F. GRAELL I DENIEL

# SOBRE LES CONCEPCIONS ARITMETITZANTS DELS NOMBRES IRRACIONALS

QUADERNS DE FILOSOFIA

3

F. GRAELL I DENIEL

# SOBRE LES CONCEPCIONS ARITMETITZANTS DELS NOMBRES IRRACIONALS

3

QUADERNS DE FILOSOFIA

Barcelona 2023

3ª edició juliol 2023 [1ª edició desembre 1998
2ª edició març 2015]

ISBN: 84-923682-2-5


www.xtec.cat/~fgraell
www.quadernsdefilosofia.cat
E-mail: fgraell@xtec.cat

Podeu fer ús de l'adreça electrònica per a qualsevol correspondència amb *Quaderns de Filosofia*.

Es prega de tenir en compte sempre de consultar si hi ha una nova edició dels quaderns (que inclou canvis de vegades prou rellevants) en el web esmentat.

CONTINGUT

## Pròleg a la segona edició

El present escrit manté el seu interès perquè reflexiona sobre l'abast de les presentacions dels nombres. Mentre es fa matemàtica no hi ha un tractament – i cal que no n'hi hagi – del que pressuposen els nombres en l'accepció del seu lloc al costat dels altres ens i en referència a la resta de coses.

Certament la problemàtica abasta inicialment els nombres naturals, i s'arriba a admetre que el quantitatiu i el qualitatiu es complementen mútuament com sigui que són maneres d'ocupar-se de quelcom. Més endavant hi ha una autonomització del quantitatiu pel fet que s'aprèn, des de la coherència del que és numèric en les coses, un cert domini del numèric, s'hi manté una significació si més no numèrica (un aspecte generalitzador), s'aprèn a reproduir-ho, es comença a dominar les operacions bàsiques (suma i resta), es va accentuant els aspectes conductuals sense mai no perdre del tot una significació numèrica, fins a arribar a estendre's en aritmètica, etc[1].

L'estudi dels nombres irracionals no entra en cap competència amb una qualsevol filosofia dels nombres naturals perquè ja els suposen, i sospesen el domini aritmètic. Per això cal escatir, des del punt de vista de les possibilitats de fer-ho, la circumstància d'apropar-se a l'irracional a partir d'altres procediments que els clàssics a partir de les arrels dels nombres als qual no se n'hi troba d'exacta.

Certament l'harmonització del treball matemàtic pot suposar fer *tabula rasa* de tot això com sigui que la seva tasca rau a estendre el domini del quantitatiu, i a resoldre-ho d'acord amb plurals procediments. Llavors es prendrà la presentació que més plagui de l'irracional mentre s'és prou conscient que les operacions amb nombres reals deriven de llur adquisició al llarg de la història de la cultura. La discussió filosòfica no deixa de ser al

[1] Cf. *La unitat i el nombre. Una introducció a l'aritmètica*, QF31.

capdavall una marrada respecte de la tasca matemàtica malgrat la importància de què gaudeix tant per a comprendre-la com per a fer palès el tarannà de les activitats.

No sembla possible de circumscriure el nombre natural a partir de mers conceptes perquè cal fer atenció a les coses, a les maneres d'ocupar-se'n, a l'adquisició d'un repertori lingüístic, etc. Així mateix les aproximacions a l'irracional no es trobarien al marge de les operacions amb nombres racionals i llurs complicacions. Hi ha una certa necessitat d'avançar de bell nou des del començament en el cas de no voler perdre's enmig de molts malentesos: cal retornar al quantitatiu el fet de ser part del perceptiu, imaginatiu, ideal, sobretot perquè aquesta meravella matemàtica serveix de guia i de cinyell de les maneres de tractar el que s'esdevé en l'univers.

La present edició sols ha afegit algunes poques línies quan ha semblat que calia fer més explícit l'afer, i distribueix el text en apartats que fan destacar les divisions anteriors.

## Pròleg a la tercera edició

La part dedicada a Dedekind ha estat ampliada per a fer-la més fàcilment assequible. Alhora s'ha realitzat arreu algun retoc a fi d'aconseguir una lectura més amable i lligada.

# I
# LA CONVENIÈNCIA D'UN REPÀS DE LES CONCEPCIONS ARITMETIZANTS DE L'IRRACIONAL

Al segle XIX aparegué l'opinió crítica que encara no s'havia *demostrat* que es podien efectuar sobre els nombres irracionals les operacions definides en aritmètica per als nombres racionals. Una tal posició es podria exemplificar amb els mots de l'estudi, ja clàssic, de A.Pringsheim i J.Molk, quan diuen a propòsit de la representació mètrica dels nombres:

«*Fins aquí tot és clar en la doctrina mètrica, però heus ací la dificultat. No n'hi ha prou, a generalitzar els nombres naturals, definint convenientment nombres que els inclouen com a casos particulars; cal mostrar a més a més que es té dret d'efectuar, sobre els nombres generalitzats, les diverses operacions de l'aritmètica segons regles determinades, per exemple segons les regles establertes per als nombres naturals. Ara bé, aquí la* demostració *és impossible. Hom ha trigat molt de temps a adonar-se'n; tanmateix la dificultat era davant dels ulls, però s'ha cregut poder-la esquivar, tot establint la hipòtesi gratuïta que no solament, a cada vector, li correspon un nombre, cosa que resulta de la mateixa definició del nombre, sinó que inversament, a cada símbol obtingut per combinar, seguint les regles de l'aritmètica, els algoritmes que representen els nombres, li correspon també necessàriament un vector, amb la qual cosa la demostració cercada seria evidentment fàcil. Als qui dubtaven de la legitimitat d'una tal hipòtesi, els uns els responien que aquest recíproc tenia un caràcter d'evidència geomètrica que dispensava de qualsevol esclariment, d'altres pretenien d'esclarir la qüestió per mitjà de consideracions d'ordre metafísic sobre la continuïtat, la noció de* *límit i els infinitament petits, que no aconseguien finalment més que enfosquir-la més. Perquè la demostració de la hipòtesi és impossible, és a un postulat que cal demanar ajut, com ho han fet veure primerament* G.Cantor *i, quasi simultàniament,* R.Dedekind. *És sols en virtut d'un postulat que, a qualsevol nombre representat per un dels algoritmes considerats, li correspon un vector. Sens dubte, completada per aquest postulat, la doctrina mètrica torna a ser rigorosa, però llavors deixa de ser lluminosa, com una qualsevol doctrina en l'exposició de la qual cal fer intervenir postulats estranys al seu objecte. Hom veurà més endavant com s'ha cercat d'evitar un tal escull* [Postulat d'Ascoli].

*Tanmateix, uns quants anys abans que* G.Cantor *no hagués fet evident tot això, alguns matemàtics, preocupats justament de les dificultats que acabem d'assenyalar i de la manca de rigor, i de claredat i tot, que oferien les demostracions de teoremes que sostenen tota l'Anàlisi, cercaren, independentment els uns dels altres, d'edificar una teoria nova enterament deslligada d'una qualsevol consideració que impliqués magnituds concretes, cosa que els portà a aprofundir la noció de nombre irracional. Arribaren a penetrar en la veritable natura d'aquests nombres ...*»[2].

Abans d'algun apropament a l'aritmetització de l'irracional, caldria assajar de comprendre millor l'abast d'unes tals crítiques: l'aritmetització de la matemàtica al llarg del segle XIX ha esdevingut, sembla, irreversible; malgrat tot no s'aconseguiria versemblantment un clar contrast entre les justificacions de l'extensió de les operacions aritmètiques sense provar d'exemplificar les unes posicions i les altres.

---

[2] A.Pringsheim, J.Molk, «*Nombres irrationnels et notion de limite*», pàgs.146-147, *Encyclopédie des sciences mathématiques*, tom I, vol. I: fascicle I, pàgs.133-160; fascicle II, pàgs.161-208.

Primerament, per exemple, s'hauria de considerar el sentit de les paraules del text d'A.Pringsheim i de J.Molk: el text defensa la impossibilitat d'una demostració de les operacions aritmètiques per als nombres generalitzats *perquè* no és possible d'establir una relació biunívoca entre uns tals nombres i els vectors (caldria un postulat per a la direcció que va dels nombres als vectors); i les teories de l'irracional s'haurien edificat independentment de les exemplaritzacions de magnitud.

Caldria afegir que l'axioma que faria correspondre un vector a cada nombre (en una noció generalitzada) − que tal qual és de Georg Cantor − no hauria estat introduït a fi de demostrar les operacions amb nombres (racionals o irracionals), sinó per a aplicar-los a les consideracions geomètriques, i degut al fet que Cantor hauria establert prèviament una teoria numèrica de l'irracional *amb independència de les magnituds no numèriques*, teoria que incorporava, és clar, la seva justificació d'operacions, i per tant es fa del tot comprensible la necessitat d'un axioma[3].

[3]S'omet la primera presentació de l'irracional de Cantor (cf. «*Über die Ausdehnung eines Satz aus der Theorie der Trigonometischen Reihen*», *Math. Annalen*, vol. 5 (1872), pàgs.123-132, incorporat a *Gesammelte Abhandlungen. Mathematischen und philosophischen Inhalts,* Hildesheim, Georg Olms, 1966, pàgs.92-102) perquè més tard la superà amb una segona consideració que s'esmentarà més avall. En aquell primer tractament presenta els irracionals com a límits (després s'adonarà que no pot ser tal qual així) i tota la teoria té un tractament formal. Per això hi esmenta la possibilitat d'aplicar-la a magnituds lineals: l'ús de nombres racionals per als punts de línies en coordenades cartesianes, i l'ús dels irracionals, tal i com han estat definits, per a tots aquells punts d'una línia que són coneguts per construcció; és a dir, es pot adjudicar un nombre a tot allò que es pot construir geomètricament. Però prenent ara l'altra direcció, la que va dels nombres a les magnituds, afegeix: «*Per a completar la connexió exposada en aquest paràgraf, del camp de les magnituds numèriques definides en el paràgraf anterior, amb la geometria de la línia recta tan sols cal afegir un* axioma *que estableixi simplement que també, en direcció contrària, a cada quantitat numèrica li correspongui un punt determinat d'una recta, la*

D'altra banda, la introducció d'un axioma per part de Dedekind, caldria valorar-ho més aviat com la d'un axioma geomètric en una primera accepció, en tant que voldria oferir un model per a la continuïtat d'una magnitud linial on es reflectís el tall del nombre irracional[4]: no es tractaria tampoc aquí d'una justificació de les operacions amb irracionals, que, com en Cantor, tindrien llur autonomia assegurada perquè Dedekind assumiria la independència del nombre respecte de la magnitud lineal.

Per tant la demostració de les operacions aritmètiques per als nombres irracionals no provindria de la necessitat d'un axioma avalador que fa correspondre una magnitud a un nombre, axioma imprescindible si s’ha pres una teoria numèrica autònoma, sinó que serien les mateixes teories aritmetizants dels irracionals, que garanteixen totes les operacions aritmètiques (i potser de l'anàlisi), les que el formulen. Més aviat, i com digué Dedekind a *Stetigkeit und irrationalen Zahlen*, és perquè mai no s'hauria demostrat, per exemple, que $\sqrt{2} . \sqrt{3} = \sqrt{6}$, que hom cregué necessària una revisió aritmetitzant de l'irracional; en conjunt se’n sentí la necessitat per tal de poder demostrar l'extensió de les operacions aritmètiques als nombres reals.

D'aquí que hi hagi de fet assumptes diversos i que fóra convenient de no imbricar; (1) l'estudi de l'accepció en què s’afirma que abans del segle XIX no s'hauria demostrat el càlcul radical que s'usava; (2) la possible exemplificació d'un tal càlcul

---

*coordenada del qual és igual a aquella quantitat numèrica, i certament en el mateix sentit que hem esclarit en el present paràgraf.*

*Anomeno aquesta proposició un* axioma *perquè té com a propi no poder-se demostrar universalment.*

*Llavors, a través seu, es guanya també conseqüentment una certa objectivitat per a les quantitats numèriques, de la qual tanmateix en són totalment independents*» (*loc.cit*. pàg.97).

[4]Cf. més avall.

(fins i tot admetent que no s'hagués demostrat com a resultat numèric), cosa que no tindria cap punt de contacte amb les problemes derivats de l'aritmetització (i de la necessitat d'un axioma) ni amb els derivats d'una possible demostració del propi càlcul; (3) s’hauria d'afegir com es podria avaluar un radical irracional, que no és cap nombre en l'accepció bàsica del mot, per tal que se l'hagués pogut acceptar en un càlcul del tall de l'aritmètic; i (4) finalment caldria fer un cop d'ull a les mateixes teories aritmetitzants de l'irracional.

Certament caldrà lliurar algunes indicacions per a cadascun d'aquests punts en successius treballs: ara bastarà de circumscriure's a (4), base amb la qual es presenta avui dia els irracionals en manuals superiors de matemàtiques.

# II
# L’EFICÀCIA D’UNA ARITMETITZACIÓ

Les consideracions de l’apartat anterior permeten de repassar la utilitat d’una interpretació de la quantitat irracional.

Podria semblar en efecte que aquelles definicions de l'irracional tenen el seu suport en el desig exprés de fer de l'irracional un nombre en l'accepció, si és possible de dir-ho així, d'esgotar-ne la seva significació a partir dels nombres racionals, ja sigui com un terme últim de sèrie racional, com un conjunt de nombres racionals, com un tall enmig de racionals, etc., i cal admetre que no hi ha una altra manera de tenir-lo *de fet* com a resultant que en tant que aproximació racional; tot això esdevindria prou útil quan algú treballa *qua* matemàtic, permetria un estudi general de les propietats numèriques, obriria el camí a un discurs unitari i uniforme sense consideracions d'índole heterogènia, permetria l'assumpció sense problemes d'irracionals del tall de $\pi$, i s'adiria amb una presentació rigorosa de les diverses classes de nombres, tal i com s’està acostumat en matemàtiques.

S’hauria de veure doncs l'abast de les aproximacions i definicions aritmetitzants del nombre irracional que iniciaren Ch.Méray i G.Cantor a partir de sèries infinites, K.Weierstrass a partir de conjunts de nombres racionals (les quantitats numèriques, *Zahlengrösse*), i Dedekind a partir de la noció purament aritmètica de «tall» (*Schnitt*), segons les quals una nova concepció de l'irracional lliuraria quelcom més adient al conjunt del saber matemàtic en la mesura que el mer simbolisme d'una arrel no satisfaria prou les exigències d'una definició rigorosa del nombre irracional, i en la mesura que hom s'adonaria que l'extensió de les operacions de l'aritmètica (per exemple) als irracionals no haurien estat demostrades.

Nosaltres provarem de veure-ho circumscrit a dos d'aquests grans autors, Cantor i Dedekind, malgrat que no sols caldria un estudi de cadascun dels iniciadors de les definicions aritmetitzants, sinó també dels seus immediats seguidors (H.E.Heine, J.Tannery, O.Stolz, P.Bachmann, M.Pasch, etc.).

# III
# L’APROXIMACIÓ AL NOMBRE IRRACIONAL DE GEORG CANTOR

Comencem amb la traducció d’algun dels textos de la doctrina aritmetitzant de l’irracional, per exemple el de la segona exposició de Georg Cantor[5], inclòs en l'importantíssim treball *Über unendliche lineare Punkmannig-faltigkeiten,* on modifica una mica el seu punt de vista anterior[6], i on compara també les doctrines de K.Weierstrass i de R.Dedekind amb la seva. Cregué que la definició del primer hauria caigut en la falta lògica de pressuposar ja el nombre irracional a definir, i la del segon tindria el greu inconvenient que els nombres mai no es presenten en l'anàlisi en la forma de «talls» (hi hauria doncs força artificiositat), amb la qual cosa s’arriba a la tercera possibilitat, que és la seva pròpia, i que fa:

«*Passo ara a la tercera forma de definir els nombres reals. També aquí es pren com a base un conjunt infinit de nombres racionals* $(a_v)$[7] *de la primera potència, per al qual reclamo tanmateix una altra propietat que en la definició de Weierstrass; exigeixo que, en el supòsit d'un nombre racional* ε *tan petit com es vulgui, es poden separar un nombre finit de membres del conjunt de tal manera que els membres que romanen sobrants, i presos de*

---

[5]*Math. Annalen* vol.21 (1883), pàgs.565-568; *Gesammelte Abhandlungen*, pàgs.183-190.

[6]Cf. *Math. Annalen* vol.5 (1872), pàg.123; *Gesammelte Abhandlungen,* pàg.92.

[7] $(a_v)$ denota un conjunt de nombres racionals positius, i que satisfà la condició que, siguin quins siguin els nombres, sumats en ordre finit, aquesta suma sempre roman per sota d’un límit donat.

*dos en dos, tenen una diferència la quantitat absoluta de la qual és menor que* $\varepsilon$*. Cada conjunt* $(a_\nu)$ *d'aquesta mena, que es pot caracteritzar també per l'exigència*

$$\lim_{\nu=\infty} (a_{\nu+\mu} - a_\nu) = 0 \qquad \text{(per a un arbitrari } \mu\text{)}$$

*l'anomeno una* sèrie fonamental, *i faig que li correspongui un nombre* b *que es defineix per aquella sèrie; per a aquest nombre àdhuc es pot usar amb encert el mateix signe* $(a_\nu)$, *tal com Heine ho ha proposat (compareu amb el Journal de Crelle, vol.74, pàgs.172), el qual en aquestes qüestions s'ha avingut als meus plantejaments després de moltes discussions orals. Una tal* sèrie fonamental *representa tres casos, com es dedueix rigorosament del seu concepte: o els seus membres* $a_\nu$, *per a valors suficientment grans de* $\nu$*, són segons la seva quantia absoluta menors que un nombre pressuposat arbitràriament; o aquells mateixos són a partir d'un cert* $\nu$ *majors que un nombre racional positiu* $\rho$ *assenyalable amb determinació; o són a partir d'un cert* $\nu$ *menors que una quantitat racional negativa* $-\rho$ *assenyalable amb determinació. En el primer cas dic que* b *és igual a zero; en el segon que* b *és major que zero o positiu; en el tercer que* b *és menor que zero o negatiu.*

*Ara vénen les operacions fonamentals. Si* $(a_\nu)$ *i* $(a'_\nu)$ *són dues* sèries fonamentals *a través de les qual es determina el nombres* b *i* b', *es mostra que* $(a_\nu \pm a'_\nu)$ *i* $(a_\nu \cdot a'_\nu)$ *són també* sèries fonamentals *que determinen doncs tres nombres nous, que em serveixen com a definicions per a la suma i la diferència* b $\pm$ b' *i per al producte* b $\cdot$ b'.

*Si a més a més* b *és diferent de zero, d'acord amb la definició donada dalt ,es prova que* $\left(\frac{a'_\nu}{a_\nu}\right)$ *és també una* sèrie fonamental, el nombre corresponent de la qual lliura la definició per al quocient $\frac{b'}{b}$.

*Les operacions elementals entre un nombre* b *donat a través d'una sèrie fonamental* ($a_\nu$) *i un nombre racional* a *donat directament s'inclouen en el que acabem d'establir, quan hom fa,* $a'_\nu = a$ i b' = a.

*Ara vénen primerament les definicions d'igualtat, de més gran que i de més petit que, entre dos nombres* b *i* b' *(on* b' *pot ser també* = a *), i es diu certament que* b = b', *o* b > b', *o* b < b', *segons que* b - b' *sigui igual, més gran, o més petit, que zero.*

*Després de tot això es prova, com a proposició estrictament demostrable, que si* b *és el nombre determinat a través d'una sèrie fonamental* ($a_\nu$), *llavors* $b - a_\nu$ *amb* $\nu$ *creixent esdevé menor, segons la quantia absoluta, que un qualsevol nombre racional pensable o, el que vol dir el mateix, que*

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = b.$$

*Posem atenció en aquest punt capital, la significació del qual pot ometre's fàcilment: en la* tercera *forma de definir els nombres reals no es defineix el nombre* b *com a "límit" dels membres* $a_\nu$ *d'una sèrie fonamental* ($a_\nu$)*; perquè això esdevindria una falta lògica anàloga a la feta ressaltar en la discussió de la* primera *forma de definir-los* [la de Weierstrass]*, i certament per la raó que llavors es presumiria* l'existència *del* $\lim_{\nu=\infty} a_\nu$*; cal dir, però, que l'afer va a l'inrevés: que el concepte* b *ha estat pensat, per mitjà de la nostra definició precedent, amb tals propietats i relacions respecte dels nombres racionals que des d'aquí es pot treure amb evidència lògica la conclusió: existeix* $\lim_{\nu=\infty} a_\nu$ *i és igual a* b. *Demano aquí disculpes per l'allargament que ocasiono amb l'observació que la majoria ometen aquest petit detall insignificant i llavors fàcilment s'emboliquen en dubtes i en contradiccions respecte de l'irracional, de les quals coses s'alliberarien* *completetament si prestessin atenció a les circumstàncies aquí ressaltades; perquè aleshores reconeixerien clarament que el nombre irracional, gràcies a* la propietat que la definició li dóna, *té tant una realitat determinada en el nostre esperit com la té el racional, àdhuc com la té el nombre racional enter, i que cal no* abastar-lo *primerament per mitjà d'un procés límit, sinó que al contrari és per mitjà de la seva* possessió *quan hom es conveç absolutament de la viabilitat i de l'evidència dels processos límits; perquè es pot eixamplar ara fàcilment la proposició acabada d'esmentar amb la següent: si* $(b_v)$ *és un qualsevol conjunt de nombres racionals o irracionals amb la condició que* $\lim_{v=\infty}(b_{v+\mu} - b_v) = 0$ *(sigui* $\mu$ *el que sigui), llavors hi ha un nombre tal determinat per mitjà d'una sèrie fonamental* $(a_v)$ *de manera que*

$$\lim_{v=\infty} b_v = b\ .$$

*Es palesa doncs que els* mateixos *nombres* b*, que es defineixen talment en base a sèries fonamentals* $(a_v)$ *(anomeno d'ordre* primer *aquestes sèries fonamentals) que passen com a límits d'*$a_v$*, són també representables de múltiples maneres com a límits de sèries* $(b_v)$*, on cadascun dels* $b_v$ *es defineix per mitjà d'una sèrie fonamental d'ordre primer* $\left(a_\mu^{(v)}\right)$ *(amb* $v$ *fixat).*

*Esmento per això un tal cojunt* $(b_v)$*, quan té la condició que* $\lim_{v=\infty}(b_{v+\mu} - b_v) = 0$ *(per a qualsevol* $\mu$*), una sèrie fonamental de* segon *ordre, etc.»*

El text il·lustra si més no com les concepcions aritmetitzants (s'esmenta les de Weierstrass i les de Dedekind) legitimen les operacions bàsiques, i exemplifica un cas de les aproximacions per sèries als irracionals (o als propis racionals): cal parar atenció que cregués que prèviament havia de lliurar-se una caracterització de nombre real abans del límit, en l'accepció que no se'l podria pressuposar, sinó que calia abastar-lo abans com el terme del límit.

Tanmateix l'aproximació de Cantor sembla incomprensible si no s'hi introdueix d'altres consideracions perquè tal qual semblaria una petició de principi. En efecte es deu poder pensar que s'ha arribat conclusivament a una determinació del nombre real per sèries quan d'alguna manera s'assumís el seu possible perllongament indefinit o il·limitat. És a dir, que es *pensés* això, i ho apliqués a les sèries.

Si més no s'entendria que Cantor cregués que podia superar la definició de Weierstrass perquè, tal i com la seva magnífica memòria *Über unendlichen lineare Punktmannigfaltigkeiten* palesa, hauria admès un ús del mot 'infinit' que va força enllà de l'ús d'un 'etcètera'[8], on pensà que superava una concepció potencial aristotèlica. Tanmateix el lector acordarà que uns tals usos no semblen pas massa acceptables des del punt de mira crític en la mesura que la capacitat de l'individu seria més aviat minsa[9], la qual cosa deixaria la meritòria exposició de Cantor al mateix nivell que la de Weierstrass.

---

[8]L'autor escrigué, per exemple: «*Was ich behaupte und durch dieses Arbeit, wie auch durch meine früheren Versuche bewiesen zu haben glaube, ist, dass es nach dem Endlichen ein* Transfinitum *(welches man auch* Suprafinitum *nennen könnte), d.i. eine unbegrenzte Stufenleiter von bestimmten Modis gibt, die ihrer Natur nach nicht endlich, sondern unendlich sind, welche aber ebenso wie das Endliche durch bestimmte, wohldefinierte und voneinander unterscheidbare* Zahlen *determiniert werden können*», *loc.cit.*, pàg.176.

[9]Per a la noció d'infinit es remet el lector al treball *Lògica, llenguatge i matemàtica*, Barcelona, Anthropos, 1993 (Estudis de filosofia 8), pàgs.181-182; 162. Noti's que s'assenyala «des del punt de mira crític», cosa que no implica la utilitat conjunta d'un ús lingüístic d''infinit' en tant que algú treballa *qua* matemàtic.

D’altra banda es podria estimar que aquest tipus d’aproximacions farien exactament el que es fa quan es busca un valor més i més ajustat a un irracional, sense poder anar més enllà. Es podria estar temptat d’assumir-ho a la manera que es defineix el límit segons els procediments que segueixen Weierstrass. El problema, però, és que el límit és un mitjà operatiu útil, no pressuposa que la sèrie numèrica que s’apropa al límit lliuri una nova forma de ser nombre, que hi hagi un afer nou: en canvi, en el cas de la sèrie de Cantor ha de lliurar l’irracional quan, de fet, mai no el lliura ni el pot lliurar.

# IV
# EL «TALL» DE J.W.RICHARD DEDEKIND

1. Deixant les definicions de Ch.Méray i de K.Weierstrass, la teoria del «tall» dedekindià, que presentà en el seu treball (exemplar per la seva senzillesa i claredat) *Stetigkeit und irrationale Zahlen*[10] *(1872)*, teoria que prou autors seguiren o on s'inspiraren – Whitehead i Russell entre d'altres[11] –, se la podria resumir molt breument de la següent manera: circumscrit als nombres racionals, les propietats dels quals cregué que calia estimar d'una manera merament aritmètica (§1), observà que es podia separar el conjunt de tots els nombres racionals en dues classes (representades per lletres majúscules amb subíndex, per exemple $A_1$ ,$A_2$ ).

És $a$ un nombre determinat, llavors es divideix tots els nombres del sistema en les dues classes $A_1$ i $A_2$, cadascuna constant d'infinits individus; la primera classe $A_1$ comprèn tots els nombres $a_1$ que són $< a$ ; la segona $A_2$ tots els $a_2$ que són $> a$. El nombre $a$ es pot fer pertànyer a la primera o a la segona classe, segons com es vulgui.

Més avall (cf.§4), afegeix que cadascuna de les moltes separacions possibles dels racionals en dues classes constitueix un *tall* [representat per $(A_1 ,A_2)$]. Quan un nombre que pertany a la primera classe és més gran que qualsevol dels altres, o quan un

[10]Cf. Dedekind, Richard, *Gesammelte mathematische Werke*, 3 vols., Braunschweig, Friedrich Vieweg, 1930-1932; l'obra esmentada es recull en el vol.III, pàgs.313-334.

[11]Cf. *Principles of mathematics*, caps. XXXIII - XXXIV, *Principia Mathematica*, II*210-214 (segments i relacions dedekindianes); III*310ss (tractament dels nombres reals), *Introductio to mathematical philosophy*, Londres, Allen and Unwin, 1919 (1ª ed.; 11ª ed. 1963), pàgs.66-73, etc.

nombre que pertany a la segona classe és més petit que qualsevol dels altres, direm que aquest nombre (racional) correspon al tall considerat, o fins i tot que produeix aquest tall.

2. Dedekind relacionà llavors els nombres racionals amb els punts d'una línia recta, cosa que serveix de base per a la geometria mètrica (§2).

3. Recorda que els grecs ja tingueren consciència de la incommensurabilitat, del fet que una línia podia tenir infinits punts que no corresponen a cap nombre racional. Si desitgem doncs de disposar de mitjans aritmètics que tinguin la mateixa continuïtat (*Stetigkeit*) que la línia recta cal la creació d'uns nous nombres a definir per mitjans merament aritmètics, fins i tot admetent que hagin estat les representacions geomètriques les que n'hagin donat l'ocasió. I per això, afegí, hem de tenir una circumscripció precisa del què és la continuïtat, a través de la qual guanyem un fonament científic per a les recerques de tots els camps continus, i que pugui servir com a base de deduccions efectives; cregué doncs que l'essència de la continuïtat rauria en el següent principi: «*dividits tots els punts d'una recta en dues classes de manera que qualsevol punt de la primera classe estigui a l'esquerra de qualsevol punt de la segona classe, llavors sols hi ha un punt que produeixi una tal distribució de tots els punts en dues classes, la partició de la recta en dos trossos*», supòsit que estimà un axioma indemostrable (§3).

4. Tornant de bell nou als nombres i als talls, es pot concloure fàcilment, afegeix, que hi ha infinitament molts talls que no es poden produir per mitjà de nombres racionals: l'arrel d'un nombre que no és un quadrat, per exemple, produeix un tall i no és un nombre racional. Per tant quan hi ha un tall que no el pot produir un nombre racional, creem un nou nombre, irracional, que prenem com a completament definit per aquest tall: diem que el nombre $\alpha$

correspon a aquest tall o que produeix aquest tall. Per a cada tall hi haurà doncs un nombre racional o irracional determinat, i considerem que dos nombres són diferents o no iguals sols quan corresponguin a dos talls diferents.

«Cada vegada que s'esdevé un tall ($A_1$ ,$A_2$) que no sorgeix per mitjà de cap nombre racional en creem un de nou, un nombre irracional $\alpha$, que considerem completament definit a través d'aquest tall ($A_1$ ,$A_2$); direm que el nombre $\alpha$ correspon a aquest tall, o que sorgeix en aquest tall. Des d'ara correspon, a cada tall determinat, un i sols un nombre determinat racional o irracional, i considerem dos nombres constantment, i sols llavors, diferents o iguals, quan corresponen essencialment a tall diferents»[12]

Per consegüent Dedekind passà després a estudiar les relacions de majoritat, de minoritat i d'igualtat, entre dos talls produïts per nombres reals tenint sempre en compte primer que els individus de les classes són nombres racionals, que poden produir també un tall mentre pertanyen a la primera o a la segona classe: d'aquí que si ($A_1$, $A_2$ ), ($B_1$ ,$B_2$ ) són dos talls en els quals sols hi ha un únic nombre $a_1$ (racional) que pertanyi a $A_1$, però no a $B_1$, llavors els dos talls no són essencialment diferents − si n'hi ha dos que pertanyin a $A_1$, però no a $B_1$, aleshores n'hi haurà una multitud infinita que pertanyen a $A_1$, però no a $B_1$, i hi trobarem relacions de majoritat i de minoritat entre talls.

Tenim doncs un tall ($A_1$, $A_2$) que distribueix (d'acord amb allò que hem dit dalt) els racionals en dues classes (el tall produït per un nombre racional pot pertànyer a una classe o a l'altra); com diu Dedekind:

«Unim les dues consideracions, s'obté doncs el resultat següent: si un tall ($A_1$ ,$A_2$) sorgeix a través del nombre $\alpha$, llavors

[12] Dedekind, *Werke*, pàg.325.

un qualsevol nombre racional pertany a la classe $A_1$, o a la classe $A_2$, segons si és més petit o més gra que $\alpha$; és el mateix nombre $\alpha$ racional, llavors pot pertànyer a l'una classe o a l'altra.

D'aquí es lliura finalment encara el següent. És $\alpha > \beta$, hi ha per tant infinitament molts nombres en $A_1$ que no estan continguts en $B_1$, llavors hi ha també infinitament molts nombres tals que igualment són diferents de $\alpha$ i de $\beta$; cada tal nombre racional c és $< \alpha$ perquè està contingut en $A_1$, i és alhora $> \beta$ perquè està contingut en $B_2$»[13].

5. Amb tot això ja pot bastir doncs el sistema dels nombres reals (§5) – canviem el sistema $R$ dels nombres racionals (i les lletres de classe, per exemple $A_1$, $B_1$, etc.) pel sistema $\mathsf{R}$ de tots els nombres reals – amb les següents lleis:

I. Si $\alpha > ß$, i $ß > \gamma$, llavors $\alpha > \gamma$ (diem que el nombre $ß$ es troba entre $\alpha$ *i* $\gamma$).

II. Si $\alpha$ i $ß$ són dos nombres diferents, hi ha infinitament molts nombres entre $\alpha$ i $ß$.

III. $\alpha$ essent un nombre determinat, tots els nombres del sistema $\mathsf{R}$ es divideixen en dues classes $U_1$ i $U_2$ (cadascuna constant d'infinits individus); la primera classe $U_1$ comprèn tots els nombres $\alpha_1$ que són $< \alpha$, la segona classe $U_2$ tots els nombres $\alpha_2$ que són $>\alpha$; el nombre $\alpha$ pot estimar-se que pertany a la primera o a la segona classe, i diem que produeix la divisió.

IV. Sols existeix un sol nombre $\alpha$ que produeixi la divisió del sistema $\mathsf{R}$ de tots els nombres reals en dues classes (principi de la continuïtat per al sistema $\mathsf{R}$[14].

[13] Ídem, pàgs.227-228. El tall ($A_1$ ,$A_2$) que produeix $\alpha$ (l'irracional) es defineix doncs a partir dels racionals, i a través d'aquesta relació de majoritat i de minoritat entre racionals. Per dir-ho així: l'irracional no apareix mai, sinó que és circumscrit a partir de la presentació de dues sèries racionals.

[14] Un resum de la prova que sols hi ha un nombre $\alpha$ que produeixi la divisió dels nombres reals seria:

6. Després passà al càlcul amb nombres reals (§6), que exemplificà amb la suma; introdueix el concepte d'interval – un sistema A de nombres racionals que té aqueta característica: són $a$ i $a'$ nombres del sisema A, també ho són tots els nombres racionals entre $a$ i $a'$ – com a mitjà útil a l'hora de definir per als nombres reals les innombrables proposicions de l'aritmètica dels nombres racionals, la qual cosa requeriria a més a més el concurs dels conceptes de quantitat variable, de funció i de valor límit: les definicions de les operacions aritmètiques més simples es basarien en aquests conceptes.

7. Tot seguit assajà dues aproximacions al valor límit en connexió entre el principi de la continuïtat en els nombres reals, i l'anàlisi infinitesimal (§7).

Caldria admetre potser que en la magnífica aportació dedekindiana a l'estudi de l'irracional hi ha una colla d'assumpcions que sols semblen poder-se avaluar com una manera d'exposar els afers, per exemple:

(1) El caràcter originàriament autònom de l'aritmètica respecte de les representacions (incloses les de la geometria), quan es podria defensar que els nombres s'haurien après a patir d'afers representatius, com podria ser els traços geomètrics.

(2) L'afirmació que el descobriment dels incommensurables pels grecs mostrà que una línia recta té més punts que el conjunt dels nombres racionals: el raonament de Dedekind (§3) és prou

---

Hi ha un altre nombre $\beta$ diferent de $\alpha$, que s'ha definit per $(A_1, A_2)$; llavors entre $\beta$ i $\alpha$ hi ha infinits nombres que han de pertànyer a $A_1$ si $\beta < \alpha$, o a $A_2$ si $\beta > \alpha$. Per tant sols $\alpha$ produirà el tall $(A_1, A_2)$.

Com esmentarem després, $\alpha$ es lliuraria sols com a $(A_1, A_2)$, és a dir, a través de sèries i no hi hauria tall: la prova de Dedekind remetria precisament a $(A_1, A_2)$.

suggerent; tanmateix es podria defensar que no hi ha pròpiament línies incommensurables, i que una tal incommensurabilitat és la resultant d'una generalització numèrica aconseguida ($3^2 + 4^2 = 5^2$) aplicada a la diagonal d'un quadrat ($1^2 + 1^2 = [\sqrt{2}]^2$); que «penséssim» una línia amb $\sqrt{2}$ implicaria sols que tindríem en compte $\sqrt{2}$ com el seu referent.

(3) L'explícita remarca que el nombre irracional es considera definit completament pel tall ($A_1$ ,$A_2$), car no sembla que hi pugui haver un nombre, racional o irracional, capaç de produir un tall entre dues sèrie de nombres sense tenir-lo prèviament[15]; aquí semblaria haver-hi un postulat des de dues sèries racionals.

(4) Certament el mateix principi de continuïtat per a les línies seria una comanda més aviat assumida és a dir, un axioma.

(5) Totes les teories dels irracionals es fonamenten, com reconeix Dedekind fins i tot per a la seva pròpia teoria[16], en allò

---

[15]Si els mots d'A.Pringsheim i de J.Molk referits a la noció purament aritmètica de tall de Dedekind són exactes («*Elle* [la coupure] *permet de définir le nombre irrationnel sans faire appel à la suite infinie ou à l'ensemble de nombres rationnels qui le représentent dans la doctrine de* Méray-Cantor *ou dans celle de* Weierstrass», *loc.cit.*, pàg.153) llavors el punt (3) sembla insalvable. Però potser no s'hauria d'excloure raonaments del següent tipus: aturant-nos al nivell de classes integrades per nombres racionals, Dedekind creu que un tall ($A_1$ ,$A_2$ ) està completament donat quan es coneix les dues classes (per exemple $A_1$), sabent, és clar, que si $a_1$ està contingut a $A_1$, també hi seran tots els nombres més petits que $a_1$, etc., cosa que sembla poder permetre consideracions amb infinitament molts individus quan el tall defineix un nombre irracional, amb la qual cosa es podria pensar que quasi s'és en una concepció de l'irracional per sèries (semblant, per exemple, a la de Cantor) de nombres racionals; alhora Dedekind defineix l'irracional a partir de l'analogia amb el principi de continuïtat per a la línia, mentre que les exemplificacions que fa de l'ús del principi de continuïtat en els límits semblen incloure tàcitament aproximacions infinitesimals.

[16]Cf. també *Was sind und was sollen die Zahlen*, *loc.cit.*, vol.III, pàgs.340-341.

que s'ha fet sempre en matemàtiques a l'hora de calcular una arrel irracional ( $\sqrt{2}$, etc.), això és, la cerca d'un nombre el múltiple del qual sigui el quadrat de l'arrel, d'acord amb *Eucl.*V.Def.5.

# V
# UNA VALORACIÓ FINAL D'AQUESTES TEORIES

Sembla que les teories aritmetitzants de l'irracional en siguin més aviat presentacions, d'un indubtable interès perquè permetrien, per exemple, un tractament unitari d'irracionals d'origen divers, però que difícilment puguin suplir el càlcul radical. No podrien definir *stricto sensu* quelcom com $\sqrt{2}$, però sí lliurar-ne una aproximació; no podrien demostrar que $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$, però oferirien al seu nivell noves corroboracions per a l'acceptació d'un tal producte.

Es conclouria que allò que ofereix el simbolisme d'un radical com $\sqrt{2}$ no ho podria expressar sinó un mitjà paral·lel, i que la seva valoració hauria de passar per un estudi de les bases que permeteren la seva assumpció prou abans del segle XIX; les aproximacions aritmetitzants serien, quan es poguessin valorar així, el perllongament de les aproximacions de tots els temps, incloses les gregues: aquesta vegada també per a les operacions amb radicals.

D'altra banda hom podria prendre, per exemple, la posició de L.Kronecker, quan criticà les teories aritmetitzants de ser poc aritmètiques (és a dir, d'introduir mitjans estranys a l'aritmètica, circumscrita aquesta a les propietats dels nombres naturals i als sistemes de nombres naturals: l'anàlisi matemàtica s'hi reduiria), i d'haver definit lògicament, però no matemàticament, els nombres irracionals, per mitjà de la qual definició es conferiria als conjunts (infinits) de nombres racionals el caràcter d'una sèrie orgànica. El criticisme de Kronecker assenyalà certament una de les dificultats d'algunes posicions aritmetitzants, i el seu rebuig d'incloure els nombres irracionals en una qualsevol demostració definitiva d'una proposició d'anàlisi matemàtica (la noció de nombre irracional no hi tindria estat de dret, sinó que seria un auxiliar que facilitaria el descobriment de fets nous) pot ser sens dubte un repte, fins i tot avui dia.

Es podria admetre en efecte que la noció de nombre irracional fos aliena a l'univers numèric quan se’l circumscrigués a les quantitats finites susceptibles de rebre l'ús de mots numèrics estàndards (i als corresponents mitjans literals abreujadors), i cal acceptar que el fet de tenir, per exemple, els conjunts infinits de nombres racionals com a nombres (irracionals) crea una certa distorsió a l'hora de concebre clarament què és el nombre. Tot i això, independentment que s’exclogués o no l'irracional de gaudir de carta de naturalesa en l'univers numèric (no seria de fet un nombre, sinó una noció auxiliar), val la pena d'assenyalar que subsistirien encara una colla de qüestions capitals, és a dir: (1) la mateixa existència d'un càlcul amb arrels irracionals, que els avantpassats acceptaren; (2) llur descobriment de l'incommensurabilitat i llur creença en incommensurables (i en irracionals); (3) l'ús polisèmic del mot 'nombre' quan s'usa per a ens diversos com són les quantitats racionals i allò que s’adjectiva d'irracional, i (4) la consegüent valoració d'uns tals fets.