F. GRAELL I DENIEL

EN QUINA ACCEPCIÓ ELS GRECS DESMOSTRAREN LA INCOMMENSURABILITAT?

QUADERNS DE FILOSOFIA

4

F. GRAELL I DENIEL

EN QUINA ACCEPCIÓ ELS GRECS DESMOSTRAREN LA INCOMMENSURABILITAT?

4

QUADERNS DE FILOSOFIA

Barcelona 2023

2ª edició agost 2023 [1ª edició febrer 1999]

ISBN: 84-923682-3-3

www.xtec.cat/~fgraell
www.quadernsdefilosofia.cat
E-mail: fgraell@xtec.cat

Podeu fer ús de l'adreça electrònica per a qualsevol correspondència amb *Quaderns de Filosofia*.

CONTINGUT

Presentació, 6.

I. **ALGUNES DADES DE L'ORIGEN DE L'INCOMMENSURABILITAT EN PLATÓ**, 7.

II. **EL CONEIXEMENT DEL «TEOREMA DE PITÀGORES»,** 19.

III. **ELS NOMBRES COSTAT I ELS NOMBRES DIÀMETRE**, 24.

IV. **LA PROVA ARISTOTÈLICA DE LA INCOMMENSURABILITAT**, 29.

V. **UNS APUNTS SOBRE EL LLIBRE X DELS *ELEMENTS***, 31.

VI. **QUÈ ÉS UN INCOMMENSURABLE?¿N'HI HA UNA PROVA GENERAL?,** 36.

PRESENTACIÓ

En un altre lloc veiérem que un expedient aritmetitzant del nombre irracional, alhora que esdevindria especialment útil com a llenguatge simplificador i generalitzador, no hauria de llevar el pas a una consideració de les bases de l'acceptació de l'incommensurable i de l'irracional.

En un tal context el nostre treball se circumscriu a l'estudi de l'abast d'un llenguatge d'incommensurables, i de la significació del fet que, diem, els grecs descobriren els incommensurables.

El propòsit ha estat doncs d’abastar la informació suficient per a lliurar una resposta prou fundada a les preguntes que una disciplina com la nostra suggereix. Alhora s’ha procurat d’oferir textos i notes que de segur, no sols fan present escrits prou coneguts, sinó que també permeten de gaudir de les reflexions especialment brillants del antics i dels seus estudiosos.

I
ALGUNES DADES DE L'ORIGEN DE LA INCOMMENSURABILITAT EN PLATÓ

Ens calen textos que ens puguin orientar enmig d'una munió de possibilitats, malgrat la dificultat afegida que se'ls podria interpretar diversament. Car sembla que hàgim d'admetre, amb els grans historiadors de la matemàtica (Cantor, Vogt, Tropfke, Heath, etc., fins a arribar a Knorr) que la troballa de l'incommensurable es féu a partir de la inexpressabilitat de l'arrel de dos en la cerca del valor de la diagonal d'un quadrat o de la hipotenusa d'un triangle rectangle isòsceles, i que per tant el nostre fil expositiu hagi d'acollir-se a un tal pressupòsit. Més avall, tanmateix, esmentarem d'altres supòsits establerts per alguns historiadors de la matemàtica grega i els motius per a bandejar-los.

Pel cap baix les referències més antigues gregues que tenim dels incommensurables es deuen a Plató i es troben en el *Menó,* en la *República* i en el *Teetet.*

1. En efecte trobem en el *Menó* (82B-85B) el prou conegut passatge en el qual Sòcrates pregunta a l'esclau com podem doblar un quadrat:

«MENÓ.- Sí, Sòcrates. ¿Però què vols dir quan afirmes que no aprenem i que aprendre és una reminiscència?¿M'ho sabries ensenyar que és així?

SÒCRATES.- Ja et deia suara que ets astut, Menó. Vet aquí que ara preguntes si et puc ensenyar, a mi justament que sostinc *que no hi ha ensenyament, sinó reminiscència, i així fas compte de posar-me tot d'una en contradicció manifesta amb mi mateix.*

MEN.- Per Zeus, Sòcrates, no pensava pas això; he parlat d'esma. Però si pots demostrar d'alguna manera que és com tu dius, demostra-m'ho.

SÒC.- No és fàcil, però ho intentaré per tu. Fes venir del teu nombrós seguici un d'aquests servents, el que vulguis, per tal de fer-te amb ell una demostració.

MEN.- Molt bé. Vine aquí.

SÒC.- ¿És grec i parla grec?

MEN.- Ja hoc crec, ha nascut a casa.

SÒC.- Para atenció i veges si et sembla que recorda o que aprèn de mi.

MEN.- M'hi fixaré.

SÒC.- Digues, minyó, ¿saps que un espai quadrat és així?

ESCLAU.- Jo,sí.

SÒC.- ¿Un espai quadrat té, doncs, iguals totes aquestes línies i n'hi ha quatre?

ESCLAU.- Ben cert.

SÒC.- I aquestes altres, que passen pel mig, ¿no són també iguals entre elles?

ESCLAU.- Sí.

SÒC.- ¿Un espai d'aquesta mena pot ésser més gran o més petit?

ESCLAU.- Ben cert.

SÒC.- Si aquest costat tingués dos peus de llargada i aquest altre dos més, ¿quants peus tindria tot plegat? Fixa-t'hi: si un costat tingués dos peus i l'altre només un, ¿veritat que l'espai seria d'una vegada dos peus?

ESCLAU.- Sí.

SÒC.- Ara, si també l'altre té dos peus, ¿no en resultarà un espai de dues vegades dos?

ESCLAU.- En efecte.

SÒC.- ¿De dues vegades dos peus, per tant?

ESCLAU.- Sí.

SÒC.- ¿Quant fa dues vegades dos peus? Compta i digues-m'ho.

ESCLAU.- Quatre, Sòcrates.

SÒC.- ¿I no hi podria haver un altre espai doble d'aquest, però semblant i amb totes les línies iguals com aquest?

ESCLAU.- Sí.

SÒC.- ¿Quants peus tindrà?

ESCLAU.- Vuit.

SÒC.- Au, doncs, prova ara de dir-me quina llargada tindrà cada línia del nou espai. La d'aquest és de dos peus. ¿Quants peus tindrá la de l'espai doble?

ESCLAU.- Evidentment, Sòcrates, el doble.

SÒC.- Ja veus, Menó, que no li ensenyo res i només li ho pregunto tot. Ara es pensa saber la longitud del costat que donarà un espai de vuit peus. ¿No ho creus així, també?

MEN.- Jo, sí.

SÒC.- ¿I ho sap?

MEN.- Ben cert que no.

SÒC.- ¿Pensa que la línia seria el doble de llarga?

MEN.- Sí.

SÒC.- Mira'l ara recordant ordenadament, tal com cal recordar. Tu digues-me: ¿sostens que d'una línia doble resulta un espai doble? Vull dir un espai, no amb un costat llarg i l'altre curt, sinó igual en totes direccions, com aquest d'aquí, però doble que aquest, de vuit peus. Veges si encara et sembla que resulta d'un costat de doble llargada.

ESCLAU.- A mi, sí.

SÒC.- ¿Aquesta línia, doncs, quedarà doblada si n'hi afegim des d'aquí una altra de llargada igual?

ESCLAU.- Ben cert.

SÒC.- I partint d'ella, prenent-ne quatre de la mateixa mida, ¿tindrem un espai de vuit peus?

ESCLAU.- Sí.

SÒC.- Tracem-ne, doncs, quatre com aquesta. ¿Serà aquest l'espai de vuit peus que dius?

ESCLAU.- Ben cert.

SÒC.- ¿Però no hi ha en ell quatre espais, cadascun més gran?

ESCLAU.- Sí.

SÒC.- ¿De quants peus serà?¿No és quatre vegades més gran?

ESCLAU.- ¿Com no ho seria?

SÒC.- ¿El quàdruple equivaldrà al doble?

ESCLAU.- No, per Zeus!

SÒC.- ¿A quantes vegades més?

ESCLAU.- A quatre.

SÒC.- D'un costat doble, minyó, no en resulta doncs un espai doble, sinó quàdruple.

ESCLAU.- Tens raó.

SÒC.- Quatre vegades quatre son setze, ¿oi?

ESCLAU.- Sí.

SÒC.- ¿De quina línia obtindrem l'espai de vuit peus?¿No pas d'aquesta que el dóna quàdruple?

ESCLAU.- És veritat.

SÒC.- El de quatre peus ¿l'obtenim amb la meitat d'aquesta?

ESCLAU.- Sí.

SÒC.- Molt bé. ¿El de vuit peus no és doble d'aquest i la meitat d'aquell?

ESCLAU.- Sí.

SÒC.- ¿I el costat no serà més llarg que aquesta línia i més curt que aquella?¿Què trobes?

ESCLAU.- A mi, bé m'ho sembla.

SÒC.- Bé, doncs, dóna'm la teva opinió i digues-me: ¿aquesta línia no era de dos peus i l'altre de quatre?

ESCLAU.- Sí.

SÒC.- Caldrà, per tant, que l'espai de vuit peus tingui una línia més llarga que la de dos i més curta que la de quatre.

ESCLAU.- En efecte.

SÒC.- Prova de dir-me'n ara la llargada.

ESCLAU.- Tres peus.

SÒC. Si són tres peus, prendrem la meitat d'aquesta línia i ens donarà els tres peus. Vet aquí dos peus i un que n'hi afegim. Aquí, igual, dos peus més un. Aquest serà l'espai que dius.

ESCLAU.- Sí.

SÒC.- Ara, si un costat té tres peus i l'altre tres peus, ¿l'espai no serà de tres vegades tres peus?

ESCLAU.- Ho sembla.

SÒC.- I tres vegades tres ¿quant fa?

ESCLAU.- Nou.

SÒC.- Però l'espai doble ¿quants peus havia de tenir?

ESCLAU.- Vuit.

SÒC.- D'una línia de tres peus no resulta, doncs, un espai de vuit peus.

ESCLAU.- Certament, no.

SÒC.- ¿De quina línia, doncs? Prova de respondre'ns exactament i, si no en vols fer el càlcul, ensenya'ns-ho.

ESCLAU.- Per Zeus, Sòcrates, no ho sé pas.

SÒC.- ¿Veus, Menó, a quin punt ha arribat el minyó en el camí de la reminiscència? Primer no sabia quin era el costat d'un *espai de vuit peus, com tampoc ara no ho sap. Però llavors creia saber-ho i responia amb aplom com si ho sabés, sense dubtar gens. Ara, en canvi, ja dubta i, com que no ho sap, no creu saber-ho.*

MEN.- És veritat.

SÒC.- ¿No ha millorat la seva situació respecte al que no sabia?

MEN.- Bé m'ho sembla.

SÒC.- Fent-lo dubtar i esbaltint-lo com fa la tremelga, ¿li hem fet algun dany?

MEN.- Jo no ho crec pas.

SÒC.- Més aviat creuria que l'hem ajudat útilment a trobar una solució. Perquè ara, ignorant-la, de bona gana la cercarà. Abans, en canvi, fàcilment hauria dit i repetit davant de molts que, per a obtenir un espai doble, cal doblar la llargada del costat.

MEN.- Ho sembla.

SÒC.- ¿I creus que ho hauria provat de cercar o aprendre mentre es pensava que ho sabia, sense saber-ho, si no hagués caigut en el dubte quan s'ha adonat que no ho sabia, i no tingués ara el desig de saber-ho?

MEN.- No ho crec pas, Sòcrates.

SÒC.- ¿Hi guanya, doncs, sentit-se esbaltit?

MEN.- Bé ho crec.

SÒC.- Veges ara el que descobrirà com a fruit de la seva perplexitat, cercant amb mi, que només l'interrogaré, sense ensenyar-li res. Vigila que no em sorprenguis ensenyant-lo o explicant-li alguna cosa, en lloc de només preguntar-li el seu parer.

Digues-me, tu. ¿Oi que tenim aquí un espai de quatre peus?¿Ho entens?

ESCLAU.- Jo, sí.

SÒC.- ¿Hi podem afegir aquest altre, que és igual?

ESCLAU.- Sí.

SÒC.- ¿I un tercer igual als dos anteriors?

ESCLAU.- Sí.

SÒC.- ¿Omplirem ara aquest racó amb un altre?

ESCLAU.- Molt bé.

SÒC.- ¿I no tindrem quatre espais iguals?

ESCLAU.- Sí.

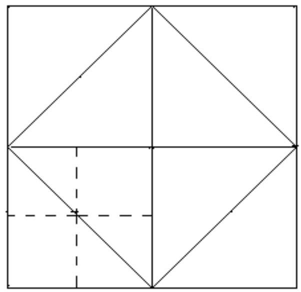
SÒC.- Bé, doncs: tot aquest espai, ¿quantes vegades és més gran que l'altre?

ESCLAU.- Quatre.

SÒC.- Però nosaltre el volíem doble. ¿Te'n recordes?

ESCLAU.- Certament.

SÒC.- Ara, aquesta línia d'angle a angle ¿no parteix en dos cadascun dels espais?



ESCLAU.- Sí.

SÒC.- ¿En surten, doncs, quatre línies iguals que tanquen aquest nou espai?

ESCLAU.- És així.

SÒC.- Observa ara. ¿Com és de gran aquest espai?

ESCLAU.- No t'entenc.

SÒC.- ¿D'aquests quatre espais, cada línia no talla cap endins la meitat de cadascun?¿Què et sembla?

ESCLAU.- Sí.

SÒC.- ¿Quantes meitats hi ha doncs en aquest espai?

ESCLAU.- Quatre.

SÒC.- ¿I en aquest?

ESCLAU.- Dues.

SÒC.- El quatre respecte al dos, ¿què és?

ESCLAU.- El doble.

SÒC.- Aquest espai, doncs, ¿quants peus tindrà?

ESCLAU.- Vuit.

SÒC.- ¿Des de quina línia?

ESCLAU.- Des d'aquesta.

SÒC.- ¿La que travessa d'angle a angle l'espai de quatre peus?

ESCLAU.- Sí.

SÒC.- Els doctes l'anomenen diagonal (διάμετρον). *Si té aquest nom, és partint de la diagonal, esclau de Menó, que, com tu afirmes, hauríem traçat l'espai doble.*

ESCLAU.- Bén cert, Sòcrates»[1].

La importància del text es palesa si assumim que la incommensurabilitat fou descoberta primerament per a la diagonal

[1] Plató: *Menó* (trad. de Jaume Olives i Canals), Barcelona, s.a., Fundació Bernat Metge (Col.lecció Catalana de Clàssics Grecs i Llatins, 119).

d'un quadrat, o per al costat d'un triangle rectangle isòsceles: però ara val més de recordar d'altres al·lusions platòniques.

2. Car Plató esmenta de passada a la *República* 546C que les generacions divines tenen un període que comprèn un nombre perfecte, però que sols hi ha un nombre geomètric per a la raça humana; l'expressió que acompanya aquest nombre geomètric, «el diàmetre racional de cinc» (ῥητὴ διάμετρος τῆς πεμπάδος, cf. *Eucl.*X, Def.3) sembla esclarir-se quan considerem un quadrat de costat 5, amb un «diàmetre racional» aproximat de 7; per tant hi hauria, per contrast, una altra manera «inexpressable» de tenir aquest diàmetre (ἄρρητος διάμετρος): el racional, com el nombre geomètric per a les generacions humanes, no és perfecte.

3. D'altra banda en el *Teetet* apareix el conegut fragment on se'ns diu que:

«*el nostre Teodor provà aquí per via de diagrames alguna cosa referida a potències* (περί δυναμέων) *i demostrà que la de tres peus i la de cinc peus no són commensurables en llargada respecte de la d'un peu; i anà seguint l'afer, prenent cas per cas totes les potències, fins a la de disset peus. En aquesta, sigui per la raó que sigui, s'aturà*» (*Teetet* 147D).

L'expressió «commensurable en llargada» (μήκει σύμμετρος) la veurem més tard en els *Elements* (llibre X) i s'usa explícitament per a línies que tenen una mesura comuna: el mot δύναμις podria ser traduït per «quadrat» car *arreu dels escrits matemàtics grecs s'entén com la segona potència*, però és preferible potser l'ús de «potència» degut al doble joc δύναμις/δύνασθαι, τετράγωνον σχῆμα/τετραγωνίζειν, que apareix més avall en la continuació del Diàleg. Teodor de Cirene mostrà doncs, segons Plató, que les potències de 3, 5,.., 17 peus (aquests quadrats) no són commensurables en llargada respecte a la (al) d'un peu, que és un peu; això és: els costats d'aquests quadrats no són commensurables. L'absència d'esment de la potència de 2 peus és significativa: segurament s'hauria fet ja òbvia perquè una tal potència (quadrat) tindria per costat la diagonal de qualsevol quadrat o la hipotenusa de qualsevol triangle rectangle isòsceles; tots els testimonis (posteriors a Plató) remeten la descoberta de l'incommensurable als pitagòrics, i hi remeten també el descobriment del «teorema de Pitàgores», així com la corresponent investigació numèrica: fóra entenedor que l'irracional es descobrís enmig d'aquestes recerques.

Aquest passatge del *Teetet* en què Teodor estableix la incommensurabilitat en llargada de les potències de 3, 5,..., 17 peus amb la de 1 peu sembla indicar que el teorema d'*Eucl*.X,9 (quadrats que no tenen l'un amb l'altre la raó d'un nombre quadrat a un nombre quadrat tenen els seus costats incommensurables en llargada) no fou quelcom que hom tingués a mà tot d'una. De fet l'escoli X, n.62 d'*Eucl*.X,9 afirma que aquesta proposició fou provada per Teetet; i a continuació del passatge esmentat trobem que Plató posa en boca d'un Teetet jove i eixerit les següents paraules:

«*Se'm va ocórrer la idea, en veure que les potències* (δυνάμεις) *semblaven ser d'una multitud il·limitada, de tractar d'aconseguir un terme col·lectiu pel qual poguéssim esmentar totes aquestes potències... Vaig dividir tots els nombres en dues classes. Els nombres que es poden obtenir de multiplicar un igual per un altre igual* (ἴσον ἰσάκις), *els vaig comparar, en la forma, amb un quadrat, i els vaig anomenar quadrats i equilaterals... Els nombres que estan entre els acabats d'esmentar, com el tres, el* *cinc, i qualsevol altre nombre que no es pot obtenir de multiplicar un igual per un altre igual, sinó que s'obté de multiplicar menor per major o major per menor, de tal manera que està contingut sempre per un costat més gran i un altre més petit, els vaig comparar amb una figura oblonga i els vaig anomenar nombres oblongs... Llavors aquelles línies rectes produïdes en quadrar el nombre pla equilàter, les vaig anomenar llargada* (μῆκρος), *i les que quadren l'oblong [les vaig anomenar] potències* (δυνάμεις), *no essent commensurables amb les altres en llargada, sinó solament en les àrees planes que formen amb les seves potències. I semblantment en els volums» (Teetet* 147Dss.*).*

A propòsit de l'ús polisèmic de δύναμις, W.R.Knorr resumeix: «*Hi ha en efecte tres sentits diferents units al terme, i serà útil de fer-ne ara un resum: (a) Al començament* δύναμις *té el seu sentit usual de 'segona potència'. Teodor verifica que 'potències', tal com aquella que té el valor de tres peus (*ἡ τρίπους δύναμις), *poden ser commensurables amb el peu-unitat en el quadrat, però incommensurables amb el peu-unitat en llargada; això és, els costats dels dos quadrats són incommensurables. (b) Però més endavant Teetet circumscriu el seu punt de mira a aquelles 'potències' que originen costats incommensurables. Estableix el seu objectiu de recollir amb una simple descripció 'totes aquestes potències',*πάσας ταύτας... τάς δυνάμεις, *sols referint-se al tipus de 'potència' explícitament triat per Teodor a fi d'estudiar-les. És d'aquesta classe de 'potències' que es fa notar més tard que és 'd'una multitud il·limitada'. (c) Per una segona transformació, potser poc afortunada,* δύναμις *està com una abreviació de 'la línia que és incommensurable amb la unitat de llargada, però el quadrat de la qual és commensurable amb la* *unitat d'àrea'; això és, δύναμις fa ara la funció del nostre terme 'irracional'* ('surd'). *La segona i la tercera accepció de δύναμις cal que no es prenguin com a redefinicions formals del terme. S'usen lliurement, com a mers mots-clau útils per a assenyalar parts del material matemàtic sota discussió en el context de l'episodi-diàleg.*»[2].

Val la pena accentuar que 'potència' (δύναμις) té aquí com a mot *ad hoc* esmerçat per Teetet (Teetet no el pren sols en aquesta accepció) un ús equivalent a $\sqrt{x}$ (on x és un nombre no quadrat)[3].

---

[2] Knorr, W.R.: *The evolution of the euclidean Elements. A study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance for early greek geometry*, Dordrecht, Reidel, 1975, pàgs.68-69; el treball d'aquest autor és sens dubte un dels més complets i equilibrats sobre l'afer dels irracionals en la matemàtica preeuclidiana: el comentari del text de Teodor i de Teetet a ibídem, pàgs.62-108.

[3] D'altres textos testimonien que la contribució de Teetet a la teoria dels incommesurables fou encara més gran. En el comentari de Papos al llibre X dels *Elements* llegim que la teoria de les magnituds irracionals:
«*té el seu origen en l'escola de Pitàgores. La descabdellà d'una manera considerable Teetet, l'atenenc, que donà proves, en aquesta part de les matemàtiques com en d'altres, d'una habilitat que ha estat justament admirada. Fou un dels més ben dotats dels homes i es lliurà, amb un bell entusiasme, a la investigació de les veritats que aquestes ciències contenen, com el mateix Plató en fa de testimoni en el treball que intitulà amb el seu nom. Pel que fa a les exactes distincions de les magnituds acabades d'esmentar i a les demostracions rigoroses de les proposicions a les quals aquella teoria dóna origen, crec que les establí fonamentalment aquest matemàtic; i més tard el gran Apol·loni, el geni del qual arribà al punt més alt d'excel·lència en matemàtiques, afegí un nombre de teories remarcables a aquests descobriments, després de molts esforços i de molt treball. Perquè Teetet distingí les potències commensurables en llargada d'aquelles que hi són incommensurables, i dividí les prou conegudes espècies de línies irracionals segons els diferents mitjans, assignant la medial a la geometria, la binomial a l'aritmètica, i l'apotema a l'harmonia, tal i com ho afirma Eudem, el peripatètic. Pel que fa a Euclides, s'esforçà a donar regles rigoroses, que va establir, relatives a la commensurabilitat i a la incommensurabilitat en general; féu precises les definicions i les distincions entre les magnituds racionals i les irracionals, donà a conèixer un gran nombre d'ordres de magnituds irracionals i, finalment, mostrà amb claredat llur abast*

II
EL CONEIXEMENT DEL «TEOREMA DE PITÀGORES»

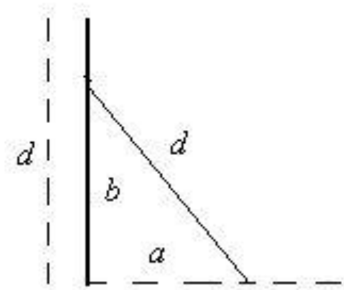
Els textos de Plató permetrien d'entrellucar potser que la incommensurabilitat de l'arrel de 2 ja era quelcom obvi, alhora que suggereixen si més no la incommensurabilitat de la diagonal d'un quadrat amb el costat a través de la comanda de doblar el quadrat, d'una banda, i per mitjà de l'esment d'una aproximació «humana» en parlar del «diàmetre racional de 5», d'una altra, a més a més d'assenyalar la important contribució de Teodor. Ara toca recordar, malgrat que el coneixement del teorema de Pitàgores remuntaria a prou temps abans de Crist, les notícies, considerablement posteriors, que remeten a Pitàgores i a Plató la cerca de nombres enters que acomplissin el teorema, i després també d'altres que ens conten la tècnica dels nombres costat i dels nombres diàmetre, emparentada potser amb l'aproximació platoniana quan parla del «diàmetre racional de 5». Més tard recordarem la prova per reducció a l'absurd que recull Aristòtil, per tant un autor sols una mica posterior a Plató.

---

complet» (citat per T.H.Heath a *The thirteen books of Euclid's Elements,* vol.III, Nova York, Dover, 1956, pàgs.3-4; el text, que suposem de Papos, sols es conserva en versió àrab). Sembla doncs -- seguint les al·lusions de Plató i d'Eudem – que el llibre X dels *Elements* conté troballes del geni de Teetet.

En efecte tenim la certesa documentada que el teorema de «Pitàgores», fins i tot la seva enunciació general, era conegut des de prou aviat a Egipte, a Babilònia, a l'Índia i a la Xina. Valgui com a exemple el següent: el teorema fou àmpliament conegut pels babilonis des del segon mil·lenni abans de Crist i es transmeté fins als temps dels selèucides; il·lustrem-ho amb alguns texts d'aquella antigor:

«un *palû* (biga?), 0;30 llarg. És baixat de dalt 0;6. De sota?».



El text BM 85196[4] cerca per tant l'altura (b = 0;30 - 0;6 = 0;24), i resol l'altre catet comptant $a = \sqrt{d^2 - b^2}$.

En el text Plimpton 322, publicat per O.Neugebauer i A.Sachs en el seu treball *Mathematical cuneiform texts*[5], tenim el que queda d'una tauleta cuneïforme: apareixen l'una al costat de

[4]O. Neugebauer, *Mathematische Keilschrifttexte*, vol.II, Berlín, 1935, (Quellen u. Studien, Gesch. Math. [A], 3), pàg.53. Seguint l'autor escrivim entre comes les seixantenes d'ordre divers, usem el punt i coma a la manera de la nostra coma decimal, i hi introduïm el zero (que ja usa Ptolomeu) com a xifra absoluta d'un ordre de seixantenes.

[5]New Haven, Conn., 1945.

l'altra una columna de nombres del 1 al 15, una columna amb la inscripció «diagonal» i la corresponent sèrie, una altra amb la inscripció «amplada» i la corresponent sèrie, i una última columna (parcialment conservada) que inclou una sèrie de nombres. Refent els nombres de *b*:

b	*a*	*d*	nombre
2, 0	1,59	2,49	1
57,36	56, 7	1,20,25	2
1,20, 0	1,16,41	1,50,49	3
3,45, 0	3,31,49	5, 9, 1	4
1,12	1, 5	1,37	5
6, 0	5,19	8, 1	6
45, 0	38,11	59, 1	7
16, 0	13,19	20,49	8
10, 0	8, 1	12,49	9
1,48, 0	1,22,41	2,16, 1	10
1, 0	45	1,15	11
40, 0	27,59	48,49	12
4, 0	2,41	4,49	13
45, 0	29,31	53,49	14
1,30	56	1,46	15

sèries numèriques que acompleixen exactament $b^2 + a^2 = d^2$.

Però els grecs atribuïren el teorema a Pitàgores:

«*Si escoltem aquells que volen contar històries antigues, en trobem alguns que refereixen aquest teorema a Pitàgores i diuen que sacrificà un bou en honor del seu descobriment*» (*Procli*

Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii ex recognitione Godofredi Friedlein, Lipsiae in aedibus B.G. Teubneri, 1873, pàg.426,6ss).

«*Pitàgores sacrificà un bou en motiu de la seva proposició* (διάγραμμα), *com Apol·lodot* [Apol·lodor?] *conta... sigui el teorema de la hipotenusa, és a dir, que el quadrat sobre seu és igual als quadrats sobre els seus costats que contenen l'angle recte, sigui la qüestió de l'aplicació d'una àrea*» (Plutarc, *No posse suaviter vivi secundum Epicurum* c.II; cf. *Symposion* VIII,2,4).

Podríem afegir d'altres cites de Diògenes Laerci (*Vides dels filòsofs* VIII,12), Ciceró (*De natura deorum* III, c.36, paràgraf 88), etc. Naturalment la història del sacrifici del bou és poc creïble (aniria contra les pràctiques pitagòriques).

I algun autor grec que els és considerablement posterior atribuí tant a Pitàgores com a Plató la manera d'aconseguir nombres racionals enters que puguin fer de costats de triangles rectangles:

«*Han estat transmesos certs mètodes per al descobriment de triangles d'aquesta classe, un dels quals el refereixen a Plató, un altre a Pitàgores. [Els darrers] parteixen dels nombres impars. Perquè el nombre impar es fa el més petit dels costats a banda i banda de l'angle recte; després es fa el seu quadrat, se sostreu la unitat i es pren la meitat d'aquesta diferència com el més gran dels costats a banda i banda de l'angle recte; finalment s'afegeix la unitat a això i es forma el costat restant, la hipotenusa. Per exemple agafant 3, quadrant-lo, i sostraient la unitat de 9, el mètode agafa la meitat de 8, o sigui 4; llavors, afegint-hi la unitat de bell nou, en tenim 5 i s'ha trobat un triangle rectangle amb un costat de 3, un altre de 4 i encara un altre de 5. Però el mètode de*

Plató ho argumenta pels nombres pars. Perquè s'agafa el nombre par donat, i se'l fa un dels costats a banda i banda de l'angle recte; llavors, bisecant aquest nombre i quadrant-ne la meitat, s'afegeix la unitat al quadrat a fi de formar la hipotenusa, i se sostreu la unitat del quadrat a fi de formar l'altre costat d'una banda de l'angle recte. Per exemple, agafant 4, el mètode quadra la seva meïtat, o 2, i així té 4; llavors, sostraient la unitat, en resulta 3, i afegint-hi la unitat en resulta 5. Així s'ha format el mateix triangle que s'obté per l'altre mètode» (*Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, Friedlein, pàgs.428,7-429,8). Per tant

	costat	costat	hipotenusa
Pitàgores	m	$\frac{m^2-1}{2}$	$\frac{m^2-1}{2}+1$
m = impar			
Plató	m	$\left(\frac{m}{2}\right)^2-1$	$\left(\frac{m}{2}\right)^2+1$
m = par.			

III
ELS NOMBRES COSTAT
I ELS NOMBRES DIÀMETRE

El que anem dient brinda l'ocasió d'introduir un tema car als antics grecs, el dels nombres costat i nombres diàmetre (diagonal). Teó d'Esmirna (potser s.II d.C.) descriu la formació d'una sèrie integrada per costats i per diàmetres[6]: la unitat, que és el començament de totes les coses, és alhora costat i diàmetre. Comencem doncs amb dues unitats, l'una que fa de costat, l'altra de diàmetre, i formem dos nombres més diferents, l'un dels quals és la suma de les dues unitats, l'altre dues vegades la primera més una vegada la segona; després anem formant successives parelles de nombres, el primer dels quals és la suma de la parella anterior (el costat), el segon el doble del primer més una vegada el segon (el diàmetre), això és:

$$\begin{aligned} c_n &= c_{n-1} + d_{n-1} \\ d_n &= 2c_{n-1} + d_{n-1}. \end{aligned}$$

Teó afegeix també que s'esdevé:

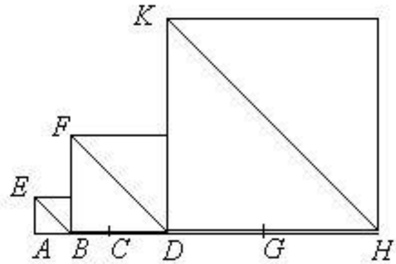
$$d_n^2 = 2c_n^2 \pm 1.$$

on se sostreu 1 si n és senar, s'afegeix si és parell, i per tant la suma de tots els quadrats dels diàmetres és igual a la suma de tots els quadrats (doblats) dels nombres costat.

[6] *Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem*, ed. E.Hiller, Leipzig,1878, pàgs.43-44.

La doctrina dels nombres costat i dels nombres diàmetre, però, és atribuïda per Procle als pitagòrics[7], el qual descriu el mateix sistema de formar nombres costat i nombres diàmetre que Teó, alhora que atribueix també als pitagòrics la distinció entre el diàmetre racional i l'irracional. Afegeix que la propietat dels nombres costat i diàmetre es prova gràficament (γραμμικῶς) en el llibre segon dels *Elements*:

«*perquè, si es biseca una línia recta i s'hi afegeix una línia recta, el quadrat sobre la línia completa incloent-hi la línia recta afegida i el quadrat sobre aquesta última sola són el doble del quadrat sobre la meitat de la línia recta original i del quadrat sobre la línia recta feta amb la meitat i la línia recta afegida*».



Procle afegeix com s'usa *Eucl.*II,10 (la figura està manllevada de l'edició de Kroll). Sigui *AB* el costat, *BC* igual a *AB*, i *CD* el diàmetre que correspon a *AB*. Llavors, per *Eucl.*II,10, els quadrats sobre *AD* i *DC* són el doble dels de sobre *AB* i *BD*. Però el quadrat

[7] *Procli Diadochi in Platonis rempublicam commentarii,* edició de Kroll, Lipsiae in aedibvs B.G. Tevbneri, 1901, vol.II, cc.23 i 27, pàgs.24-25 i 27-29 (cf. T.L.Heath a *op.cit.*, vol.I, pàg.399-400).

sobre *DC* (per tant sobre *BE*) és el doble del quadrat sobre *AB*: per sostracció el quadrat sobre *AD* és el doble del de sobre *BD*. I el quadrat sobre *DF*, el diàmetre que correspon al costat *BD*, és el doble del quadrat sobre *BD*: per això el quadrat sobre *DF* és igual al quadrat sobre *AD*, i *DF* és igual a *AD*. Això és, mentre el costat *BD* seria $c+d$, el corresponent diàmetre seria $2c+d$, *AD*.

Per tant la construcció de la sèrie numèrica de nombres costat i de nombres diàmetre que proposen Teó i Procle esdevé probablement una aproximació per a establir nombres de costats de triangles rectangles isòsceles (o quadrats) i la corresponent hipotenusa (o diagonal): el «diàmetre racional de cinc» platonià en un context de limitació humana s'hi ajusta i la relació d^2/c^2 de la sèrie tendeix a 2 per excés o per defecte a mesura que creix. *Eucl*.II,9 i 10 representaria llavors un procediment geomètric precís, al costat d'aquella altra recerca numèrica, que en qualsevol cas duu a una aproximació.

* * *

Podríem resseguir, en una direcció contrària a la que hem emprès, la construcció de quadrats cada vegada més petits d'acord amb els supòsits indicats per Procle i *Eucl*.II,10. Cosa que comporta, si sols usem nombres enters, que arribarà un moment en què la unitat establerta no ens servirà, com sigui que el costat pot anar esdevenint indefinidament petit.

En efecte val la pena de veure la semblança de la prova que hi ha un nombre irracional, continguda en els *Grunlagen der Analysis* d'Edmund Landau (Leipzig, 1930, reimpr.Frankfurt am Main, 1970, pàgs.67-68, proposició 162: «Hi ha un nombre irracional»), amb tot això: creu que la solució per a:

$$\xi \cdot \xi = 1' \quad [= 2]$$

és irracional quan ξ és un tall (proposició 161). «*Sonst wäre*

$$\xi = \frac{x}{y};$$

unter allen solchen Darstellungen wählen wir nach Satz 27 eine solche, in der y *möglichst klein ist. Wegen*

$$1' = \xi \cdot \xi = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{xx}{yy}$$

ist

$$yy < 1'(yy) = xx = (1'y)y < (1'y)(1'y),$$

$$y < x < 1'y.$$

Wir setzen

$$x - y = u$$

Dann ist

$$y + u = x < 1'y = y + y,$$

$$u < y$$

Nun ist

$$(v + w)(v + w) = (v + w)v + (v + w)w = (vv + wv) + (vw + ww)$$

$$= (vv + 1'(vw)) + ww$$

also,

$$y - u = t$$

gesetzt,

$$xx + tt = (y + u)(y + u) + tt = (yy + 1'(yu)) + (uu + tt)$$

$$= (yy + (1'u)(u + t)) + (uu + tt)$$

$$= (yy + 1'(uu)) + ((1'(ut) + uu) + tt)$$

$$= (yy + 1'(uu)) + (u + t)(u + t)$$

$$= (yy + 1'(uu)) + yy = 1'(yy) + 1'(uu) = xx + 1'(uu),$$

$$tt = 1'(uu),$$

$$\frac{t}{u} \cdot \frac{t}{u} = 1'$$

gegen

$$u < y».$$

Hom s'adona fàcilment que aquí des de $x - y = u$ i $y - u = t$, que

$$2u + t = x \text{ (valor de } FD = AD\text{)}$$

$$u + t = y \text{ (valor de } BD\text{)}$$

i que $x^2 + t^2$ correspon llavors als quadrats sobre *AD* i *DC*, tal i com diu *Eucl.*II,10; la prova sembla constituir doncs una variant a propòsit de la indicada per Procle, duta en una direcció contrària precisament perquè suposem y en els termes numèrics enters més petits possibles, i perquè assumim que $x^2 = 2y^2$. Caldria afegir un discurs semblant al que farem més avall: la prova no mostraria la irracionalitat, sinó una situació paradoxal, això és, que no podríem dir que *y* es trobés en els nombres més petits sense abastar-ne un altre de més petit, amb l'afegit (en Landau) que *x, y, u, t* són nombres enters. Això no obstaria a les presentacions de la faisó dels *Grundlagen der Analysis,* que volen ser exposicions sistemàtiques de resultats ja aconseguits, per tant que bandegen (amb encert) expressament els afers de l'abast del llenguatge amb què es fonamenta un discurs matemàtic; això es palesaria així mateix en el fet que una tal demostració de la irracionalitat basta, en Landau, per a parlar de *nombre* irracional (desestimant doncs un qualsevol axioma que s'estima necessari per al tall en Dedekind, cf. ibíd., pàg.vii i 89-91).

IV
LA PROVA ARISTOTÈLICA DE LA INCOMMENSURABILITAT

L'escoli primer del llibre X dels *Elements* estableix que l'irracional fou descobert pels pitagòrics: esdevé versemblant que ocorregués en l'estudi de la raó de la diagonal d'un quadrat amb el seu costat, o de la hipotenusa d'un triangle rectangle isòsceles amb el seu catet; els exemples de Teodor de Cirene assenyalen la incommensurabilitat entre els costats de les potències de 3 peus, 5 peus, etc., amb la d'un peu (tenint en compte a més a més el que Teetet hi afegeix), i Plató ja sap el «diàmetre racional de cinc» que si més no es pot comprendre d'acord amb les sèries numèriques de «costats» i «diàmetres» de Teó i de Procle (que les atribueix als pitagòrics), mentre la incommensurabilitat de la diagonal d'un quadrat amb el costat ja hauria estat assumida, i per això Teodor omet $\sqrt{2}$ en la seva llista.

La relació de la diagonal d'un quadrat amb el costat pressuposa que el quadrat de la diagonal és igual al doble del quadrat del costat (cf. per exemple, el text del *Menó*); de fet s'hauria pogut expressar la relació entre costats de prou triangles rectangles mitjançant nombres racionals: la recerca de nous nombres racionals que l'acomplissin duria, no sols a la incommensurabilitat de la diagonal amb el costat en els quadrats, sinó també a d'altres relacions d'incommensurabilitat.

Així mateix no deixa de ser interessant el següent text d'Aristòtil a propòsit de les reduccions a l'absurd:

«es demostra que la diagonal del quadrat és incommensurable amb els costats quan es fa veure que, en el supòsit de ser commensurable, els nombres parells seran iguals als nombres senars. Es discuteix doncs la conclusió que els senars hagin de ser iguals als parells, i es demostra, a partir d'una hipòtesi, que la diagonal és incommensurable, ja que la proposició contradictòria duu a un resultat fals» (*Primers analítics* I 23,41a).

La prova apareix en una interpolació dels *Elements* (*Eucl.*X,117) i faria així: tenint un quadrat *ABCD*, si la diagonal fos commensurable amb un costat, llavors aquesta relació, expressada amb els nombres més petits, seria $d : c$ on o d és parell i c senar, o a l'inrevés, mentre $d>c$ i per tant $d>1$; però com $d^2 = 2c^2$, d^2 seria parell i per tant d també ho seria (cf.*Eucl.*IX,29); fem ara $d = 2p$, llavors $d^2 = 4p^2$, i per tant $c^2 = 2p^2$, i llavors c també seria parell, cosa que és impossible.

V
UNS APUNTS SOBRE EL LLIBRE X DELS *ELEMENTS*

1. El desè llibre de l'obra cabdal d'Euclides és potser un dels més importants dels *Elements* i versemblantment un dels més rodons en la forma. Tracta de les línies incommensurables i irracionals – el grec euclidià no hauria admès mai que quelcom irracional fos un nombre – i aquí bastarà de moment d'apuntar-ne alguna cosa (hi tornarem en un altre lloc) per tal de circumscriure millor la mateixa noció d'incommensurabilitat de línies i d'irracionalitat.

El llibre desè essent doncs un estudi ben travat que té com a tema els incommensurables i el plural nombre d'ordres d'irracionalitat, les definicions que l'encapçalen ens orienten sobre el seu contingut, i fan així:

«*1. Es diu commensurables* (σύμμετρα) *les magnituds que es mesura per la mateixa mesura, i incommensurables les que no poden tenir cap mesura comuna.*

2. Les línies rectes són commensurables potencialment (δυνάμει σύμμετροί) *quan els quadrats sobre seu es mesura per la mateixa àrea, i incommensurables potencialment quan els quadrats sobre seu no poden tenir cap àrea com a mesura comuna.*

3. L'anterior ja establert, es prova que hi ha una multitud infinita de línies rectes que són commensurables i incommensurables, respectivament, algunes sols en longitud

(=llargada) i d'altres també potencialment, amb una línia recta assignada. Anomenem racional (ῥητή) *la línia recta assignada i racionals les línies rectes que li són commensurables ja en longitud i potencialment o sols potencialment; les que li són incommensurables, però, irracionals* (ἄλογοι).

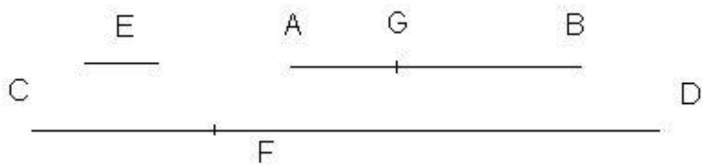
4. Anomenem racional el quadrat sobre una línia recta assignada i racionals les àrees que li són commensurables; les que li són incommensurables, però, irracionals, i irracionals les línies rectes que les originen (καὶ αἱ δυνάμεναι αὐτὰ ἄλογοι), *això és, els propis costats en cas d'àrees quadrades, però, en cas de quassevol altres figures rectilínies, les línies rectes sobre les quals es descriuen quadrats que els són iguals».*

Hi observem fàcilment que en la terminologia d'Euclides «racional» (ῥητός, literalment «expressable») té un ús una mica més ampli que en la nostra terminologia, perquè dues línies que són sols commensurables potencialment són també racionals.

2. Després els *Elements* passen a mostrar com és possible d'adonar-nos de la incommensurabilitat, un afer del tot interessant per a nosaltres: primerament *Eucl*.X,1 estableix que, tenint dues magnituds desiguals, de la més gran sostraient més de la meitat, i de la resta de la més gran sostraient més de la meitat, etc., hi haurà sempre un sobrant menor, de la més gran, que la magnitud més petita de les dues inicials; llavors *Eucl*.X,2 fa com segueix:

«*En sostreure contínuament i per torns la menor de dues magnituds desiguals de la més gran, si la que sobra no mesura mai la que la precedeix, les magnituds són incommensurables.*
Perquè, tenint dues magnituds desiguals AB, CD, *i* AB *essent la menor, en sostreure contínuament i per torns la menor de la més gran, posem que la que sobri mai no mesuri la que la precedeix: dic que les magnituds* AB, CD *són incommensurables.*

Perquè, si són commensurables, alguna magnitud les mesurarà. Mesuri-les doncs una magnitud − si això és possible −, i sigui aquesta E*;* AB *mesurant* FD, *sobri* CF *menor que* AB*;* CF *mesurant* BG, *sobri* AG *menor que* CF, *i sigui repetit aquest procés contínuament fins que sobri una magnitud menor que* E. *Suposa tot això fet, i que* AG *sobri menor que* E.



Llavors com E *mesura* AB, *mentre* AB *mesura* DF, E *mesurarà també* FD. *Però també mesura tot* CD; *per això mesurarà el sobrant* CF. *Però* CF *mesura* BG*; llavors* E *mesura també* BG. *Però també mesura tot* AB*; per això mesurarà també el sobrant* AG, *el major el menor: cosa que és impossible.*
D'aquí que cap magnitud no mesurarà les magnituds AB, CD; *per això les magnituds* AB, CD *són incommensurables. Per això, etc.*»[8]

---

[8]Notem que fent

$$CD/AB = b_0 + CF/AB$$
$$AB/CF = b_1 + AG/CF$$

etc.

i per tant $CF/AB = 1/(b_1 + AG/CF)$

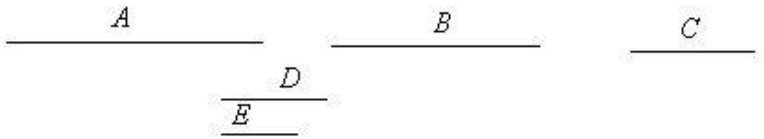
etc.

llavors trobem la fracció contínua regular

$$CD/AB = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \ldots}}$$

que en aquest cas és infinita.

Amb un tal criteri d'incommensurabilitat *Eucl.*X,5 afirma que dues magnituds que són commensurables tenen l'una respecte de l'altra la raó que un nombre té respecte d'un nombre.



Si *A* i *B* són commensurables tenen una mesura comuna: sigui *C*. Si *C* mesura tantes vegades *A* com *D* la unitat, i *C* mesura tantes vegades *B* com *E* la unitat,

«*llavors la unitat mesura el nombre* D *el mateix nombre de vegades que la magnitud* C *mesura* A*; llavors com* C *és a* A, *així la unitat a* D*; llavors, inversament, com* A *és a* C, *així* D *a la unitat*».

Paral.lelament *C* és a *B* com la unitat és a *E*. Per això, *ex aequali*, com *A* és a *B*, així el nombre *D* a *E*.

Apuntem d'altres proposicions del llibre X dels *Elements*, per exemple:

Si dues magnituds tenen l'una a l'altra la raó d'un nombre a un nombre, són commensurables (*Eucl.*X,6).

Les magnituds incommensurables no tenen la raó d'un nombre a un nombre (*Eucl.*X,7-8).

Els quadrats sobre línies rectes commensurables en longitud tenen l'un a l'altre la raó d'un nombre quadrat a un nombre quadrat, i els quadrats que tenen l'un a l'altre la raó d'un nombre quadrat a un nombre quadrat, tenen també els seus costats commensurables. Però els quadrats sobre línies rectes incommensurables en longitud no tenen l'un a l'altre la raó d'un nombre quadrat a un nombre quadrat; i els quadrats que no tenen l'un a l'altre la raó d'un nombre quadrat a un nombre quadrat no tenen els seus costats commensurables en longitud (*Eucl*.X,9).

Si quatre magnituds són proporcionals, i la primera és commensurable amb la segona, la tercera ho serà amb la quarta; si la primera és incommensurable amb la segona, la tercera ho serà amb la quarta (*Eucl*.X,11).

Si dues magnituds commensurables s'afegeixen l'una a l'altra, el tot serà commensurable amb cadascuna d'aquelles; i si el tot és commensurable amb una, les magnituds de partida són commensurables (*Eucl*.X,15).

Si dues magnituds incommensurables s'afegeixen l'una a l'altra, el tot serà incommensurable amb cadascuna d'aquelles; i si el tot és incommensurable amb una, les magnituds de partida són incommensurables (*Eucl*.X,16).

El rectangle contingut per línies rectes commensurables sols potencialment és irracional, i el costat del quadrat que li és igual és irracional, i pren el nom de 'medial' (*Eucl*.X,21).

Si s'afegeix l'una a l'altra dues línies rectes sols commensurables potencialment, el tot és irracional, i pren el nom de 'binomial' (*Eucl*.X,36).

Quan d'una línia recta racional se sostreu una línia recta racional commensurable sols potencialment amb tota aquella línia, el sobrant és irracional, i pren el nom d''apotema' (*Eucl*.X,73), etc.

Fem obsevar que les línies medials, binomials, i les apotemes són irracional segons el criteri euclidià d'irracionals: no sols són incommensurables en longitud amb les magnituds de partida, sinó també potencialment.

VI
QUÈ ÉS UN INCOMMENSURABLE? ¿N'HI HA UNA PROVA GENERAL?

Per a una certa avaluació del recollit, i fer-ho d'una manera clara, exposarem primerament que sembla haver-hi una assimilació de càlculs d'uns casos a d'altres, si hem de parlar d'incommensurabilitat; això certament no llevaria una segona dificultat, és a dir, la prova que n'hi ha fins i tot acceptant l'assimilació (per a entendre'ns: la seva prova general), que discutirem tot seguit. Després ens acararem d'una manera més ferma a la significació de la incommensurabilitat, que descobrirem un afer lingüístic rellevant; més tard continuarem amb una nota important sobre la prova de la incommensurabilitat continguda en els *Elements*, i acabarem amb una altra nota, aquesta vegada a propòsit del conjecturable descobriment de l'incommensurable per mitjà de l'*anthyphairesis*.

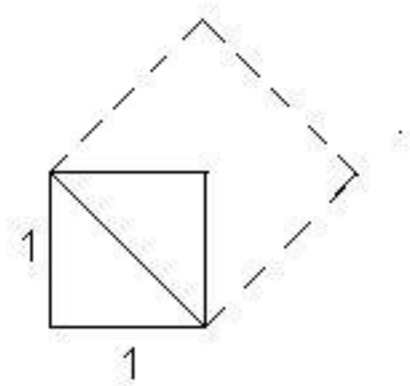
1. Els incommensurables de Teodor i Teetet (segons Plató), això és, dels costats de nombres d'àrees de quadrats amb el costat de l'àrea unitària; l'arrel racional platònica de cinquanta, la cerca d'un quadrat doble, la prova de la incommensurabilitat aristotèlica, la recerca d'algun mètode de trobar nombres que acompleixin el teorema de la hipotenusa (atribuïda a Pitàgores i a Plató); el mateix tema dels nombres costat i dels nombres diàmetre encaminat a la resolució de les relacions entres costats i la diagonal dels quadrats, etc. – totes aquestes circumstàncies semblen dur-nos a relacionar els incommensurables (o el seu descobriment) amb *estudis numericogeomètrics, de càlcul numèric, i amb les conseqüències de les relacions d'aquests estudis.*

En efecte no volem pressuposar necessàriament que el descobriment pitagòric de la incommensurabilitat tingués exclusivament el seu origen en la impossibilitat de trobar un nombre per a l'arrel de dos, i precisament a propòsit de la diagonal d'un quadrat (malgrat que podria haver estat així perfectament); car no hauria estat impossible que d'altres casos que haguessin considerat paradoxals haguessin motivat l'estudi més simple de l'arrel de dos per part dels cercles pitagòrics; o que la descoberta de casos paradoxals no hagués dut a l'estudi del cas més simple (l'arrel de dos) en d'altres cercles, etc. Perquè la reconstrucció exacta dels fets sembla ser sols quelcom conjecturable, i cau fora del nostre estudi.

La qüestió es redueix doncs al següent: diguem que al temps de Teodor ja es donava per descomptada la incommensurabilitat de l'arrel de dos amb l'arrel d'u, que versemblantment un tal fet s'exemplificava − en les cites de Plató i d'Aristòtil (en aquest darrer moltes vegades) sempre es fa així − amb la diagonal del quadrat respecte del seu costat.

Així i tot algunes afirmacions podrien semblar estranyes a primera vista; es tracta que, des d'algun punt de mira, es podria creure que no hi hauria incommensurables en una accepció: hom podria esforçar-se a dividir la diagonal i el costat d'un quadrat en parts alíquotes (dues unitats serien iguals quan se les avalués iguals) talment com podria assajar de repartir qualsevol línia en parts alíquotes, i llavors, sembla, l'afirmació que dues línies no poguessin tenir cap mesura comuna no seria de tot encertada en aquesta accepció; o encara millor: hom podria afigurar-se, fingidament o no, que és possible la commensurabilitat entre la diagonal i el costat d'un quadrat malgrat que admetés i tot que ara no sap trobar-ne, de parts alíquotes.

És clar que aquí hi ha un afer de generalització de les relacions entre els costats i la diagonal del quadrat. El testimoni de les antigues cultures i de les recerques atribuïdes als pitagòrics palesarien diàfanament que les relacions numèriques que satisfan triangles rectangles foren conegudes a bastament. Llavors, s’afegiria, s’assajà d'extreure la diagonal o el costat de quadrats a partir d'altres nombres de costat o de diagonal per «imitació» dels casos trobats, o el costat d'un quadrat des de la seva àrea, també per «imitació» a partir dels casos trobats, – llavors la imitació del càlcul numèric hauria esdevingut sorprenent: perquè ja fos a partir dels costats respecte de la diagonal, ja fos a partir d'un nombre atribuït a una àrea respecte al costat del quadrat, la resultant lliuraria la dada que no s’hauria après cap nombre per a la diagonal o de vegades per al costat; i així capgiraríem la commensurabilitat generalitzada pels atzucacs d'una imitació numèrica de quelcom que hauríem après en d'altres càlculs numèrics. En el gràfic el quadrat de la diagonal *hauria de tenir* dues unitats quadrades, i per tant el costat d'aquest quadrat *hauria de ser* inexpressable; caldria afegir així mateix quelcom de similar per al costat dels quadrats de Teodor i de Teetet. Certament la suposada commensurabilitat entre dues qualssevol línies en l’accepció, per exemple, que s’admetés la possibilitat que ho fossin, commensurables, comportaria que la resolució del teorema de Pitàgores per al cas estudiat, això és, la troballa numèrica concreta per als costats i la diagonal, pogués diferir-se indefinidament. I llavors el manteniment de la incommensurabilitat fóra una conseqüència del gaudi d’expressions que serien una resultant d’unes prèvies relacions numericogeomètriques trobades.



Per això la cerca de les sèries de nombres costat i de nombres diàmetre s’ofereix com un sistema (potser molt posterior) per a trobar successius valors per al costat i per a la diagonal d'un quadrat, i per a una aproximació de l'arrel de dos.

2. No pressuposem cap reconstrucció del camí que dugué els pitagòrics a la descoberta de l'irracional ni de les proves i construccions que guiaren Teodor i Teetet. Si més no és simptomàtic que totes les reconstruccions de les quals tenim coneixença mereixerien, amb les variants corresponents, el nostre comentari: *hi ha una assimilació de càlculs numèrics apresos a nous problemes aritmeticogeomètrics*. Fet i fet el nostre esbós recull l'opinió dels grans historiadors que el descobriment es féu a propòsit de l'estudi de triangles rectangles i de quadrats, i tant Plató com Aristòtil sempre discuteixen els afers de la

incommensurabilitat en contextos del costat i del diàmetre (diagonal) del quadrat.

Però el treball de W.R.Knorr *The evolution of the euclidean Elements*[9], dedicat a les magnituds incommensurables, permet d'introduir un altre ordre de qüestions: car acceptant també que l'origen dels incommensurables arrencà de l'estudi dels costats i de la diagonal dels quadrats, creu – com Heath i d'altres – que la prova recollida per Aristòtil (i conservada a *Eucl*.X,117) fou en essència la que demostrà la incommensurabilitat, malgrat que aquesta prova fou retocada *a posteriori*, perquè:

«*primerament, la prova està posada en la forma de* reductio ad absurdum. *El resultat, la incommensurabilitat del costat i del diàmetre, s'enuncia al començament. Però això no podria haver estat així en el curs original del pensament que aconduís al descobriment de la incommensurabilitat. Els pitagòrics tingueren els enters com els fonaments de totes les coses; reduïren l'harmonia, el moviment dels cels, i fins i tot l'ànima i la justícia, a proporcions numèriques. Però l'existència de magnituds incommensurables hauria capgirat aquesta pressumpció filosòfica. D'aquí que l'asserció de la incommensurablitat del costat i del diàmetre difícilment hauria estat el punt de partida apropiat de l'estudi pitagòric d'aquestes magnituds. Els estudis primers deuen haver pres més aviat la forma d'una recerca de nombres que expressessin la raó d'unes tals magnituds. És a dir, la commensurabilitat fou una assumpció implícita en aquest estudi, i la contradicció produïda, que els nombres impars són pars, aparegué sense anticipació. Reexaminant un tal raonament, els pitagòrics haurien reconegut al capdavall l'assumpció falsa: que les dues magnituds havien de tenir una raó numèrica. Per*

[9] Cf. nota 2.

aquest motiu hauria sobrevingut una nova comprensió de la relació entre els conceptes de nombre i de magnitud»[10].

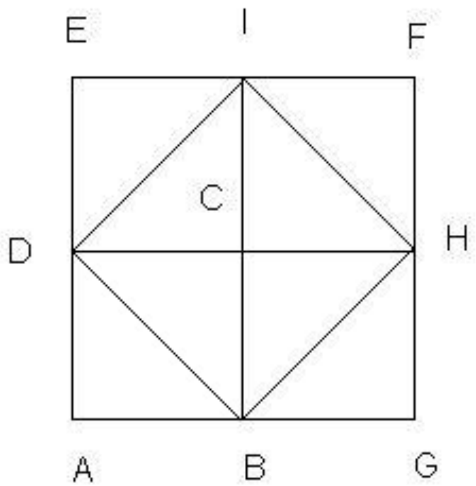
Uns tals motius, i d'altres[11] farien creure doncs que la prova fou agençada d'acord amb una sistematització.

«L'aproximació pitagòrica hauria estat 'ingènua' en el sentit que s'haurien intercanviat magnituds i enters, els uns pels altres, sense reconèixer les dificultats formals incloses. Tanmateix això difícilment fou un fet privatiu dels pitagòrics: car va ser característic de tots aquells geòmetres de la tradició mètrica representats en el corpus heronià, que tracta generalment els problemes geomètrics com si fossin càlculs aritmètics. En aquest aspecte perseveraren en un estil de geometria típic també entre els egipcis i els babilonis; l'obtenció d'àrees i volums a partir de les llargades dels costats, l'expressió del diàmetre d'un quadrat de costat donat, la resolució dels costats d'un rectangle l'àrea i el perímetre del qual eren donats, tot això són problemes trobats en les tauletes babilòniques. Sols Euclides, i aquells que per consegüent acceptaren els Elements *com el punt de partida dels seus propis estudis, deixaren la pràctica mètrica de tractar les línies com a nombres. Ara, la motivació per a separar la magnitud i el nombre està en el reconeixement de l'existència de magnituds incommensurables. D'aquí que els estudis pitagòrics que aconduïren a un tal reconeixement no haurien separat la magnitud del nombre, com s'hi troba en la prova de la incommensurabilitat dels* Elements.

[10]Knorr,W.R, *op.cit.*, pàg.24.
[11]Cf. ibídem, pàgs.21ss.

Quin aspecte podria tenir una prova pitagòrica purificada d'aquests trets anacrònics es pot copsar per la lliçó geomètrica descrita en el Menó *platònic (82B-85B). En aquest passatge Sòcrates guia l'esclau de Menó en la construcció del quadrat que és doble d'un quadrat donat. En dos intents infructuosos per a especificar el costat del quadrat doble, l'esclau escull primerament el doble del costat del quadrat donat, i després tres meitats del costat donat. Finalment es reconeix que el costat cercat és el diàmetre del quadrat donat. Guiant-lo en aquest descobriment, Sòcrates assenyala el fet que el diàmetre i el costat són incommensurables quan aconsella al noi que tracti d'indicar el costat del quadrat doble si no pot comptar-lo (84A). El diagrama pel qual es resol finalment el problema apareix en la figura 1. Si el quadrat donat és* ABCD *de costat* AB*, es pot veure fàcilment que el quadrat* DBHI *sobre el diàmetre* DB *és el doble del quadrat* ABCD.

Usant les propietats del senar i del parell en referència amb la mateixa figura, pot mostrar-se la incommensurabilitat del costat i del diàmetre. Suposem que es preguntés quantes vegades es pot comptar el costat DB *en el diàmetre* DH*. Si aquestes línies fossin commensurables, es podria considerar que cadascuna representa un nombre, és a dir, el nombre de vegades que cadascuna és mesurada per llur mesura comuna. Podem demanar que aquests nombres es donin en termes reduïts, en el sentit que els dos no siguin parells. Els quadrats* DBHI *i* AGFE*, de costats* DB *i* AG *respectivament, representen així nombres quadrats. Ara,* AGFE *és el doble de* DBHI*, com es veu pel diagrama. Així* AGFE *representa un nombre quadrat parell. El seu costat* AG *(igual a* DH*) ha de ser parell. Per tant* AGFE *és divisible per quatre. Com* ABCD *és un quart de* AGFE*, representa un nombre. El seu doble és el nombre quadrat* DBHI*. D'aquí que* DBHI *i el seu costat* DB *siguin nombres parells. S'ha mostrat així, contràriament a* *l'assumpció, que els nombres* DB *i* DH *són parells els dos. Per tant aquestes dues línies han de ser incommensurables.*



La passa que demana de prendre els termes més petits possibles necessita una justificació. La pot rebre per mitjà de la impossibilitat d'una bisecció infinita d'un enter finit. Refent la prova hi podem incorporar aquest argument de la següent manera: s'ha fet palès que AGFE*, un nombre quadrat, és parell. Més tard s'ha fet palès també que la seva meitat, el quadrat* DBHI*, representa un nombre quadrat parell. Continuant amb el mateix argument, la seva meitat, el quadrat* ABCD *representa així mateix un nombre quadrat parell. Aquest procés, concebut geomètricament, òbviament continua d'una manera indefinida, tot resultant a cada pas un nombre quadrat par més petit. Però si* AGFE *representa un nombre finit, la seva successiva divisió en dos a la llarga ha d'acabar. D'aquesta manera l'assumpció inicial* *que* AG *i* DB*, els dos, representen nombres ha dut a una impossibilitat. En aquesta versió no es requereix l'habilitat d'agafar els nombres* AG *i* DB *en termes reduïts. Podria haver-se usat la regressió infinita, en una forma una mica modificada, per a mostrar que la tria de termes reduïts és sempre possible. Per conseqüent aquesta versió de la prova que utilitza la regressió infinita podria haver-se revisat en profit de la forma més econòmica donada prèviament per nosaltres*.

Les dues versions eviten els trets euclidians anacrònics. Observant la segona versió no es pot deixar de reconèixer la seva semblança amb els arguments-regressions establerts per Zenó d'Elea, en particular la seva paradoxa de l'estadi. En efecte Aristòtil fa justament això. En els Primers analítics 65b 16-21 *critica aquells que tracten d'usar la paradoxa de Zenó sobre la impossibilitat del moviment com la causa de la incommensurabilitat de la diagonal. Una tal remarca deu referir-se certament a una prova que eduïa una contradicció des d'una regressió infinita que englobava enters*»[12].

Tot el text de W.R.Knorr és prou interessant: l'autor reconeix que es tracta d'una conjectura perquè no tenim cap document de l'època que pugui assegurar el camí que emprengueren per a descobrir la incommensurabilitat. *Si fou aquest el camí per a provar la incommensurabilitat,* llavors val que es tractà d'una *assimilació* entre resultants numericogeomètriques simples i les relacions numèriques habituals.

Però es podria dubtar que un tal tipus de prova fos la que introduís realment la investigació dels incommensurables, perquè, què demostra? Si deixéssim de banda per uns instant *part* de les *nostres* habituacions i de les *nostres* obvietats reconeixeríem, sembla, que la primera versió conclou *només* que *DH* i *DB* no

[12] Ibídem, pàgs.25-27.

poden ser parell i senar (o senar i parell) respectivament, i que la segona versió acaba *sols* amb una regressió infinita i amb el fet que un nombre no és divisible indefinidament. És a dir *semblen* proves que mostren més aviat *conseqüències* de la incommensurabilitat, si voleu *apories*, que no pas la incommensurabilitat. Hauria calgut quelcom *directe* que uns tals atzucacs corroboren (serveixen, si voleu, de «prova general»), perquè la *reducció a l'absurd* com a tal *no sembla mostrar res*, sinó que ens deixa com estàvem: aquí (si no s'hi afegís res) ens trobaríem davant d'un *enigma*.

Repassem-ho ara des d'una altra perspectiva: si desassimilem els nombres adjudicats als quadrats, tota la prova estreba que tenim tres nombres quadrats:

$$x \qquad y \qquad z;$$

unes relacions numericogeomètriques:

$$1 \qquad 2 \qquad 4;$$

i que assumim que l'arrel d'un nombre doble és parell. Llavors l’assumpció que o y o z sigui senar amb l'assimilació de nombres i de relacions numèricogeomètriques, i les obvietats esmentades, palesen més aviat un desig de joc. Car o admetem directament que y i z són els dos parells o renunciem a l'assimilació.

La prova no sembla que faci cap esment dels incommensurables, sinó que no puc pretendre tenir uns tals nombres per a *DB* i *DH*, un d'aquests senar, quan alhora exigeixo que els seus quadrats siguin nombres l’un dels quals doble de l’altre[13].

[13]Teodor havent provat per gràfics la incommensurabilitat dels costats d'algunes potències amb el costat d'un peu, Knorr assaja després de reconstruir amb detall el camí pel qual els pitagòrics descobriren l'incommensurable, i el

3. Totes les proves generals de la incommensurabilitat, fins i tot en el cas que els pitagòrics n'haguessin ofert alguna del tall de la proposada per Knorr, i si més no la d'Aristòtil i la dels *Elements,* serien més aviat revestiments.

La incommensurabilitat de la hipotenusa d'un triangle rectangle isòsceles amb el catet expressaria més aviat, per exemple, la impossibilitat d'obtenir un nombre per a aquella magnitud a partir d'un nombre donat al quadrat sobre una tal magnitud, i un tal fet simple establiria la incommensurabilitat, precisament per l'assimilació de les operacions numèriques.

És a dir, la generalització que afirmaria que no hi ha cap nombre per al catet, la unitat del qual permetés la mesura de la hipotenusa, recauria sobre el catet i la hipotenusa com a magnituds, de tal manera que hi hauria una ambigüitat entre la incommensurabilitat per motiu dels nombres i la relació de magnituds, i es podria estimar que són les magnituds *per se* – independentment dels nombres – les que són incommensurables.

Llavors val la pena d'anotar que o la incommensurabilitat entre la hipotenusa i el catet és simplement el fet que no sabem trobar un nombre el quadrat del qual sigui un específic nombre

---

que Teodor, etc., seguiren per a ampliar-ne les resultants: intenta de refer l'aritmètica pitagòrica del segle V a.C., interpreta part del llibre II dels *Elements* a tall d'una exemplificació per a estudis mètrics i aritmètics (que precisament portarien a una acceptació general geomètrica del teorema de Pitàgores i a la descoberta de la incommensurabilitat per la corresponent reducció a l'absurd, cf. ibídem, pàgs.179-180), prova de reconstruir d'una manera prou original el treball de Teodor (que seria responsable d'una part del llibre II dels *Elements*) i de Teetet passant per Arquitas (Knorr fa un acurat estudi del text que en conservem per Boeci), i apunta la contribució d'Èudox al conjunt de la teoria dels incommensurables inclosa en els llibres X i XIII dels *Elements,* en general desconsiderada pels estudiosos: un recorregut prou suggerent, malgrat tractar-se d'una reconstrucció massa reelaborada (en qualsevol cas hi hauria les assimilacions).

aconseguit per assimilació d'altres operacions, o la reiteració que no sabem trobar un nombre per a *cada* específic nombre aconseguit per l'assimilació. I fet i fet l'afirmació que «no és possible de trobar un nombre per a la hipotenusa d'acord amb el nombre del catet» és una generalització que permet aquesta doble lectura.

Els grecs haurien constatat, en l'assimilació de les operacions apreses, la impossibilitat de trobar una relació entre *nombres* per al catet i per a la hipotenusa, i per això s'hauria fet requesta d'una prova general (ho són pel cap baix la d'Aristòtil i la d'Euclides).

No ens cal doncs esbrinar – afer que sols podria ser conjectural – el possible camí assimilador entre nombres i magnituds geomètriques que seguiren Teodor i Teetet per a trobar noves magnituds incommensurables, però sens dubte el contingut explícit dels seus textos sembla que permeti més aviat d'acceptar aquests supòsits: que hi ha una assimilació d'operacions, que s'adjudica uns nombres a figures, i que es palesa una impossibilitat.

En aquest sentit quan avui parléssim d'irracional no faríem res més, malgrat que uséssim els nombres d'acord amb les nostres tècniques: $\sqrt{2}$ seria irracional perquè no hi ha un nombre (racional) que multiplicat per si mateix faci 2; o bé podríem reiterar la cerca de nous nombres d'una manera indefinida: car la cerca d'un nombre aproximat per a aquella arrel esdevé – des d'un punt de mira numericogeomètric – un canvi de les unitats establertes per unitats fraccionàries o decimals, etc.

4. El teorema d'*Eucl.*X,2 pel qual s'estableix la incommensurabilitat de dues magnituds podria creure's una petició de principi (no seria pas evident que es pogués sostreure

indefinidament la menor de dues magnituds de la major i per torns, sense trobar quelcom que les mesurés) que se seguiria d'una reducció a l'absurd.

Això palesa un punt de contacte amb el suggerent treball d'Arpád Szabó, que té l'encert bàsic de distingir entre (1) la troballa que no hi ha nombres per a certes operacions numèriques[14] i (2) la resultant *teòrica* (*ideal*) de la incommensurabilitat linial a la qual dugué; per tant que hi hauria duess qüestions diverses, l'una la *prèvia* dada numericogeomètrica, la segona la *prova* de la incommensurabilitat (l'afirmació que no hi hauria ara commensurabilitat, davant de la de no poder-n'hi haver).

És cert que evitaríem de sostenir la tesi de Szabó sobre el descobriment de la incommensurabilitat linial (a distingir, segons l'autor, del nombre irracional) a partir de la cerca d'un mitjà proporcional (cf.*Eucl*.VIII,12-20), del fet que les proposicions *Eucl*.VIII,13 i 18 haurien estat conegudes abans que *Eucl*.VI,13 (la construcció d'un mitjà proporcional entre dos qualssevol segments linials), i aquesta abans que *Eucl*.II,14 (la construcció d'un quadrat a partir d'una figura rectilínia donada), tot plegat des d'una nota d'Aristòtil (*De anima* II,2 413a 13-20) i amb la prèvia observació que interpreta δύναμις com «el valor del quadrat d'un rectangle» o «quadrat»[15]; el motiu és ben simple: *Eucl*.VI,13 està ja bastida en termes de proporcionalitat (cf.*Eucl*.VI,1-8); no s'hauria pogut arribar a adonar-se que no és possible de trobar un nombre que fos el mitjà proporcional de dos altres qualssevol gràcies a *Eucl*.VI,13 (que permetria, segons l'autor, de transformar qualsevol rectangle en un quadrat), sense mostrar alhora que una proporció no és un afer numèric: versemblantment hi ha doncs un cercle viciós en

---

[14]Szabó, A.: *Anfänge der griechischen Mathematic*, Budapest, 1969 (el citem per la traducció d'A.M.Ungar: *The beginnings of greek mathematics*, Dordrecht, Reidel 1978., pàgs.53 i 215).

[15]Cf. ibídem, pàgs.33-98.

l'argumentació. No qüestionem l'avaluació que un grec pogués tenir de la proporció (entre magnituds), sinó si allò que avaluava així pogués tenir tant pes per a *demostrar* la proporcionalitat indicada a *Eucl.*VI,13 referent a transformar *un qualsevol* rectangle en un quadrat, que *nosaltres* puguem creure que tragué d'una tal demostració la impossibilitat de mitjans proporcionals per a certs nombres; una valoració doncs que és *nostra*, i sembla prou difícil de mantenir sense una prèvia discussió sobre la proporcionalitat.

Però deixant aquest fet, pel cap baix discutible i fins a cert punt secundari, Szabó passa a la *prova* de la incommensurabilitat, afegint amb prou encert:

«Passem ara a la qüestió de com Euclides aplicà la substracció successiva (ἀνθυφαίρεσις) *en geometria. Hi ha sols un teorema geomètric (X.2) que esmenta aquest mètode... En un sentit obvi aquest teorema és una rèplica de la proposició aritmètica (VII.1) citada dalt. La major diferència entre les dues s'origina del fet que no hi ha* 'magnituds mínimes' *en geometria* [en nota: *Procli Diadochi in Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii,* ed.G.Friedlein (Lipsiae 1873) 60.11: έν γεωμετρία γαρ τὸ ἐλάχιστον ὅλως οὐκ ἔστιν....]. *D'aquí que* ἀνθυφαίρεσις, *quan s'aplica a dos segments linials arbitraris, no cal que acabi sempre, mentre que en aritmètica ho ha de fer, fins i tot en el cas de nombres que són primers entre si. La proposició X.2 dóna un criteri d'incommensurabilitat en termes de substracció successiva, és a dir, que, quan aquest procés continua fins a l'infinit, les dues magnituds a les quals s'està aplicant són incommensurables. Tanmateix* un tal criteri és merament teorètic *perquè depèn d'haver establert que un determinat procés és infinit;* no pot

aplicar-se en la pràctica. *En la meva opinió això explica el fet que els antics, com s'ha fet observar sovint, no semblen haver fet mai ús de la proposició X.2 en les seves proves matemàtiques*»[16].

Després estudia detingudament la qüestió dels nombres costat i nombres diametre, amb les seves conseqüències numèriques; la seva conclusió:

«*és que ni la substracció successiva ni la seva variant moderna, 'les fraccions contínues', no poden servir com a criteri pràctic de la incommensurabilitat en geometria. La incommensurabilitat és un concepte* teorètic; *no és una propietat empírica de les quantitats geomètriques*»[17].

Les enginyoses construccions de H.Rademacher i O.Töplitz a *Von Zahlen und Figuren*[18] li són útils per a remarcar de bell nou la satisfacció d'exigències en matemàtics i de distingir-les d'un criteri pràctic pel qual – i amb raó – dues magnituds són finalment commensurables, cosa que explicaria que els antics no haguessin usat mai *Eucl*.X,2 com a criteri d'incommensurabilitat: el nostre autor gira doncs els ulls a la prova indirecta conservada en Aristòtil i en *Eucl*.X,113, on desapareix qualsevol instància empírica i la falta de claredat i de convenciment d'anteriors proves, bastint-se per conseqüent com a prova merament teòrica:

«*les magnituds geomètriques sols poden ser incommensurables* en teoria. *Sembla doncs que es posà en connexió el descobriment de la incommensurabilitat linial amb el desenvolupament de la prova*

---

[16] Ibídem, pàgs.203-204.

[17] Ibídem, pàg.209.

[18] Berlín, 1930, pàg.258; cf. també O.Töplitz *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*, Berlín, 1949, pàgs.2-6.

per contradicció i amb el rebuig de l'empirisme en matemàtiques»[19].

¿No haurien manllevat els antics geòmetres – conclou el nostre autor – la prova per reducció a l'absurd, dels eleàtics?[20]

Si més no un dels molts mèrits d'aquest treball rau en el fet que remet l'estudi d'alguns mètodes matemàtics a la revisió de les relacions entre l'experiència i la matemàtica.

5. El nostre fil argumentador sembla que valdria així mateix per a d'altres tesis poc probables sobre l'origen del descobriment de la incommensurabilitat, per exemple l'oferta per K.von Fritz[21], S.Heller[22], i d'altres, quan proposaren que els pitagòrics descobriren la incommensurabilitat en adonar-se que l'*anthyphairesis* de dues línies en la raó d'extrem i de mitjà continua indefinidament.

La tesi, per exemple tal i com la defensà Kurt von Fritz, es basa en els següents punts:

(1) L'interès dels pitagòrics per a conèixer la raó entre les llargades de dues línies rectes, englobat en la cerca general de trobar raons *numèriques* per als afers musicals i astronòmics (i

---

[19] Szabó, A.: *op.cit.*, pàg.216.

[20] Cf. ibídem, pàgs.185-220.

[21] «The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum», *Annals of mathematics*, 46 (1945), pàgs.242-264.

[22] «Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer», *Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik, Physik und Technik*, 6 (1958), pàgs.5-28.

dins de la seva filosofia de trobar en unes tals raons el nucli dels esdeveniments).

(2) La circumstància que els pitagòrics usaren el pentagrama (un pentàgon regular amb els costats perllongats fins al punt d'insersecció) com a senyal de reconeixement mutu.

(3) Que Jàmblic (s.IV d.C.) associa Hipàs de Metapont (mitjans del s.V a.C.) amb la construcció del dodecàhedre regular (que conté doncs dotze pentàgons regulars com a cares) i amb el descobriment de l'incommensurable.

(4) Que el caràcter abstracte i concís de la prova per reducció a l'absurd reportada per Aristòtil, i inclosa als *Elements*, sembla confirmar que la incommensurabilitat seria ja coneguda quan es féu una tal prova per a l'arrel de dos.

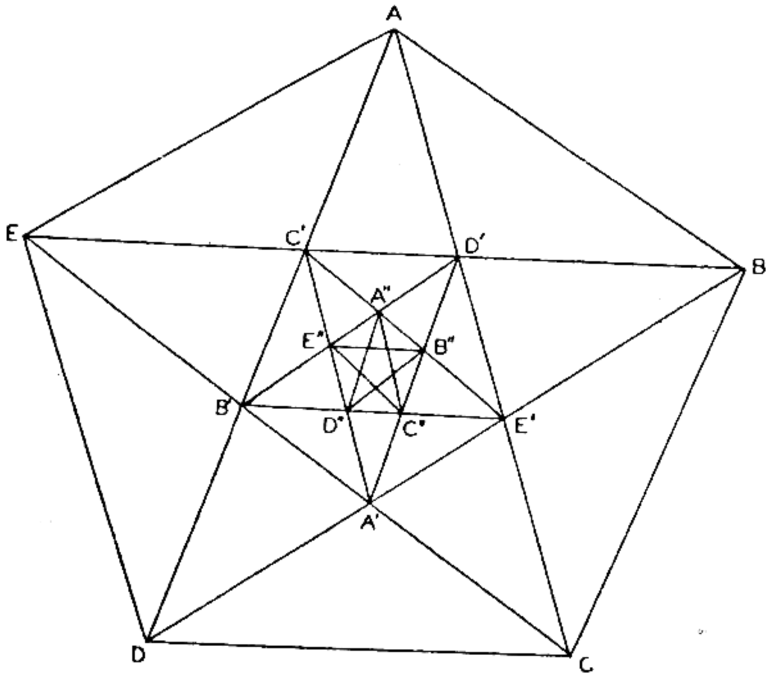
(5) L'antiguitat del mètode de la mútua subtracció per a trobar una mesura comuna màxima.

(6) Que és fàcil de veure en la figura que, en els pentàgons traçats,

$$AE = AB'$$
$$\text{i } B'D = B'E',$$

i llavors

$$AD - AE = B'E';$$



i també que

$$AE = ED' = EA',$$

i $\quad B'E' = B'D = B'E,$

i llavors

$$AE - B'E' = B'A'$$

i així successivament. És a dir, que la diferència entre el diàmetre i el costat del pentàgon més gran és igual al diàmetre del pentàgon més petit, i la diferència entre el costat del pentàgon més gran i el diàmetre del més petit és igual al costat del pentàgon més petit; i que la diferència entre el diàmetre del pentàgon més petit i el seu costat és igual al diàmetre del pentàgon següent encara més petit, i així successivament *in infinitum*. «*Com es produeixen constantment nous pentàgons regulars pels diàmetres, és evident que el procés de subtracció mútua seguirà sempre, i que per tant no es pot trobar cap mesura comuna màxima del diàmetre i del costat del pentàgon regular*».

Certament la tesi que la incommensurabilitat fou descoberta per l'aplicació de l'*anthyphairesis* sembla poc plausible[23]. Però àdhuc al marge de tot això aquesta via de fer palès l'incommensurable pot convidar a noves reflexions en tant que no conté indicis d'una reducció a l'absurd; és a dir, a preguntar-nos què prova de fet.

Si hagués dut a provar la incommensurabilitat entre el costat i la diagonal d'un pentàgon, i en la mesura que s'hagués acceptat prèviament que hi ha una raó[24] entre la diagonal i el costat, una tal acceptació prèvia hauria fet pressuposar − ignorants encara de la incommensurabilitat − que la raó és la d'una raó numericoracional, per tant que el costat i la diagonal fossin commensurables: altrament no s'entendria pas en quina accepció es parlaria d'*una raó*.

Des d'aquest punt de mira el supòsit que si *AD* i *AE* estan en una raó, i que després ho estan *AE* i *AD* - *AE* (= *B'E'*); que després ho estan *B'E'* i *AE* - *B'E'* (= *B'A'*), etc., comportaria l'evidència que arreu la raó és entre nombres racionals; i la circumstància que el procés geomètric de construcció de pentàgons interns fos indefinit no hauria d'introduir necessàriament cap escull fatal pel fet que els nombres racionals (i enters) no puguin anar decreixent indefinidament, quan això seria més aviat la conseqüència del

---

[23]Cf.els motius adduïts per Knorr, *op.cit.*, pàgs.29-36.

[24]«*It is absolutely in the character of Hippasus as we now him that he should have tried to find out about the numbers and ratios incorporated in the pentagram and regular pentagon*» (Fritz, *art.cit.*, pàgs.256-257).

nombre adjudicat a les magnituds de partida, nombre que també podria adjudicar-se indefinidament més gran (en el cas de no acceptar una subdivisió indefinida d'unitats fraccionàries), etc.

Tanmateix allò que fa dubtosa la tesi que defensaria que aquesta fou la prova de l'existència de la incommensurabilitat rau precisament en el seu punt de partida, és a dir, en l'admissió que l'*anthyphairesis* (l'algorisme d'Euclides) pugui servir per a provar-la, quan no sembla evident que hom pogués sostreure indefinidament la menor de dues magnituds de la major i per torns, sense trobar quelcom que les mesurés (*Eucl.*X,2).

És clar que, en la tesi que ho defensa per a la raó de la diagonal i el costat, hom s'assegura pel cantó geomètric del caràcter indefinit de la sèrie de pentàgons successivament interns els uns als altres: es lliura una visualització del caràcter indefinit de l'*anthyphairesis*[25]. Però tot això sembla un miratge i un *quid pro quo:* perquè la tesi que defensa el descobriment de la incommensurabilitat per la relació entre la diagonal i el costat del pentàgon sembla pressuposar que *Eucl.*X,2 és capaç de demostrar

---

[25]Sembla que el propi K.von Fritz n'hagués estat conscient, quan afirma, a propòsit de l'*anthyphairesis* que «*it is, of course, impossible to discover incommensurability by applying this method in the way in which craftsmen do it: with measuring sticks or measuring ropes. But if one looks at the pentagram or at a regular pentagon with all its diameters fillet in* -- *and we have seen that the Pythagoreans were interested in diameters* -- *the fact that the process of mutual subtraction goes on infinitely, that therefore there is no greatest common measure, and that hence the ratio between diameter and side cannot be expressed in integers however great, is apparent almost at first sight. For one sees at once that the diameters of the pentagon form a new regular pentagon in the centre, that the diameter of this smaller pentagon will again form a regular pentagon, and so on in an infinite process*» (ibídem, pàg.257).

la incommensurabilitat (i en una certa accepció *Eucl.*X,2 és certament una prova general vàlida), si més no quan es garantís, gràcies a la visualització dels pentàgons successivament construïts dins del precedent, el seu caràcter indefinidament reiteratiu.

Llevada doncs la demostració d'*Eucl.*X,2, què queda del valor probatori de la tesi esmentada sobre el pentàgon? Simplement que ho anem fent indefinidament, talment com podem llevar indefinidament les meitats successives d'una línia, etc., sense que una tal regressió indefinida digui res sobre la incommensurabilitat en l'aspecte geomètric, que sols demanaria nombres més i més grans de partida (o fraccions més i més petites) en l'aspecte numericoracional, referència numèrica que podríem esmentar amb caràcter general, és a dir, d'una manera retòrica.

D'altra banda és interessant de remarcar que la diagonal i el costat del pentàgon es troben en una raó d'extrem i de mitjà: en efecte, i deixant per un moment Kurt von Fritz per a repassar Euclides, donada la línia *AB* i un punt *C* de tal manera que, essent $AC>CB$,

$$AB \times CB = AC^2,$$

llavors diem que la línia *AB* està tallada en una raó d'extrem i de mitjà en el punt *C* (cf. *Eucl.*VI, Def.3; VI,17), nom que rep per l'evidència que:

$$CB : AC = AC : AB.$$

D'altra banda *Eucl.*XIII,5 defensa que si *AB* està tallada en el punt

C en una raó d'extrem i de mitjà ($AC>CB$), i *AD* és igual a *AC*, llavors s'acompleix que *DB* està tallada en una raó d'extrem i de mitjà en el punt *A*, i que *AB* és el segment més gran, és a dir que:

$$DB \times DA = AB^2$$

$$DA : AB = AB : DB,$$

cosa que implica que si due línies *CB* i *AC* (*AC*>*CB*) estan en una raó d'extrem (la suma de les dues) i de mitjà (la més gran), també ho estaran, en una tal raó, la línia *AB*, suma de les dues anteriors, respecte de la línia integrada per aquesta i una línia igual a la més gran de l'anterior suma (*AB*+*DA*), l'afer podent-se repetir indefinidament.

Llavors és obvi que la proposició inversa d'*Eucl*.XIII,5 és també certa: per tant que si dues línies *DA* i *AB* (*AB*>*DA*) estan en una raó d'extrem i de mitjà, també ho estaran *AB* - *AC* (= *CB*) respecte de la menor (*DA* = *AC*), i que una tal *anthyphairesis* es pot anar repetint indefinidament.

Prenent doncs el pentagrama de Kurt von Fritz és fàcil de veure que els triangles *AEB* i *BE'C* són semblants, i llavors:

$$BE' : BC = AE : AD \quad [AD = EB] \quad (1)$$

i *AE* = *BC*, per tant *BE'* (que és la resultant de sostreure, de la diagonal, el costat, els dos del pentàgon més gran) i el costat del pentàgon *ABCDE* estan en una raó d'extrem i de mitjà (i per *Eucl*.XIII,5 ho estan el costat i la diagonal del pentàgon *ABCDE*). Però des de (1) podem aplicar *Eucl*.XIII,5 en una direcció contrària i extreure que *BC* - *BE'* i *BE'* tenen la raó d'un extrem i d'un mitjà; és a dir que la tenen el costat i la diagonal del pentàgon *A'B'C'D'E'*, raó que es pot anar descabdellant per als successius pentàgons regulars interiors, etc.

Ara bé: els escoliastes dels *Elements* i els propis *Elements* en *Eucl*.XIII,6 (versemblantment una interpolació) demostren que dues línies que tenen la raó d'extrem i de mitjà són irracionals prenent com a criteri *Eucl*.X,9, un fet que palesaria que no haurien tingut cap coneixement d'alguna prova de la incommensurabilitat a partir de línies que tinguessin una raó d'extrem i de mitjà: fet i fet, com ho hem insinuat, seria certament prou difícil de concebre que una qualsevol incommensurabilitat s'hagués pogut descobrir per tècniques anthyphairètiques.

6. Una prova sobre la incommensurabilitat sembla la conseqüència de sentir la necessitat de quelcom conclusiu, i la seva força dependria així mateix de l'abast que es volgués lliurar a l'ús del mot 'demostració' (o 'prova').

No es pot llevar l'honor del poble grec d'haver establert el problema de la irracionalitat (i la incommensurabilitat) en l'accepció que els egipcis, els babilonis, etc., no en feren un afer cabdal (cercaren aproximacions i prou), mentre que la consciència grega de la impossibilitat de trobar de fet arrels exactes de nombres no sols es descabdellà per mitjà de proves que se sentien com a vàlides per a mostrar-ho, sinó que implicà així mateix un canvi de mètodes en el camp de les proporcions, de les transformacions d'àrees, de la resolució de problemes quadràtics i, en conjunt, de les relacions entre geometria i aritmètica. En d'altres paraules: el grecs es prengueren tan seriosament com era possible la incommensurabilitat de magnituds (la irracionalitat numèrica), i d'aquí que assagessin de provar-la: si això modificà pregonament els mètodes d'investigació matemàtica, i comportà *de facto* que no desenvolupessin un sistema algèbric (numèric) que pogués incorporar l'irracional, resta com un exponent de llur capacitat d'investigació i de consideració dels afers rellevants en matemàtiques.

7. ¿S'ha de concloure que no hi ha en $\sqrt{2}$ un nombre irracional? No, de cap manera. Potser caldria rebutjar que hi hagués magnituds incommensurables en geometria, a no ser que s'anomenessin així aquelles a les qual no els atribuïm un nombre racional.

Tanmateix un nombre irracional del tall de $\sqrt{2}$ no seria cap ens amb una carta de naturalesa pròpia, no s'hi trobaria un afer gairebé misteriós, no caldria un enginy extraordinari per a demostrar que existeix.

L'irracional algèbric fóra sols el nom que rep una expressió numèrica racional, per la circumstància que l'he de deixar expressada. $\sqrt{2}$ seria precisament un exemple d'això, i l'afirmació valdria per a un qualsevol tipus d'irracionalitat algèbrica.