límit (i n'hi ha per la pròpia significació de l'infinitèsim en tant que quantitat), hom conserva la significació geomètrica (o física), diversa en els diversos diferencials, mentre deixa al marge les concepcions que envolten el límit, el justifiquen, i fan possible precisament aquella plural significació dels diferencials.

D'altra banda la defensa que la tangent a una corba hagi de definir-se per la derivada, i sols per la derivada, per tal d'evitar precisament si la tangent toca la corba per un punt o per més d'un, i remetre a preconcepcions intuïtives l'origen de la noció de tangent, no impedeix que, si sembla impossible de negar que la determinació de la tangent a partir de la derivada (quan n'hi ha) com a tangent trigonomètrica, la relació entre preconcepcions i la nova definició s'ofereix ben bé com un afer a resoldre en un estudi *ad hoc*; i si més no se sap que no hi hauria versemblantment res aquí (com en altres llocs del treball matemàtic) que no fos l'aplicació d'una resultant.

que s'estableix la relació espai/temps per a parts de trajectes més i més curts, hom s'anirà apropant a una velocitat mitjana d'aquesta part que reflectirà el seu estat del moviment, sobretot comparant-lo amb la respectiva velocitat mitjana trobada en d'altres parts. Seguint un tal fil argumentatiu es conclouria que el diagrama de les velocitats mitjanes de les successives parts d'un moviment irregular el reflectirà tant millor com més petites siguin les parts elementals de trajectes.

De fet es parla de «velocitat instantània». En una accepció es fa per la relació entre l'espai infinitesimal i el temps infinitesimal, no pas perquè pugui ser mai res més que una velocitat mitjana, sinó perquè es pot pensar uns tals espais i temps elementals més petits respectivament que una qualsevol quantitat petita pensable, i que l'aproximació a la velocitat a través de diferencials reflectiria millor els vaivens del moviment que qualsevol altra aproximació possible. Quan s'escriu doncs $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = v$, es pensa en un increment de temps indefinidament petit (tant que permet l'ús de zero, el seu límit) i es pensa en un increment d'espai indefinidament petit (ídem): aquí convé de mantenir l'esment de diferencials precisament per a fer palès que interessen com a relació d'espai i de temps (que defineix la velocitat), i fet i fet allò que s'ha estat fent és pensar sempre en quantitats, i ho és allò més petit que una qualsevol quantitat pensable (i per això pràcticament intercanviable amb zero, el seu límit); *la velocitat instantània és la velocitat mitjana d'infinitèsims de l'espai i del temps.*

En una altra accepció la velocitat instantània podria estimar-se com una mera referència abstracta en el no-res de l'espai i del temps com a variant de prendre els infinitèsims pels seus límits. Però això es deuria al fet que, pel cantó de l'expressió algèbrica de la derivada, establert, per exemple, que en un moviment $e = kt^2$, s'acompleix que $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = 2kt$, que es concep des d'una relació per la qual s'estima que $2kt$ és una velocitat; és a dir, es deuria a la circumstància que es fa esvair del tot els infinitesimals pel cantó de l'expressió algèbrica de la derivada.

Ocorre que hi ha un traspàs del tot legítim de consideracions infinitesimals als seus límits, i d'aquests als infinitèsims que palesa una vegada més el caràcter bicèfal d'aquests asumptes sense que es llevi ni poc ni molt ni una engruna de rigor i d'exactitud.

Allò impensable fóra tenir la velocitat instantània com l'increment d'espai per unitat de temps perquè aquí tant la magnitud de l'espai com la del temps s'han fet prou singulars: no hi ha una «unitat» de temps perquè se la fa minvar d'una manera reiterada; $2kt$ és el valor d'una relació de diferencials, gaudeix d'una significació de velocitat mitjana, però com a expressió algèbrica no té cap altra significació ni pot acollir més especificacions que un genèric «relació d'espai infinitesimal amb temps infinitesimal». Per tant *la velocitat mitjana que sols pot definir-se com el límit de la relació entre increments d'espai i de temps quan el temps decreix indefinidament.*

La velocitat instantània es concep doncs com una velocitat que no remet a cap raó no infinitesimal d'increment d'espai per unitat de temps, i el manteniment de les magnituds bàsiques en física (i d'acord amb les atribuïdes als increments) es fa com a indicació de les magnituds de què es tracta (espai/temps), sense possible equivalència numèrica amb una velocitat mitjana en la unitat de temps presa.

D'aquí que – exemplificant tot això en un mestre – si, a la manera de Newton, s'establís la velocitat com l'augment instantani d'espai, un tal fet no llevaria que se la pensés en qualsevol cas en termes de creixement de magnitud (en l'instant, un infinitèsim o zero, en el transcurs homogeni del temps), que, explicitat, no podria dur a res més que a una concepció en termes de velocitat mitjana. No és estrany doncs que, en l'article sobre fluxions de l'*Encyclopedia Britannica* del 1771, s'hi pugui llegir: «*The fluxion of any magnitude at any given point is the increment that it would receive in any given time, supposing it to increase uniformly from that point; and as the measure will be the same, whatever the time be, we are at liberty to suppose it less than any assigned time*»[13]

Les exemplificacions podrien multiplar-se: allò rellevant rau en el fet que les nocions poden anar guiades per allò en què se les vol usar.

[13] Citat per Boyer, *op.cit.*, pàg.232.

IV

DE L'ÚS FORMAL EN LES BASES DE L'ANÀLISI D'ACORD AMB WEIERSTRASS

Aquestes reflexions a propòsit de la definició de la derivada i de la del diferencial en Cauchy haurien de perllongar-se amb les de l'estudi de molts altres autors, però hi ha prou motius per a fer un especial esment del projecte de Karl Weierstrass, i la seva recerca dels fonaments de l'anàlisi. Certament hi ha la dificultat que mai no va publicar les nocions bàsiques de l'anàlisi, i cal anar als treballs dels seus alumnes dels cursos que en va impartir a Berlín des del 1861 al 1886. El fet de no voler publicar el seu curs introductori a la teoria de les funcions analítiques, que contenia els fonaments del càlcul, sembla reflectir si més no el perfeccionisme de Weierstrass.

L'autor comença a estudiar els fonaments del càlcul en el curs d'hivern 1859-1860, impartit a la Universitat de Berlín, d'on era professor des de pocs anys abans; el repetí el semestre d'estiu 1860 i el de 1861 (d'on és el material de l'escrit de Schwarz), i l'interès en la revisió de les bases de l'anàlisi arribà fins al darrer curs que féu, l'any 1886.

Els treballs d'alumnes de Weierstrass que recullen les seves classes sobre els fonaments són:

- El manuscrit de H.A. Schwarz («Càlcul diferencial»), que recull resumit el curs de Weierstrass del semestre d'estiu 1861.
- El llibre d'E. Kossak, *Die Elemente der Aritmetik* (Programm Friedrichs-Weeder. Gymn., Berlín, 1872), que recull notes preses del curs d'hivern 1865-1866 de Weierstrass i reelaboracions personals. En especial noti's que és la primera vegada que es publica la teoria weierstrassiana del nombre irracional.

– El manuscrit de G.Hettner, que recull el curs «Introducció a la teoria de les funcions analítiques», del semestre d’estiu 1874.

– L’obra de S. Pincherle, *Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del prof. C.Weierstrass* (Giornale di Matematiche 18, pàgs.178-254, 314-357, any 1880), que utilitza notes del curs de Weierstrass de 1878 i notes de cursos anteriors que li feren arribar d’altres alumnes. L’escrit tingué la virtut que féu conèixer l’obra de Weierstrass.

– El manuscrit d’A. Hurwitz, que també és alumne del curs d’introducció a la teoria de les funcions analítiques de l’any 1878.

– El llibre de V. Dantscher, *Vorlesungen über die weierstrassche Theorie der irrationalen Zahlen* (Teubner, Leipzig, 1908), es basa en el curs de Weierstrass que seguí l’any 1872 i en notes del curs d’hivern 1884-1885. Es tracta d’una presentació personal de la teoria de Weierstrass.

– El treball de G. Thieme, basat en l’últim curs d’anàlisi que impartí Weierstrass («Capítols escollits de la teoria de les funcions») del semestre d’estiu 1886.

Cal tenir present que Weierstrass és l’autor principal de la revolució en anàlisi al segle XIX. La seva insistència a construir una teoria de les funcions i dels nombres irracionals, sabent amb això que s’allunya dels mètodes més simples d’altres autors, es degué que volia relligar la noció de funció a les operacions aritmètiques fonamentals, per la repetició de les quals, amb l’afegit de la quantitat variable, s’abastaria la funció racional. Però es demostraria en aritmètica que les operacions es podrien definir per a un nombre infinit de termes, i s’arribaria a les funcions que es podrien representar en la forma d’operacions entre un nombre infinit de funcions racionals, etc. L’aritmetització de l’anàlisi, de la qual Weierstrass fou un promotor, es completaria així.

Certament l'abast de l'obra de Weierstrass es perllonga més enllà d'aquest esforç aritmetitzador i, no cal dir-ho, del que es remarcarà aquí, circumscrits a l'ús formal de les èpsilons, i d'una primera presentació de la derivada i del diferencial. S'afegirà una breu ressenya dels irracionals per veure un cas concret del rigor de l'autor.

L'ESTIL ÈPSILON EN EL MANUSCRIT DE H.A.SCHWARZ.

Val la pena d'escollir uns petits textos del manuscrit de Schwarz, que sempre mantigué molta relació amb Weierstrass. Presenta l'estil èpsilon, la derivada i el diferencial, i bastarà ferne esment per a lliurar un tast del qui s'hi proposa. Si més no es té pocs dubtes que aquí es recull de la manera més fidel els mots proferits en el curs del semestre d'estiu 1861[14].

1. Després d'una presentació de Schwarz, l'escrit diferencia entre una quantitat invariable, també anomenada una constant, i una quantitat variable, que pot ser entre dos límits o no. Precisament el càlcul diferencial sols s'ocupa de les quantitats contínuament [*stetig*] variables, és a dir, quan la quantitat variable pot prendre tots els valors entre dos límits[15].

[La qual cosa equival a dir, sembla, que en un interval numèric hi ha infinits nombres; o també: no hi ha solució de continuïtat numèrica en un interval numèric].

2. Es lliura una definició de funció (més tard tindrà algunes reserves d'aquesta definició, que atribuirà a Fourier, Cauchy i

[14] El text en alemany es troba en un dels apèndix de l'article de Pierre Dugac, «Eléments d'analyse de Karl Weierstrass», *Archive for History of Exact Sciences* (Berlín/Heidelberg), 10, nn.1-2 (gener 1973), pàgs. 41-174, l'obra més exhaustiva sobre el tema.

[15] La lletra petita entre claudàtors és sempre comentari nostre.

Dirichlet[16]), per tal d'introduir la definició de la variació infinitament petita de la variable i de la funció amb l'ajuda de δ i de ε. Com comenta Dugac «Weierstrass introdueix una noció molt important que donarà a les definicions de límit i de continuïtat tota la precisió i la claredat que tenen avui. Weierstrass posa en forma doncs la noció de límit que, fins a aquesta època, després del pas decisiu acomplert per Cauchy...".

En efecte s'estableix el següent [pàg.2]: «És $f(x)$ una funció de x i x un valor determinat, llavors la funció, quan x passa a $x+h$, variarà a $f(x+h)$; la diferència $f(x+h) - f(x)$ s'anomena la variació [*Veränderung*] que experimenta la funció pel fet que l'argument passi de x a $x+h$. Ara és possible de determinar un límit δ per a h de tal manera que, per a tots els valors de h que en el seu valor absolut són més petits que δ, $f(x+h) - f(x)$ esdevingui més petita que una qualsevol quantitat ε per més petita que sigui; es diu que variacions infinitament petites de la funció corresponen a variacions infinitament petites de l'argument. Aleshores es diu, quan el valor absolut d'una quantitat pot ser més petit que una qualsevol quantitat arbitràriament presa, per més petita que sigui, que aquella quantitat pot esdevenir infinitament petita».

[Es transforma una concepció infinitesimal en un llenguatge rigorós mentre es manté l'ús de variació infinitament petita i de quantitat infinitament petita. Una quantitat arbitràriament petita esdevé quelcom nocionalment precís i alhora un valor indeterminat].

3. La utilització d'aquesta definició en el curs confirmaria l'opinió de Pringsheim que Weierstrass fou el primer a donar a la noció de límit d'una funció tota la precisió de la qual seria susceptible. El primer manual que

[16] Cf. el text de G.Hettner, pàg.1. Al text d'A.Hurwitz (semetre d'estiu 1878) cita aquesta definició textualment, l'atribueix a J.Bernoulli, i ofereix la seva, que s'aplica a totes les funcions analítiques (cf. pàgs.81-86). [Les remissions són de les pàgines, que segueixen la numeració de les originals, dels extractes dels manuscrits editats per Dugac en els apèndixs de l'obra esmentada dalt].

s'inspira en les idees de Weierstrass, publicat per Otto Stolz[17], lliura la definició actual del límit, advertint que és de Weierstrass.

Aquesta definició faria: el nombre L és el límit de la funció $f(x)$ per a $x = x_0$ si, donat un nombre qualsevol ε arbitràriament petit, es pot trobar un altre nombre δ que, per a tots els valors de x que difereixen de x_0 en menys de δ, el valor de $f(x)$ difereixi del de L en menys de ε[18].

[La noció que s'hi troba és comparable amb la de Couchy. S'ha insistit que el francès en esmentar que «quan els valors successivament atribuïts a una mateixa variable *s'aproximen* indefinidament a un valor fix, de manera que s'acaba per diferir-ne tan poc com es voldrà, aquesta darrera s'anomena el límit de totes les altres» hi hauria consideracions foronòmiques com si la variable hagués d'*apropar-se,* d'*abastar* el límit. Però Cauchy no sembla dir que l'encalci i, encara menys, l'hegui, sinó que aquell valor fix *s'anomena* el límit.

La consideració de ε no pot pretendre que un hom es quedi en un qualsevol valor, sinó en un qualsevol valor petit arbitrari: el tarannà estàtic dels símbols, el conrea aquell que és capaç de l'ús d'un tal formalisme, algú doncs que ha treballat llargament amb nombres de tot tipus i en totes les circumstàncies. El caràcter aparentment no aproximatiu en l'ús de ε és una formulació *sols possible quan s'entén com una resultant*.

L'encert d'aquest tipus de definicions inspirades en el rigor de Weierstrass no hauria de comprometre que, si més no Cauchy, no proposà abastar el límit passant per tots els valors d'un interval; que defensà que *s'anomena* límit això o allò; que el llenguatge inspirat en l'alemany no pot no suposar algun tipus d'aproximació].

4. El text continua [pàg.3]:

«Si ara una funció està talment constituïda que, a variacions infinitament petites de l'argument, els corresponen variacions infinitament petites de la funció, llavors es diu que aquesta mateixa és *una funció contínua* [*continuierlich*] de l'argument, o que varia constantment [*stetig*] amb aquest argument...

Teorema. Si una funció contínua de x té, per a un valor determinat x_1 de l'argument, una valor determinat y_1 de la funció; i, per a un valor determinat x_2 , un valor determinat y_2 de

[17] Stolz, Otto, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik nach den neueren Ansichten*, Teubner, Leipzig, 1885-1886.

[18] Cf. ídem, I, pàgs.156-157.

la funció; i y_3 és un valor arbitrari entre y_1 i y_2 , llavors ha d'haver-hi si més no un tal valor x_3 entre x_1 i x_2 pel qual el de la funció és y_3.

Les següents proposicions auxiliars serveixen per a la prova.

És $y = f(x)$ una funció contínua de x i no és nul $y_0=f(x_0)$, llavors els valors $f(x)$ de la funció, per a tots els valors de x que es troben en el veïnatge de x_0, és a dir, per als quals la diferència $x–x_0$ en el seu valor absolut no ultrapassa un límit determinat, tenen el mateix signe que $f(x_0)$...

[pàg.4] Els valors que una funció contínua pren o pot prendre pertanyen també a una sèria constant; amb això es justifica el seu nom».

[La definició deu tenir els mateixos avantatges que la de Cauchy].

5. El text de Schwarz passa tot seguit al següent:

[pàg.5]

«*Conceptes bàsics del càlcul diferencial*.

La variació completa $f(x+h) – f(x)$ que una funció $f(x)$ experimenta pel fet de passar x a $x+h$ permet que es divideixi en dues parts, una de les quals és proporcional a la variació h de l'argument, per tant es compon de h i d'un factor independent de h – en relació a un h constant –, per tant esdevé infinitament petita quan h esdevé infinitament petita, o esdevé alhora amb h infinitament petita; l'altra part, però, no sols esdevé merament en si i per si infinitament petita quan h esdevé infinitament petita, és a dir, fins i tot esdevé infinitament petita quan se la divideix per h.

Caracteritzi h una quantitat que pot prendre valors infinitament petits, i sigui $\varphi(h)$ una funció discrecional de h amb la propietat que, per a valors infinitament petits de h, esdevingui també infinitament petita (és a dir, que constantment, tan aviat com es pren una quantitat ε per més petita que sigui, es pot determinar una quantitat δ de tal manera que, per a tot els valors absoluts de h que són més petits que δ, $\varphi(h)$ esdevé més petita que ε) – llavors pot ocórrer que $\frac{\varphi(h)}{h}$ sigui encara també una funció de *h* que, per a valors infinitament petits del mateix *h*, esdevingui infinitament petita; en aquest cas es diu que $\varphi(h)$ esdevé, per a valors de *h* infinitament petits, infinitament petita en relació a *h*. La part primera del tot de la variació de la funció proporcional a la variació de l'argument s'anomena *variació diferencial* o *diferencial,* i s'indica per una *d* característica que es posa davant de la funció, mentre que un Δ posat davant significa el tot de la variació. Anàlogament a això s'escriu també per a *h* (mentre la funció més simple de *x* és el mateix *x*) *dx,* una quantitat independent de *x* i que pot esdevenir infinitament petita – com més petits es prenen *dx* o *h,* menys la variació diferencial s'aparta del tot de la variació, i la diferència pot fer-se, per l'empetitiment de *dx*, més petita que

[pàg.6]

una qualsevol quantitat per més petita que sigui; per això s'ha explicat el diferencial com la variació que pateix una funció quan el seu argument varia una quantitat infinitament petita.

El diferencial d'una funció té per tant en general la forma *df(x)=p.dx*; el factor *p,* pel qual el diferencial de l'argument ha de multiplicar-se perquè s'originі el diferencial de la funció, s'anomena *coeficient diferencial* o quocient diferencial. En general és també una funció de *x* i, com sigui que deriva d'una manera determinada de *f(x),* s'anomena la *derivada* de la funció i s'escriu *f'(x).* Aquesta funció és doncs completa i independent de la variació de l'argument.

Teorema. Tingui una funció, per a un valor *x* determinat de l'argument, un quocient diferencial, llavors no pot dar-se'n un segon, de diferent, per a la mateixa funció i per al mateix valor de *x*.

Hagi's reeixit a dividir *f(x+h) – f(x)* en la manera indicada = *ph+h(h),* on *(h)* indica una quantitat que esdevé infinitament petita amb *h*; cal mostrar que aquesta divisió és l'única possible.

...

Divideixi's el diferencial d'una funció pel diferencial de l'argument, llavors es té el coeficient diferencial; per aquest motiu s'anomena també quocient diferencial:

$$\frac{df(x)}{dx} = p = f'(x).$$

...

[pàg.7]

...

Proposicions auxiliars
per a la determinació del diferencial.

Són $f_1(h)$ i $f_2(h)$ dues funcions que esdevenen alhora infinitament petites amb llur argument *h*, llavors llur suma és també una funció així.

Sigui ε una quantitat discrecional tan petita com es vulgui; divideixi-se-la en dues parts $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ i determini's δ de tal manera que, per a tots els valors absoluts de *h* que no ultrapassen δ, ocorre que tant $f_1(h) < \varepsilon_1$ com també $f_2(h) < \varepsilon_2$; llavors també $f_1(h) + f_2(h) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.. Aquesta proposició val també per a l'addició d'encara més funcions d'aquesta mena que esdevenen alhora infinitament petites amb *h*... ».

[En el curs de 1861 no esmenta encara que hi hagi funcions contínues no derivables.

Weierstrass presentaria doncs la definició de derivada seguint la fórmula

$$f(x+h) - f(x) = ph + h(h) \qquad (1)$$

on *(h)* caracteritza una quantitat que esdevé infinitament petita amb *h*.

També hi ha una circumscripció de la derivada a partir de la relació entre valors infinitament petits de la funció, i valors infinitament petits de la variable[19]. Per fer-ho torna a definir què cal entendre per quantitats infinitament petites[20].

---

[19] «La variació completa *f(x+h) – f(x)* que una funció *f(x)* experimenta pel fet de passar *x* a *x+h* permet que es divideixi en dues parts, una de les quals és proporcional a la variació *h* de l'argument, per tant es compon de *h* i d'un factor independent de *h* – en relació a un *h* constant –, per tant esdevé infinitament petita quan *h* esdevé infinitament petita, o esdevé alhora amb *h* infinitament petita».

La presentació de la derivada a partir de (1) comporta que el segon sumand de la dreta de la igualtat cau quan un hom obté la funció derivada].

El 1872 Weierstrass demostrà que hi ha una funció contínua dins de *R* que no és derivable en cap punt de *R*.

Al manuscrit de G.Hettner [pàgs.216-218] del curs de Weierstrass de 1874, s'hi adverteix contra la definició de la derivada a partir del quocient dels increments de la funció i de la variable independent perquè suggereix que una funció té derivada en tots els punts, fora d'alguns singulars. Per això [pàgs.235-236] la funció *f* serà derivable al punt x_0 si hi ha un tal nombre *c* que sigui possible

$$f(x_0+h) = f(x_0) + c.h+h.h_1$$

on h_1 és una quantitat que pot ser infinitament petita. La veritable noció de derivada es troba ara en això.

El text presenta Δ per a caracteritzar la variació de la funció, mentre que *d* més la funció caracteritza la part d'aquella variació; *dx* seria doncs la funció més simple de *x*, i pot esdevenir infinitament petit. Per això es diu que el diferencial és la variació que pateix una funció quan el seu argument varia en una quantitat infinitament petita. Que

$$df(x) = f'.dx,$$

i treu d'aquí el quocient diferencial.

6. Observi's que, a la pàgina 7, s'hi talla les èpsilons, quelcom prou característic de Weierstrass i dels seus alumnes. Després l'escrit de Schwarz toca el càlcul de diferencials [pàgs.7-9], defineix els diferencials d'ordre superior [pàg.15], aplica els teoremes sobre els diferencials a les funcions trigonomètriques [pàg.17], dóna les proposicions per a l'estudi de les variacions d'una funció [pàgs.20-24], anuncia el teorema dels acreixements finits [pàg.26], lliura la regla de l'Hôpital, passa pel que considera el teorema fonamental de tota l'anàlisi [pàg.30, teorema agafat de Cauchy], estudia els problemes del màxim i del mínim d'una funció [pàg.32], toca el desenvolupament en sèries enteres [pàg.33], i més avall [pàg.35] diu:

«Però hi ha també quantitats que no permeten una expressió per mitjà de la unitat i de les part de la unitat; s'hi fa ús de la forma d'una sèrie infinita. Quan una qualsevol quantitat s'expressa en

---

Noti's així mateix l'hàbil manera d'introduir el diferencial per a *x*, la funció més simple del mateix *x*, que pot esdevenir infinitament petit.

[20] Es torna a posar en relació $\varphi(h)$ i h per a valors infinitament petits a través de ε, δ i *h*.

la forma d'una sèrie infinita, llavors el sentit és que la suma dels *n* primers termes no és certament igual al valor de la quantitat, però que, per mitjà del creixement del mateix *n*, s'hi pot dur tan a prop com es vulgui fer-ho; o que el *restant* que encara manca als *n* termes per al valor sencer tingui la característica, per mitjà del creixement de *n*, de poder-se fer més petit que una qualsevol quantitat presa per més petita que sigui. Indiqui's doncs el restant que encara roman després de *n* termes amb R_n: llavors, si δ indica una quantitat presa discrecionalment petita, ha de dar-se constantment una quantitat ε de tal manera que, per a tots els valors de *n* [és a dir, d'una sèrie on *n* també és un del seus termes] que són més gran que ε, R_n sigui en valor absolut més petit que δ.

En el càlcul diferencial s'haurà d'investigar ara com és possible una tal representació o descabdellament d'una funció a través d'una sèrie infinita convergent i s'haurà de lliurar la determinació del límit del restant, cosa que proporciona un criteri per a la convergència de la sèrie...».

El text fa veure que l'any 1861 no havia encara concebut la seva teoria dels nombres irracionals, però que en tenia el model (aplicació de sèries infinites convergents), i encara no tenia inconvenient a parlar en termes de Cauchy del nombre irracional com un límit.

En efecte, la reconstrucció de l'anàlisi a partir de l'aritmètica pot ser estimada com la segona fase de l'estil weierstrassià (la primera, d'abans de 1863, seria l'estil èpsilon).

Versemblantment elabora la seva teoria dels nombres irracionals al llarg del 1863, i en lliura la primera exposició pública el semestre d'hivern 1863-1864. Aquí caldria intercalar el llibre de Kossak, i després el manuscrit de G.Hettner del cur de Weierstrass de 1874, que el rebla com l'iniciador de l'aritmetització de l'anàlisi.

Tot això es continua en els cursos posteriors: ho palesa la redacció d'Adolf Hurwitz del curs de 1878, tot el començament del qual està dedicat a la definició dels nombres reals.

7. Més avall el text de Schwarz desenvolupa en sèrie les funcions *sin x* i *cos x* [pàg.37]. Després ve el capítol sobre les funcions reals de moltes variables reals [pàg.42], tracta la noció de diferencial per a funcions de dos

variables, introdueix els diferencials d'ordre superior [pàg.49] i calcula el diferencial d'una funció composta [pàg.50]; lliura la fórmula de Taylor [pàg.58], i aquesta part acaba amb el teorema de les funcions implícites.

En un altre apartat estudia la derivació de sèries infinites [pàg.64], el teorema que el límit uniforme de les funcions contínues és una funció contínua [pàg.65], posa el problema de derivar terme a terme una sèrie de funcions [pàg.68], estudia les funcions exponencials [pàgs.70-78], i el curs acaba [pàgs.81-82] amb la cerca del desenvolupament en sèrie d'una funció *f(x)* de la qual es coneix el desenvolupament en sèrie de la derivada.

EL NOMBRE IRRACIONAL EN EL MANUSCRIT DE G.THIEME.

Es tracta del darrer curs d'anàlisi fet per Weierstrass (semestre d'estiu 1886), rellevant també per molts motius. Ara ens pot ser útil a l'hora de voler llegir una mica algun dels elements amb els quals volia bastir l'edifici de l'anàlisi. Cal tenir present que es tracta de les notes preses per G.Thieme, per tant no hi ha aquí un treball publicat i curosament ordenat: són idees que van seguint més o menys un fil conductor a propòsit d'una qüestió rellevant.

En efecte el capítol cinquè té el nom de «Digressió: Esbós d'una aritmètica general». Comença amb una discussió sobre la noció de nombre i delimita què són els nombres racionals. Després considera els agregats compostos d'una infinitat d'elements [pàgs.35-36][21]. S'afirma que «un tal nombre està determinat quan es lliura quins elements hi intervenen, i amb quina freqüència cada element. Així, per exemple, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$té un valor totalment determinat». S'afegeix que la noció d'igualtat vàlida per a agregats compostos d'un nombre finit d'elements pot reemplaçar-se per la noció d'equivalència [pàg.37].

Estableix que l'agregat compost d'una infinitat de termes se'l tractarà sempre en el supòsit que la suma dels elements té un valor finit.

Després de considerar com han de presentar-se els elements de la sèrie perquè la quantitat numèrica sigui finita, afegeix [pàgs.39-40]: «ha de ser finit $a_1+a_2+a_3+\ldots$, llavors cal que hi hagi quantitats que siguin més grans que aquest valor finit, per tant més grans també que una discrecional suma formada des d'un nombre finit. Això últim és el criteri que ens guia per a la decisió en la pregunta que es feia [*quan la suma té un valor finit*]. Que això no és solament la condició necessària, sinó també la suficient, se segueix del fet que podem lliurar quantitats que són més grans que una discrecional suma

[21] En qualsevol cas els nombres racionals consten sempre d'una sèrie finita d'elements.

formada de a_1, a_2 ... , de tal manera que en efecte la sèrie té un valor finit d'acord amb la nostra definició d'abans. En aquest sentit també es fa avinent la proposició, entre altres, que hi ha sols un nombre finit de termes de la sèrie a_1, a_2 ... , sempre que aquesta suma té un valor finit, que siguin més grans que una quantitat g per petita que sigui. Comunament es pensa la sèrie de sumands com una sèrie ben ordenada, mentre que cadascun té un lluc completament determinat. Això permet mostrar fàcilment que cadascun dels elements s'obté per l'addició contínua i això és sovint el que ocorre en la suma. Pensem-nos una quantitat petita g, llavors sols hi ha sempre un nombre finit de termes a_1, a_2 ... que són $>g$. Això s'expressa també quan es diu: els termes esdevenen infinitament petits quan el nombre del lloc creix il·limitadament. Aquesta condició no és, però, suficient. Per tal de mantenir-ho se sol fer el següent: es caracteritza la suma dels primers n termes amb s_n, i es considera la sèrie de quantitats s_1, s_2, s_3 ...; ha de tenir la suma ara un valor finit, llavors cal que s_n romangui constantment sota un cert límit; és a dir, prenent n escaientment gran, llavors

$$s_{n+r} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots a_{n+r}$$

ha de poder-se fer discrecionalment petit per a qualsevol r. Pot mostrar-se inversament que si, en el supòsit d'una quantitat g per a n [*i.e. el terme de la sèrie* n *val* g], es pot produir un límit r de manera que la diferència [s_g- s_r], si $r > 0$, sigui més petita que g, llavors la sèrie té un valor finit».

Parlant en general d'una sèrie, hom pressuposa implícitament que s'ha establert una seqüència determinada dels termes de la sèrie; si es caracteritza la suma dels primers n termes amb s_n, «llavors s'acostuma a definir com el valor de la sèrie el valor límit per a $n = \infty$, és a dir $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Des de la perspectiva aritmètica, la qual volem agafar aquí, això és inadmissible, nosaltres no sortirem de la pressuposició d'un límit, sinó que tractarem el concepte de límit com a quelcom que cal definir aritmèticament" [pàgs.52-53]. Quan, treballant en termes purament aritmètics, el nombre d'elements és finit no té cap sentit parlar de límit en l'accepció que ens apropem a una quantitat fent créixer el nombre d'elements [*però sí en l'accepció que és un lloc límit, cf. més avall G.Thieme 58*].

Weierstrass discuteix força com podem tractar la sèrie, que tal qual representa quelcom finit, quan els termes positius i negatius que hi entren, presos a part, no estan representats encara com a agregats respectivament finits (l'única manera que hi ha per tal que el tot sigui finit): llavors [pàgs.54-57] proposa, valgui el cas, transformar-la en una altra, per exemple

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\ldots,$$

que anomena «incondicionalment sumable». Es podria provar fàcilment que una sèrie així ha de satisfer que

$$\lim_{n\to\infty}\left|S_{n+r} - S_n\right| = 0 .$$

«Ara volem eixamplar el concepte de quantitat numèrica pel fet que inclogui qualsevol sèrie amb la característica de tenir els seus termes cicumscrits un a un; per això és essencial la seqüència dels elements de la sèrie per la qual es defineix la quantitat numèrica del cas». Llavors torna a estudiar com transformar sèries que no són incondicionalment convergents a sèries que sí que ho són.

*

Sigui com sigui el comportament encertat, per tal de transformar sèries numèriques en d'altres que tenen el mateix valor, es podria resumir així:

Sigui

$$a_1 + a_2 + ...$$

una sèrie en qüestió, i sigui

$$g_1 + g_2 + ...$$

una sèrie, que sabem de valor finit, de termes positius, i de manera que $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$. Ara un hom pot separar un cert nombre d'elements de la primera sèrie de manera que discrecionalment molts elements sumats del restant siguin més petits que g_1. És a dir, d'acord amb

$$\left|S_{n+r} - S_n\right| < \delta \quad \text{(on hom pot fer } \delta = g_1\text{)}.$$

Assumim que $n = 2$, i $S_2 = b_1$, i llavors que

$$\left|S_{2+r} - S_2\right| < g_1.$$

Amb el restant de la sèrie fem igual: per tant el nou restant més petit que g_2, i la suma que hem sostret és b_2 ; continuant així s'aconsegueix una sèrie de quantitats $b_1, b_2, ..., b_n$, on en general s'acomplirà que

$$\left|b_{r+1}\right| < g_r .$$

I així

$$\left|b_2 + b_3 + b_4 + ... + b_n\right| < \sum_1^{n-1} g_r .$$

Com hem pressuposat que el terme de la dreta té un valor finit, també el tindrà el de l'esquerra, i b_1 és també finit: tota la sèrie, quan es fa créixer arbitràriament n, tindrà un valor finit.

Quan nosaltres fem la mateixa operació d'una altra manera es basteix una sèrie c_1, c_2, c_3 ..., la suma de la qual té el mateix valor. O sigui, si tenim la sèrie

$$b_1 + b_2 + ... + b_m + R_m$$

ocorre que

$$R_m < g_{m-1} + g_m + ...$$

R_m podent fer-se tan petit com es vulgui fent créixer *m.* Això mateix ocorre a la sèrie

$$= c_1 + c_2 + ... + c_p + R'_p \ .$$

Consti ara $b_1 + b_2 + ... + b_m$ dels *n* primers termes de la sèrie $a_1 + a_2 + ...$, llavors tenim primer la suma

$$S_n + R_m$$

i també

$$S_r + R'_p$$

si *r* té per a *c* la mateixa significació que té *n* per a *b*. La diferència de les dues expressions és

$$S_n - S_r + R_m - R'_p.$$

Fent créixer *m* i *p*, R_m i R'_p es poden fer tant petits com vulguem, i també $S_n – S_r$.

Per tant, si hi ha una la sèrie amb valor finit que conté termes positius i negatius, aquest valor finit es manté en la constitució de moltes sèries incondicionalment sumables.

Sense consideracions de límits [i.e. sense fer esment de la quantitat numèrica com a límit de la suma, cf. més amunt *G.Thieme*, 52-53] la nostra sèrie s'ha inclòs en el concepte de quantitat numèrica. Llavors ara tocaria ja ocupar-nos de les operacions de l'addició, substracció, etc., d'unes tals quantitats numèriques.

*

Amb tot això abandonem el capítol cinquè i ens introduïm al sisè («Introducció al concepte d'una quantitat variable»).

Weierstrass passa [pàgs.57-60] a estudiar què és una quantitat variable. Amb la seva definició, s'hi lliga el concepte de límit d'una quantitat variable: creu que cal veure com se l'ha de comprendre aritmèticament. «És *x* una quantitat variable i *a* un tal lloc [*Stelle*]que en cada proximitat [*Nähe*] seva hi ha infinitament molts *x* que pertanyen a allò definit, llavors *a* és un límit de la quantitat variable, en el cas que el mateix *a* no pertanyi als llocs definits».

Weierstrass indica que els llocs límits poden ser infinits; per exemple, quan definim una quantitat variable pel fet que li han de correspondre totes les quantitats numèriques formades per un nombre finit d'elements integrats a partir d'una unitat principal i de les seves parts. Tots els nombres racionals entrarien en el definit.

Però, en cada proximitat d'una quantitat numèrica irracional, hi ha arbitràriament molts nombres racionals que li esdevenen tan pròxims com vulguem. En aquest sentit cada quantitat numèrica irracional és un límit de la racional. Però si volem definir aritmèticament la diferència entre quantitats racionals i irracionals no podem assumir que les irracionals són els límits de les altres perquè no podem saber si hi ha d'altres quantitats que les racionals.

De fet hem dit que entrava en el concepte de quantitat numèrica qualsevol sèrie amb la qualitat de tenir els seus termes ben circumscrits [cf. més amunt *G.Thieme*, 55] i, per exemple, el nombre *e* es forma a partir d'una sèrie ben establerta ($1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n!}$, ...) que defineix una quantitat numèrica determinada, de la qual s'ha assenyalat que no lliura cap quantitat racional, amb la qual cosa queda clar que l'àmbit numèric no s'esgota amb els nombres racionals. De fet sols com excepció una sèrie infinita d'elements és equivalent a un nombre racional (una quantitat racional la definim primerament com una amb un nombre finit d'elements).

«Això establert, hom pot ara en efecte considerar les quantitats numèriques irracionals com a límits de les quantitats racionals variables. Perquè podem sempre separar tants elements de un nombre integrat per infinitament molts elements, que el restant sigui més petit que una arbitràriament petita quantitat δ, i que hi hagi doncs infinitament molts nombres racionals que esdevinguin tan pròxims a l'irracional considerat com un hom ho vulgui en qualsevol moment». Dalt ja havíem establert que una quantitat variable pot tenir infinits llocs límits.

*

[En conjunt cal dir que Weierstrass se circumscriu a assumir (els elements ordenats en ordre convergent) que hi ha *sempre* una quantitat numèrica, integrada a partir d'una unitat principal i de les seves parts, menor que un altre en una quantitat tan petita com es vulgui δ, cosa que és sens dubte una consideració infinitesimal[22]. Hi ha més aviat una retòrica que diu que sempre es pot fer un agregat una mica més gran que una quantitat, que esdevé més petita que el primer. Una tal retòrica no dóna pas una resultant, sinó una seqüència d'elements; d'aquí que la mateixa seqüència sempre inacabada passa a ser de fet la quantitat numèrica, amb l'únic afegit que els elements de l'agregat estan fets d'unitats i de les seves parts.

Hi ha una aproximació als nombres reals per mitjans merament aritmètics. Per això es troba un inconvenient a fer referència de límits. Si ocorre que la diferència entre dos agregats és tan petita com un hom vulgui i

[22] Weierstrass insisteix a fer un requisit de la quantitat numèrica que el restant de la sèrie esdevingui tant petit com es vulgui, per tant s'albira un perllongament indefinit de la sèrie. D'altra banda la sola referència d'un nombre integrat per infinitament molts elements manté implícit el límit, àdhuc la indiferència d'agafar-lo o no.

hi ha un agregat que s’escapoleix sempre d’una última determinació racional, llavors és això l’últim criteri d’alguns nombres reals. És això el que anomenem, si es vol, una concepció de l’irracional i del nombre irracional com a límit.

Poques vegades, o potser cap, s’hauria establert d’una manera tan ferma i consistent la uniformitat dels nombres reals sense sortir del punt de mira de la unitat i de les seves parts, de l’aritmètica.

Tot plegat s’avé amb la circumstància, que això més aviat avalaria, que no hi ha prova de la irracionalitat i que tota reducció a l’absurd és incapaç de fer-ho].

1. Sobre l'ús del mot 'bo', desembre 1997 [2ª edició juliol 2013].
2. Què vol dir responsabilitat? Amb un annex sobre la llibertat, abril 1998 [2ª edició març 2010, 3ª edició octubre 2012].
3. Sobre les concepcions aritmetitzants dels nombres irracionals, desembre 1998 [2ª edició març 2015).
4. En quina accepció els grecs demostraren la incommensurabilitat?, febrer 1999.
5. Del discurs teòric, juny 1999 [2ª edició març 2012].
6. Dels temps i dels moviments elementals, octubre 1999.
7. Consideracions sobre el llenguatge del llibre X dels Elements, febrer 2000.
8. Sobre la subjectivitat, maig 2000 [2ª edició novembre 2013].
9. Sobre el principi de la moralitat, desembre 2000 [2ª edició setembre 2008, 3ª edició juliol 2010, 4ª edició octubre 2012].
10. Dotze notes a propòsit de la causa i de l'efecte, març 2001.
11. La proporció d'Èudox i la generalització de la proporció, juny 2001 [2ª edició: maig 2007].
12. Sobre la meditació fenomenològica fonamental de Husserl. Part primera: La tesi de l'actitud natural i la seva desconnexió, desembre 2001.
13. Propostes en ocasió del cos i de les passions, novembre 2002 [2ª edició: desembre de 2011].
14. Anotacions marginals als Principia Mathematica newtonians, maig 2003.
15. L'originalitat del sagrat i la seva crítica (I), maig 2004 [2ª edició gener 2010, 3ª edició octubre 2014, 4ª edició octubre 2016].
16. L'originalitat del sagrat i la seva crítica (II), octubre 2004 [2ª edició gener 2010, 3ª edició gener 2015, 4ª edició octubre 2016].
17. L'originalitat del sagrat i la seva crítica (III), març 2005 [2ª edició gener 2010, 3ª edició març 2015, 4ª edició octubre 2016].
18. Sobre els límits d'acord amb l'obra de Cauchy, desembre 2005 [2ª edició gener 2017].
19. Sobre la meditació fenomenològica fonamental de Husserl. Part segona: Consciència i realitat natural, abril 2006.
20. Sobre la meditació fenomenològica fonamental de Husserl. Part tercera: La regió de la consciència pura i les reduccions transcendentals, setembre 2006.
21. La qüestió nacional. Nous esborranys per a avui, gener 2007 [2ª edició maig 2010].
22. La llum i els colors. Unes aproximacions elementals, maig 2007.

23. Introducció a l’estètica. Esbossos d’una teoria de l’art i de la bellesa, octubre 2007.
24. Apunts de l’ús formal en la definició dels diferencials i de les derivades d’acord amb Cauchy i Weierstrass, febrer 2008 [2ª edició: març 2017].
25. La saviesa, la fe i l’infinit, juny 2008.
26. A propòsit de la política, la democràcia i la justícia, febrer 2009 [2ª edició: abril 2010].
27. Resums de lògica i llenguatge, maig 2009.
*28. El lógos de la ciència. Indicacions preliminars des de l’*Almagest*, octubre 2009 [2º edició: juliol 2015].*
29. El llibre El Callat de Joan Vinyoli i el referent ontològic, abril 2010.
30. Un exercici crític a propòsit de l'inconscient freudià, setembre 2010.
31. La unitat i el nombre. Una introducció a l’aritmètica, abril 2011.
32. La història, la bona nova i la conversió. Una recerca de filosofia, juny 2011.
33. Una realitat anticipada, la festa, la promoció d’un sí. Una recerca de filosofia, agost 2011.
34. Notes de lectura de filosofia de la ciència (Popper, Lakatos, Fayerabend), febrer 2012.
35. Estudis sobre la comunicació. Llenguatge, acció comunicativa i nous mitjans, agost 2012.
36. Introducció a la geometria euclidiana. Apunts per a una filosofia de l’espai, gener 2013.
37. L’estudi de l’hermenèutica. La possibilitat d’experiència des dels escrits de filosofia, setembre 2013.
38. Temps i moviment. Una introducció a la cinemàtica, gener 2014.
39. La qüestió nacional. Annexos, maig 2014.
40. Tres exemples d’estàtica. Aproximacions de filosofia de la ciència, gener 2015.
41. Una aproximació a la força. Estudis de filosofia de la ciència, maig 2015.
42. Comentaris de l’experiència sagrada en el Bagavad-Gītā, octubre 2015.
*43. Observant el cel amb l’esfera armil·lar. Apunts per a una filosofía de la ciencia, gene*r 2016.
44. *A l’entorn de la passa heliocèntrica de Copèrnic. Escrits per a una filosofía de la ciència,* abril 2016.
45. *La raó de temps entre moviments pendulars i lliures en l’*Horologium oscillatorium *de Christiaan Huygens*, setembre 2016.
46. *L’obra pictòrica com a representació. Des d’allò que s’hi expressa a l’expressió de l’artista*, desembre de 2016.