

F. GRAELL I DENIEL

TRES EXEMPLES D'ESTÀTICA
APROXIMACIONS DE FILOSOFIA DE LA CIÈNCIA

QUADERNS DE FILOSOFIA

40

F. GRAELL I DENIEL

TRES EXEMPLES D'ESTÀTICA
APROXIMACIONS DE FILOSOFIA DE LA CIÈNCIA

40

QUADERNS DE FILOSOFIA

Barcelona 2015

1ª edició: gener de 2015
© F.Graell i Deniel
ISBN: 978-84-938454-8-3

www.xtec.cat/~fgraell
E-mail : fgraell@xtec.cat

La web permet de baixar la còpia d'un qualsevol quadern editat.
Podeu fer ús de l'adreça electrònica per a qualsevol correspondència
amb *Quaderns de Filosofia*.

CONTINGUT

Pròleg, 7.

I. UNA PROPOSICIÓ D'AQUÍMEDES, 9.

§1. Comenci's amb un text bàsic en la història de l'estàtica, 9.

§2. L'observació, la inducció i la realitat material, 12.

§3. L'abast de la crítica a *Sobre l'equilibri* I,6, 16.

II. UN PES AGUANTAT AMB CORDES, 19.

§1. La composició de potències i la descomposició d'un pes segons Roberval, 20.

A. La descomposició d'un pes en l'equilibri d'un cos en un pla inclinat, 20.

B. Compliqui's l'equilibri d'un cos en un pla inclinat, 22.

C. La descomposició d'un pes que penja de dues cordes, 24.

§2. Concurrència de resultats amb divergència de camins, 25.

§3. L'exemplarització de la composició de potències i de la descomposició de pesos en Roberval, 27.

§4. Nota al principi de la composició de forces com a bàsic en l'estàtica, 30.

III. EL TEOREMA DELS TREBALL VIRTUALS, 33.

§1. Una estàtica analítica autònoma, 34.

§2. Els motius pels quals se l'assumeix, 36.

§3. L'origen no exclou l'observació, 37.

§4. Nota sobre la rellevància dels infinitesimals, 41.

§5. La preeminència del principi del treball virtual, 44.

Pròleg

Històricament s'ha pogut defensar el caràcter bàsic de la palanca a l'hora d'avaluar les altres màquines simples i àdhuc per a les consideracions d'equilibri amb cordes. També els estudiosos han abraçat, sobretot des del *Principia*, la composició i la descomposició de forces com el mitjà heurístic per excel·lència. I Lagrange deu ser el primer que descabdella analíticament l'estàtica a partir del principi dels treballs virtuals.

¿Ha de sorprendre doncs que una sana tafaneria es desvetlli per uns afers que remunten, en llur elaboració, fins a Aristòtil i que han format part de la vida quotidiana dels homes si més no en les seves manifestacions més útils tant abans com després de llur estudi?

Ocorre que no sembla possible la filosofia de la ciència sense dos supòsits. El primer fa referència a la necessitat d'una certa exemplarització; és a dir, a mirar una resultant, un cas, una explicació específica, d'un text o d'una aportació. La segona demana de pressuposar que l'ús d'un determinat adquirent no ajuda pas a pensar allò que es troba particularitzat. La certesa que es parteix en qualsevol cas de moltes circumstàncies pròpies no implica l'encegament per a un qualsevol aspecte per manca d'una aproximació escaient si fos el cas de caler tenir-la en compte.

El lector trobarà en l'escrit un exercici d'aquesta mena. S'espigola aquí i allà per tal d'intentar trobar-se un hom en la cosa mateixa malgrat que, sobretot en el tema del treball virtual, això més aviat és apuntat que fet explícit per tal de no allargar innecessàriament l'escrit.

Certament s'ha de superar la prevenció de creure que l'exemplarització hagi de comportar representació: car la primera convida aquí pel cap baix a un camí de comprensió, potser i tot sovint irrepresentable, i lliura allò que satisfà. Sens

dubte la mesura d'això no és la mateix per a tots, i llavors caldrà renovar un estudi, en una espiral que es va obrint sense parar.

Es tracta de les habilitats de cadascú, un afer que és impossible de generalitzar. Si més no s'ofereix ara unes aportacions que semblen escaients per a afavorir el gaudi del pensador. Versemblantment no sempre s'encerta a ser original i, tanmateix, potser sí que caldria exigir que l'afer tingui un interès: si més no es lliura aquest quadern amb aquesta intenció.

Precisament es pretén de mostrar que una disciplina com l'estètica permet un munt de suggerències per a comprendre què fa la filosofia de la ciència.

I

UNA PROPOSICIÓ D'ARQUÍMEDES

L'estudi del savi de Siracusa lliura prou plaer i desvetlla la bellesa. No sembla difícil que sigui l'excusa escaient per a fer reblar dues fites importants: aquella que permet de relligar el pensament a la concreció material dels afers, i la que situa l'eficàcia del que és una demostració en el seu lloc.

Tot això ja ha estat tractat en d'altres llocs¹: de bell nou hi ha aquí l'oportunitat de tornar-hi.

§1. Comenci's amb un text bàsic en la història de l'estàtica.

El treball d'Arquímedes *Sobre l'equilibri dels plans* tracta afers d'estàtica, i es compon de dos llibres. El primer introdueix set postulats, i després una colla de proposicions molt rellevants, entre les quals les molt famoses sobre l'equilibri d'una palanca de braços desiguals entre pesos commensurables (I,6) i entre pesos incommensurables (I,7). No caldrà afegir que els dos llibres són d'un interès extraordinari. Basti ara de transcriure la primera de les proposicions citades, cosa que permet de reblar algunes consideracions vàlides per a una munió de casos. Heus-la aquí²:

¹ Cf. *Introducció a la geometria euclidiana. Apunts per a una filosofia de l'espai i Temps i moviment. Una introducció a la cinemàtica* (Quaderns de filosofia, 36 i 38).

² La traducció que segueix ha estat feta expressament pel professor Ramon Masià Fornós que, entre d'altres mèrits, és un reconegut traductor d'Arquímedes (*Sobre l'esfera i el cilindre*, Col·lecció Bernat Metge N°.Vol. 381), i que en tot moment ha mostrat una gran disponibilitat i diligència. Es vol fer constar sobretot el present agraïment.

«Magnituds commensurables s'equilibren des d'unes longituds que tenen la mateixa raó inversa que els pesos.

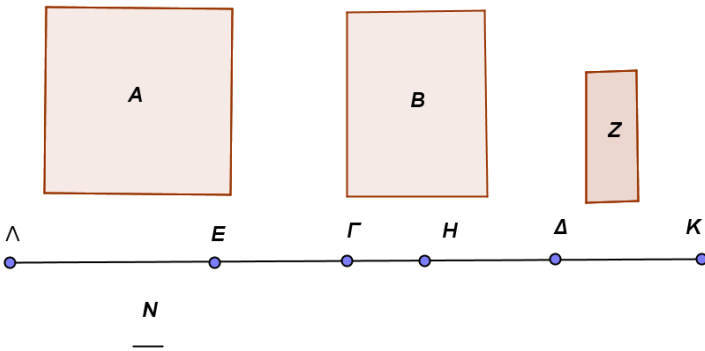
Heus aquí unes magnituds commensurables, A, B , els centres de les quals <són> A, B ; i heus aquí una certa longitud, $E\Delta$. Com A respecte de B , així sigui una longitud $\Delta\Gamma$ respecte d'una longitud ΓE . Cal provar que Γ és centre de pes de la magnitud composta d'ambdues, A, B .

En efecte, atès que com A respecte de B , així és $\Delta\Gamma$ respecte de ΓE ; però A és commensurable amb B i, per tant, $\Delta\Gamma$ commensurable amb ΓE ; és a dir, una recta amb una la recta, de manera que hi ha una mesura comuna d' $E\Gamma, \Delta\Gamma$. Heus-la aquí doncs: N ; i estiguin posades cadascuna de $\Delta H, \Delta K$ igual a ΓE , mentre que $E\Lambda$ igual a $\Delta\Gamma$. I atès que ΔH és igual a ΓE , també $\Delta\Gamma$ igual a $E\Lambda$, de manera que també $E\Lambda$ igual a $E\Lambda$. Per tant ΛH és el doble de $\Delta\Gamma$, mentre que HK de ΓE , de manera que N també mesura cadascuna de <les rectes> $\Lambda H, HK$, perquè precisament també <mesura> la meitat.

I atès que com A respecte de B , així és $\Delta\Gamma$ respecte de ΓE , però com $\Delta\Gamma$ respecte de ΓE , així ΛH respecte d' HK , car <és> doble cadascuna de cadascuna, per tant també com A respecte de B , així ΛH respecte de HK . Però quantes vegades és ΛH de N , tantes vegades sigui també A de Z ; per tant, com ΛH respecte de N , així és A respecte de Z . Però com HK respecte de ΛH , així és també B respecte d' A , per igualtat; per tant HK respecte de N , així és B respecte de Z . Per tant HK de N i B de Z són múltiples un mateix nombre de vegades. Però es va provar que A ho és també de Z , de

tal manera que Z és mesura comuna d'A, B. Així doncs dividida AH en <parts> iguals a N, i A en <parts> iguals a Z, els segments en AH de magnitud igual a N seran iguals en nombre als segments en A que són iguals a Z. De manera que sobre cadascun dels segments en AH se sobreposa una magnitud igual a Z, que té el centre del pes sobre la meitat del segment, <la suma de> totes les magnituds és igual a A i el centre del pes de la composició de tots serà E, ja que el total és parell en nombre i les <magnituds> sobre cadascun <dels costats> de E són iguals en nombre, són, per igualtat, com EA a EH.

De la mateixa manera provarem també que si sobre cadascun dels segments en HK se sobreposa una magnitud igual a Z que té centre de pes sobre la meitat del segment, <la suma de> totes les magnituds serà igual a B, i el centre de pes de la composició de totes serà Δ. Així doncs A serà sobreposat sobre E, i mentre que B sobre Δ. Magnituds iguals unes a les altres seran posades doncs sobre una recta, els centres de pes de les quals disten el mateix els uns dels altres, <compostes> en nombre parell.



Així doncs és evident que el centre de pes de la magnitud composta de totes és la dicotomia de les rectes que tenen els

centres <de pes> dels punts mitjos de les magnituds. Però atès que són iguals EA a $\Delta\Gamma$, mentre que ΓE a ΔK , per tant també la totalitat <de> $\Lambda\Gamma$ a ΓK , de manera que el centre de pes de la magnitud <composta> de totes <és> el punt Γ . Per tant, posada A sobre E , mentre que B sobre Δ , s'equilibren sobre Γ ».

§2. L'observació, la inducció i la realitat material.

1. La proposició d'Arquímedes permet d'apuntar algunes consideracions especialment rellevants perquè pressuposa la sedimentació d'experiències perceptives enteses, una elaboració que compromet manipulacions, expectatives i constàncies, i on tot això s'acompanya sempre d'intenció, es comprèn doncs i es pensa. Hi ha una generalització de quelcom intencional que té en compte especialment els elements que s'hi observen.

Una palanca de braços iguals està en equilibri quan hi ha iguals pesos a igual distàncies contràries del fulcre. Una tal generalització troba el seu contrast particular quan un hom agafa dos cossos d'igual pes i els balanceja en la màquina del cas.

Algú podria fins i tot agafar un nombre de cossos, distribuir-los en una palanca de braços iguals, tal i com se suggereix al final de la proposició (els de A i els de B) i assumir que hi ha equilibri.

Tanmateix una interpretació possible³ del postulat VI d'aquest llibre d'Arquímedes («*si unes magnituds s'equilibren a certes longituds [o distàncies, μακρός], també <magnituds> iguals a aquestes s'equilibraran a les mateixes longituds*») rau a admetre que els efectes del pes d'un cos són els mateixos

³ Si més no sembla la més encertada des de les indicacions d'O.Toeplitz, recollides i reelaborades per W.Steiner (*Der Begriff des Schwerpunktes bei Archimedes. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie. Abt. B: Quellen. I*, pàgines 221–244, 1930), la qual han seguit prou estudiosos d'Arquímedes.

si es considera que tot el pes s'aplica en el seu centre de gravetat (centre de pes, en la concepció antiga). Fet i fet no costaria molt de penjar tot el pes de A des del punt E , i tot el pes de B des del punt Δ . En d'altres paraules: l'observació permetria de constatar que hi ha un equilibri, i el postulat – que serveix per a axiomatitzar – ho palesaria sense més.

Al cap i a la fi es resseguiria sempre l'activitat de tota mena d'operaris. En conclusió es demostraria la proposició pel fet que n'hi ha una presentació des d'allò que és més fàcil o admès, i que no s'admetria cap passa rellevant que no fos postulada.

2. La proposició es descabdella fent ús de la proporció. Certament ho fa a nivell general: la teoria matemàtica s'hi mou sempre, ultra que aquí es pressuposa problemàtiques específiques gregues (els incommensurables) i llurs solucions.

Deixi's de banda una qualsevol referència de la irracionalitat⁴. Centri's un hom a considerar ben bé què és una proporció i faci's això de manera que es trobi tan arran com sigui possible de les concrecions.

Llavors s'assumeix, per exemple, que A pesa nou vegades Z , i B cinc vegades Z . S'agafa AH i es divideix en nou parts, HK en cinc.

A es penja de E i B de Δ . I, és clar, hi ha les quantitats nou i cinc de pes, i cinc mitjos i nou mitjos de longitud. S'ha acabat. La proporció remet a una tal concreció última, a gairebé la mateixa operació de balanceig. Aquesta concreció darrera s'hauria de prendre a tall d'una fotografia. La proporció remet en efecte a quelcom que és posar costat per costat una colla d'enumeracions. Es podria dir que es tracta d'una mera

⁴ Es remet el lector interessant a la present col·lecció *Quaderns de filosofia* números 4, 7, i 11.

descripció d'un procés a través de l'ús dels noms que es lliuren a les parts. Hi ha una mútua imbricació insoluble entre els trets qualitatius i quantitius, tots són del tot, no se'n separen en cap accepció.

La proporció entre les magnituds no s'hauria d'avaluar primerament més que com els noms que es lliuren al mateix a partir de prendre mides diverses de les magnituds.

La generalització numèrica permet, se sap, anar pujant esgraons en la consideració del quantitatiu, etc.

3. Un hom pot agafar uns altres pesos, una altra palanca, i repetir el procés. Hi ha uns nombres concrets, una nova fotografia doncs, etc.

Certament es troba una generalització des del cantó dels nombres, que al cap i a la fi és el que anuncia la proposició I,6.

Tanmateix aquesta proporcionalitat és capaç de dur a alguna confusió quan no es discerneix prou els càlculs que es fan i el procés que un hom estudia.

Car la segona palanca no s'hauria de veure a tall d'un reforç de la primera, d'un comprovant seu, d'una confirmació que en demanaria potser d'altres. No es tracta d'estudiar un procés pel fet que conté aspectes no considerats, esdeveniments que semblen confusos, complicacions que poden no haver estat ben resoltes, anàlisis dels fets que no són clares, inadvertències relacionades amb la rapidesa del que passa, amb la dificultat de manipulació, d'observació, de capacitat de separar les seves parts, tot allò que pot ser un obstacle per a gaudir del que ocorre d'un manera privilegiada. La simplicitat de la palanca permet d'avaluar-la tal qual, havent d'assumir, però, la impossibilitat de dur a la perfecció els materials i les mesures.

Al cap i a la fi es tracta que, quan es reitera el procés amb una nova palanca, l'observador repeteix quelcom que és el mateix comportament físic, un afer que ocorre, que es pot

fotografiar de moltes maneres (materials diversos, de dimensions diverses). S'hauria d'assumir radicalment que l'equilibri d'aquesta palanca no és una veritat induïda, sinó una constatació, mentre es té present que qualsevol constatació és una observació intencional, per tant carregada de pensament.

4. Hi ha, sí, inducció. Tanmateix n'hi ha en l'accepció que hi ha universal, general, comú, etc. Per la inducció es passa d'aquest cas al cas general (des d'aquest home als homes), i no pressuposa que no hi pugui haver excepcions ni cap gerantia més enllà d'una significació que no té necessitat d'estar pensant un objecte concret. La inducció no és ben bé cap afer rellevant.

En efecte la clau del coneixement físic no rau en la inducció (per més útil que sigui) sinó en una observació que no exclou l'escorcoll intencional (parlant de casos simples com la palanca), deixant ara el que es deriva de l'experiment concret des d'un saber descabdellat. Un hom pot ben bé equivocar-se en l'anàlisi i la composició del que està observant, i això no hauria de ser motiu de sorpresa: si més no l'ésser humà passa per alt mil detalls de la quotidianitat, s'equivoca a l'hora d'explicar qui hi havia i qui no, també erra en la descripció de quelcom que ha vist, etc. No sempre es té la seguretat que hi ha una certesa perceptiva malgrat que la percepció és el saber més segur de què gaudeix l'individu, i que hi ha una munió de coses i esdeveniments que són prou segurs.

Per tant la percepció de quelcom esdevé allò més segur, les aigües que nodreixen totes les intencionalitats. Les regles de la inducció hi tenen el fonament.

Es tracta, una vegada més, d'admetre que la percepció lliura la realitat material en persona, i no res més.

§3. L'abast de la crítica a *Sobre l'equilibri I,6*.

S'hi palesa doncs, per la seva simplicitat, quelcom vàlid per al conjunt de la ciència, àdhuc del coneixement de l'home, a diferents nivells. És a dir: la circumstància que no hi ha oposició entre matemàtica i realitat natural. El geni de Siracusa ja pensa en quantitats generalitzades, ja domina el càlcul de proporcions, no té cap inconvenient a pensar afers que s'esdevenen naturalment des d'aquest aspecte seu que ja s'ha autonomitzat. Tampoc no es tracta aquí de copsar com ell podria haver interpretat l'ús de les proporcions en els afers estàtics, sinó de palesar, al nivell de la seva exposició, que hi ha un seguiment qualitatiu – un pensament així – que està rumiant quelcom que ocorre naturalment mentre hi troba una coherència.

La proposició ha rebut, sí, objeccions. Malgrat que caldria discutir objecció per objecció què ha implicat el fet de superar-la, per tant de perfeccionar la coherència de l'escrit, i la circumstància d'haver fet possible d'anar mantenint l'enunciat com a correcte. Car molt possiblement tot allò que envolta l'aportació arquimèdiana valdria també per a no importa quina complementació es faci, i sembla que sols s'admet la validesa conclusiva d'un raonament com a inapel·lable quan un hom no se'l qüestiona més.

Hi ha nivells i nivells de crítica. Es rebutgi un enunciat o se'l refermi amb d'altres mitjans, tothom deu treballar d'una manera semblant. Llavors s'afegeix que el progrés del que se sap depèn sempre dels altres tant per allò que defensaven malgrat que ara es rebutja, com per allò que explicaven i que menava pel camí que ara es continua en l'accepció de seguir-ho, amb els perfeccionaments que es vulguin.

L'afirmació de l'equilibri d'uns cossos en una palanca quan són inversament proporcionals a la distància des de la qual es troben suspesos deu gaudir d'una base experimental com deu fer-ho l'equilibri en unes balances elementals. I sembla prou difícil de rebutjar-la.

¿S'assumeix sense crítica que la càrrega que aguanta el fulcre de la palanca és igual a la suma del pes dels dos cossos?

¿Fa ús d'un principi de superposició d'estats d'equilibri sense fer èmfasi que això esdevé un postulat experimental?

El postulat primer (pesos iguals suspesos a igual distància del fulcre estan en equilibri) no diu pas que els efectes d'un pes siguin proporcionals al braç L de la palanca, i es podria assumir, sembla, qualsevol llei de la forma $Pf(L)$. ¿No s'hi pressuposa doncs, a prop.I.6, que els efectes d'un pes són proporcionals a la distància L on és suspès des del punt de suport?

Un hom podria allargar les crítiques a la demostració arquimediana. Ocorre que tot plegat depèn també de la manera de concebre el paper de la matemàtica. Quan s'assumeix que no és res que no pertanyi a l'experiència de les coses; si es rebutja l'oposició entre qualitats i quantitats; en admetre que una qualsevol axiomatització és sols una manera de presentar els afers, que no deuen pas llur validesa als axiomes, sinó que aquests la manlleva al descabdellament de la ciència; mentre es demostra i es prova d'acord amb un criteri selectiu d'aportar el que convé, el que es troba més a la mà en un qualsevol sentit, el que s'acorda amb d'altres casos, etc., llavors s'és capaç de veure-hi més enllà, i l'estudiós és capaç d'adonar-se que l'admissió d'una millora pot pressuposar que no calgui insistir en el rebuig d'una qualsevol aportació pel fet que inclou un contingent imprevisible d'afers polèmics. Un tal investigador és capaç de defensar l'estricta diferència entre revisar els resultats, i si cal superar-los, rebutjar-los, modificar-los, etc., i el fet que el seu nivell d'assumpcions no sigui el d'un mateix, que no

segueixi els seus supòsits o prejudicis. Aquell home de ciència és capaç de mantenir que la perfectibilitat reiterada d'un discurs en prou direccions – sense que això no impliqui necessàriament la pretensió d'abandonar la provisionalitat, etc. – no impedeix de considerar la validesa d'una demostració quan aquesta no exclou mesuraments experimentals i comprovacions *in situ*, etc.

II UN PES AGUANTAT AMB CORDES

La noció de força i la llei de la composició de forces deuen ser dels afers més rellevants de la mecànica i de la història de la ciència i tot.

L'èxit de Newton, que es palesà en les lleis del moviment, feu abandonar certament d'altres concepcions. Recordi's, per exemple, que en Aristòtil l'efecte d'una *δύναμις* o *ισχύς* es mesura pel producte del cos i de la velocitat que adquireix; una mateixa potència en un cos que sigui la meitat d'un altre farà que recorri una distància doble en el mateix temps, o el mateix recorregut en la meitat del temps, tal i com es diu en la *Física* i en el *Tractat dels Cels*. Fet i fet la proporcionalitat entre forces i velocitats apareix sovint al llarg de la història de la mecànica⁵.

Sigui com sigui la composició de moviments, i potser algun tipus de composició de potències, ja es troba en Aristòtil, que no concebé una estàtica independent del conjunt dels seus treballs físics.

No cal ara escatir l'abast de les lleis de la mecànica clàssica tal i com es troben en els *Principia*⁶, i val la pena de circumscriure's a un exemple rellevant, que és anterior, de

⁵El tractat apòcrif aristotelitzant *Problemes de mecànica* resol d'això l'equilibri en una palanca recta de braços desiguals. Car el cos que cau per un braç recorreria un arc més gran o més petit simultani al del recorregut per l'altre cos sobre el segon braç. Les velocitats essent com les braços hi ha equilibri quan els productes dels cossos per la velocitats (o pels braços) és igual; altrament la palanca s'inclina pel braç on el producte es major.

⁶ Cf. Una primera aproximació es troba a *Anotacions marginals als Principia Mathematica newtonians* (Quaderns de filosofia 14).

consideracions d'equilibri, que pot estimar-se com la justificació reeixida de la llei del paral·lelogram (o de la composició) de forces.

§1. La composició de potències i la descomposició d'un pes segons Roberval.

Gilles Personne de Roberval (1602-1675) ho féu en el seu opuscle *Traité de Méchanique*, que Marin Mersenne incorporà en la seva obra *Harmonie universelle* (1636 i 1637). L'autor, familiaritzat amb l'estàtica de Simon Stevin, coneixedor dels mètodes de Galileu en la seva *Mecànica*, i amb una introducció del concepte de moment que l'apropa a Giovanni Battista Benedetti, parteix com a bon geòmetra de cinc axiomes, entre els continguts dels quals s'hi parla de com es comporten els pesos i les potències segons el lloc on són; en concret el tercer axioma explicita que una balança inclinada de braços iguals i amb iguals pesos es manté en equilibri; el quart estableix la igualtat de resultants de braços tirats per dues potències iguals que els són perpendiculars [*en llenguatge d'ara: el tercer i el quart estableixen la igualtat de moments*].

Tot seguit s'hi estableix:

A. La descomposició d'un pes en l'equilibri d'un cos en un pla inclinat.

«PROPOSICIÓ 1.

Estant donat un pla inclinat a l'horitzó, i l'angle de la inclinació estant conegut, trobi's una potència que tirant, o empenyent, per una línia de direcció paral·lela al pla inclinat sostingui un pes donat sobre el mateix pla».

Ara bé: la potència D és igual a la A i fa que no llisqui pel pla inclinat ja es consideri que D actua en B com si actua en G; i ara D [*imaginàriament*] s'equilibra amb K, igual a Q.

Però la potència D penjada a G faria també que A no llisqui pel pla i, penjada en B [*en una palanca recta inclinada*], es contrapesa igualment al pes A sobre el braç CA [*en una balança inclinada BCA*]. Per aquesta raó la potència K sobre la distància CH contrapesa el pes A sobre el braç CA [*en una imaginària balança trencada HCA, per tant $K \times HC = A \times CF$*]. I la mateixa potència K sobre la distància CH substitueix la potència D penjada sobre la distància CB o CG, mentre les palanques [*respectives imaginades*] romanen en equilibri.

Es comprèn [*també pel quart axioma*] que la potència Q, igual a la K, tirant per la corda AO sobre CA faria de potència d'un braç de palanca [*imaginària i en equilibri*] que tindria K tirant des del braç HC igual a CA [*en una barra trencada imaginada HCA*]. Per tant un hom pot substituir un braç per l'altre.

En el raonament el pes Q en lloc de K faria de contrapès de A perquè no llisqués. I es contrapesava sobre AO al pes K sobre HC.

La potència Q impediria doncs que el pes A llisqués pel pla NL.

Per tant el cos A en equilibri reposa en part sobre el pla LN, i en part la potència Q en sosté el mateix pes sobre el pla LN d'acord amb una proporció (LN és a NM el que A és a Q).

B. Compliqui's l'equilibri d'un cos en un pla inclinat.

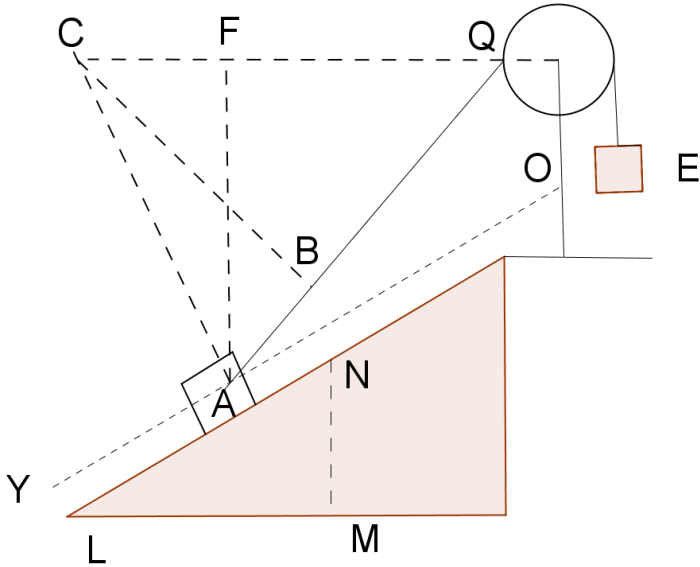
La proposició II presenta el mateix problema que l'anterior però en el cas que la potència que aguanta el cos no té la seva línia d'acció paral·lela a la inclinació del pla.

Com abans es tracta d'un pes A damunt del pla inclinat LN, ara amb una corda AQ que el manté en equilibri, i es demana la potència Q necessària (o el pes E).

Es lliura l'angle d'inclinació NLM, l'angle OAQ (OAY essent una línia paral·lela a LN que passa pel «centre de pesantor» del pes A). Es fa CB perpendicular a AQ, CA

perpendicular a YAO (i a LN), FA vertical pel punt esmentat de A.

Es vol defensar que, si se suposa una potència Q (o un pes E) tal que CB és a CF, el que el pes A és a la potència Q ($A \times CF = Q \times CB$), llavors aquest valor de Q és el buscat.



En efecte la primera proposició permetia de suposar una potència O que tira, des de la corda AO, del braç CA; i llavors se sabia que $O \times CA = K \times HC = D \times CG = A \times CF$ (cf. Prop.I). Per tant CF és a CA el que la potència O és a A ($A \times CF = O \times CA$).

Trobi's doncs una potència Q tal que com BC sigui respecte a CF així sigui A ho sigui respecte de Q.

Llavors la potència Q, tirant per la línia QA, oblíqua al braç de la palanca CA, tira el mateix que per la distància CB representant el braç de la palanca [per l'axioma III].

Si $A \times CF = Q \times CB$ i $A \times CF = O \times CA$, llavors $Q \times CB = O \times CA$, i per tant, per Arquímedes (prop. I,6 i 7), les dues

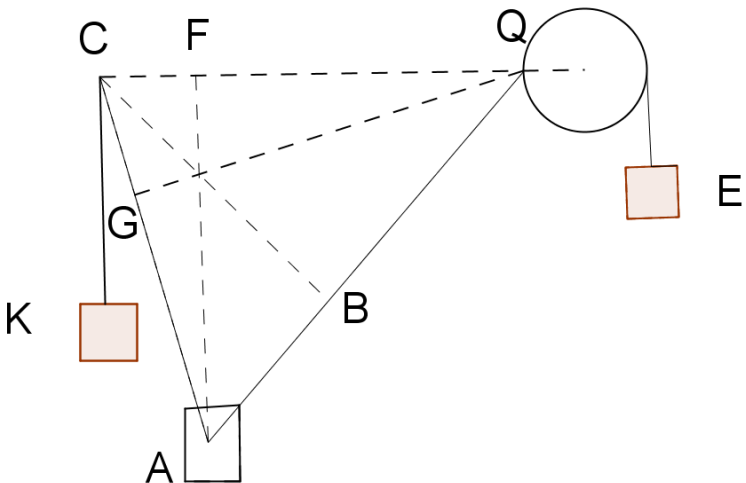
potències tirarien igual en una palanca imaginària ($O \times CA = Q \times CB$), la qual cosa implica que les dues impedeixen igualment que el cos llisqui pel pla inclinat, i per tant Q és la potència (o E el pes) que se cercava.

Aquesta primera demostració val quan la corda es troba en l'angle que fan AF i AO. Una segona prova, que segueix les mateixes passes, ho mostra quan la corda està en l'angle entre AO i la continuació de la línia CA cap a LM.

C. La descomposició del pes que penja de dues cordes.

Basti finalment fer un cop d'ull a la tercera proposició per a avaluar la destresa de l'autor:

«Estant donats un pes sostingut per dues cordes, o per uns suports, la posició dels quals sigui donada: trobar quina potència cal per a cada corda, o per a cada suport».



La proposició aplica a una corda i a l'altra el que s'acaba de demostrar en la segona proposició. És a dir, s'ha vist que, si CA és el braç d'una palanca en el qual el pes A, retintut per la corda QA, altrament lliscaria pel pla inclinat LN perpendicular a CA, llavors $A \times CF = Q \times CB$, tal i com s'ha dit dalt. El pes A és sostingut en part pel pla inclinat i en part per la corda QA amb la potència Q (o el pes E).

Però si ara es considera el pes A damunt d'un pla inclinat equilibrat gràcies al braç de palanca AQ, perpendicular al pla inclinat, s'admetrà llavors que $A \times QF = C \times GQ$. El pes A és sostingut ara per un pla inclinat i en part per la corda CA amb la potència C (o el pes K).

Com estan donats el pes A, la posició de cada corda, és a dir, l'angle CAQ, les cordes AQ i AC, amb els angles CAF, QAF, llavors les perpendiculars CB, QG, CF i QF són donades, i les seves raons. Per tant les raons de A amb les potències Q i C (o els pesos E i K).

La proposició es prova primer per a l'angle CAQ agut, i després quan és recte i quan és obtús. En tots els casos hi ha el mateix mitjà constructiu. Per tant es pot generalitzar (com diu el Corol·lari de la proposició).

§2. Concurrència de resultats amb divergència de camins.

1. La prova de la composició i descomposició del pes d'un cos mantingut en equilibri per dues cordes usa el pla inclinat com un mitjà, i per a aquest ha calgut les diferents palanques. Aquesta remissió a la palanca, que és el darrer terme de remissió, es troba ja als aristotilitzants *Problemes mecànics*.

El treball de Roberval esdevé prou il·luminador en tot això. Plau de concebre amb l'autor una comprensió (resultat d'una interpretació) del fenomen en clau de veure-hi la

possibilitat de pensar-hi palanques. Les màquines s'han convertit en llocs on un hom hi pot veure possibilitats palanquistiques: hi ha una palanquització de la pluralitat dels fenòmens, per tant arreu hi ha potències i braços. Certament això pressuposa si més no que els fenòmens que es perceben i on hi ha pesos, potències, etc., en plans inclinats i en cordes són els mateixos que s'observen en les palanques: és a dir, que tot plegat són manifestacions vàries del mateix capteniment natural en l'equilibri vari dels cossos pesants, quelcom prou bell i que fa obrir els ulls a allò que acorre i comprendre-ho.

Noti's així mateix que la descomposició de potències de Roberval equival (en les resultants) a la de forces de Newton.

En l'esquema del primer s'arriba a:

$$\frac{CB}{CF} = \frac{A}{Q} \quad \frac{GQ}{QF} = \frac{A}{C}.$$

Llavors: $A \times (CF + QF) = Q \times CB + C \times GQ,$

$$A = Q \times \frac{CB}{CQ} + C \frac{GQ}{CQ}.$$

Suma que es podria expressar així:

$$A = Q \times \sin \widehat{CQB} + C \times \sin \widehat{GCQ}.$$

Tanmateix això equival exactament a:

$$= Q \times \cos \widehat{FAQ} + C \times \cos \widehat{CAF},$$

que és la resultant de dues forces C i Q que tiren de les cordes cap amunt, resultant que segueix la diagonal del paral·lelogram de forces de Newton [tenint en compte que $Q \times \cos(90 - FAQ) + C \times \cos(90 - FAC) = 0$] – o també: donat un pes que penja A , i els angles de les cordes respecte de la vertical, llavors es pot arribar a les forces que el descomponen tot resolent el sistema de dues equacions amb dues incògnites.

2. Hi ha doncs una aportació des del pla inclinat i des de les palanques. Tanmateix la descomposició que s'hi veu va més

enllà en l'accepció que penetra en un estudi en el qual el pla i la palanca en formen part (poden entrar en continguts axiomàtics) al costat de proporcions geomètriques i de consideracions experimentals pel fet que un hom pressuposa que sap el que passa quan les cordes no acompleixen el fet de trobar-se tibant del cos en posicions inconvenients. En conjunt s'hi palesa el domini dels vaivens d'un cos, no sols en palanques, sinó en plans inclinats i en dispositius de cordes col·locades de totes les maneres possibles.

Roberval fa certament molt més: basti fer esment que l'escoli VIII sembla el resum d'una segona demostració de la descomposició a partir de consideracions que, usant el llenguatge d'avui, es deriven de comparar el treball de les potències i el treball de les resistències (un afer la pista del qual duria al segle XII, i a Jordanus de Nemore [1225-1260], passant pel Precursor de Leonardo da Vinci, i d'altres). Un hom és a prop doncs de l'univers de les forces i dels desplaçaments virtuals, etc.

§3. L'exemplarització de la composició de potències i de la descomposició de pesos en Roberval.

El breu esment de l'obra de Roberval permet descobrir amb sorpresa la descomposició dels pesos i la composició de potències des d'una concepció prenewtoniana. Hi ha un seguiment molt més directe del comportament de les màquines simples: palanques i balances, politges, plans inclinats, cordes de tot tipus. La teoria de les proporcions es deixaria simplificar al cap i a la fi en *una* raó concreta entre *unes* magnituds de tal manera que un hom es trobaria a prop de gaudir del funcionament d'un aparell en una experiència concreta, tot prenent *una* mesura i *una* altra. Les generalitzacions necessàries

no haurien d'encegar allò que és elemental quan és possible de fruir intensament d'una concreció.

Alhora conté prou dels trets que caracteritzen el coneixement científic: hi ha simplificació (idealització) física perquè no hi ha ròssecs, idealització geomètrica, s'exposa una llei general per a la composició i descomposició de potències, s'hi usen resultats acceptats d'altres, es presenta axiomàticament l'afer, etc. Per tant segueix un llegat rebut i l'engreixa.

Tanmateix val la pena d'insistir en la diferent manera de copsar una potència i el pes d'un prenewtonià respecte del seguidor de la força a partir del cos i de l'acceleració.

Ocorre que en aquest darrer hi ha molta elaboració de nocions bàsiques: no tant perquè l'equilibri d'un cos, per exemple, sembli impossible de ser comprès des d'acceleracions, quan fet i fet les dinàmiques aristotelitzants ho feien a partir de les respectives velocitats, com pel fet que en Newton es tracta més aviat que cal dissoldre el fet holístic i presencial del pes i de les potències respectives a partir de prendre'n distància: car la força se sap pels efectes de canvi en la magnitud d'un desplaçament, i tota la proporció que hi ha no en lleva la característica quan es fa també proporcional a una nova magnitud, la massa.

¿Per ventura cal concloure'n que la nova aproximació a patir d'una nova dinàmica deixa sense valor allò que féu Roberval? Qui ho defensés podria ser titllat segurament d'unilateral. Car el pas que duu a tenir en compte palanques imaginàries per a fer venir bé raons oportunes, i així ser capaç de trobar la potència d'un corda, o de dues, tot això fent el seu camí no pot ser simplement anul·lat i fet esvair per la nova mecànica quan aquesta analitza els esdeveniments d'acord amb d'altres paràmetres resultants d'una dialèctica entre pensament i resultant obtingudes. Les maneres d'apropar-se a la llei de la composició de forces, caldria més aviat avaluar-les com

l'expressió d'una congruència en el desplegament de les habilitats de l'esser humà a l'hora de repensar des de perspectives varies mils afers, malgrat haver d'admetre de seguida l'abast més i més ampli que permeten les noves concepcions i de denunciar des de les noves adquisicions la manca de discerniment. No falseja doncs pròpiament res, sinó que se supera, i arreu hi va havent una congruència pel fet de repensar-ho tot amb nova destresa intel·lectual.

Torna a ser vàlid el que es defensà dalt amb la demostració d'Arquímedes i el que es comentarà més avall a propòsit del treball virtual. És a dir: que hi ha diferents nivells de prova o demostració: que es troba una congruència entre tots els afers que han resultat vàlids o eficaços per al coneixement que pretén ajustar-se més o menys als esdeveniments naturals (i això fóra aplicable si mes no en part a l'explicació aristotèlica i tot); que cal no sols contraposar les resultant dels varis treballs, sinó també assumir allò que hi ha que els conjunta. Una ona sola seria inútil sense les altres per a fer un mar. La tradició occidental ha anat avançant cap a la seva platja des de l'aportació dels altres. La seva congruència també és una resultant de la història de moltes altres congruències⁷.

⁷ No gaudint d'antecedents tan rellevants com els proposats per Roverbal, ¿s'assumiria sense dificultats la composició i la descomposició de forces d'arrel newtoniana? L'explicació que fa de la composició per la superposició d'acceleracions faria comprendre quelcom que ja s'ha mostrat experimentalment o per l'esforç d'altres autors – i la descomposició d'un pes per la distribució d'acceleracions ho faria en unes circumstàncies semblants.

En d'altres paraules: Newton articularia un pensament, totes les peces del qual tindrien el seu origen en fets observats o en afers admesos (qualsevol element matemàtic és així), que permetria explicar els esdeveniments a partir de la llei del paral·lelogram.

Per tant hi hauria una manifestació de ciència físicomatemàtica, és a dir, d'una elaboració d'uns pensaments imbricats (es pensa matemàticament, quelcom que es forneix des dels esdeveniments naturals) eficaços per a

§4. Nota al principi de la composició de forces com a bàsic en l'estàtica.

Certament sempre es deu poder defensar una estàtica basada en la llei de la composició de forces. Històricament – per exemple – Pierre Varignon (1654-1722) ho féu tot acceptant els principis de la dinàmica aristotèlica, des de la qual la llei de la composició de forces no li sembla oferir molts problemes. Car pot ser reduïda a la llei de composició de velocitats i pot ser obtinguda pel mateix mètode usat per Roberval. Una vegada establert així el principi de la composició de forces, Varignon s'esforça a reduir tots els possibles casos d'equilibri en màquines simples a aquell principi⁸.

L'obra de Varignon té doncs un interès per diferents motius. Basti ara – per tafaneig terminològic – l'esment que fa de la potència i de la força en començar a partir de les definicions, els axiomes, els postulats i els lemes. Diu: «*On appelle Machine tout instrument dont on peut se servir à mouvoir un corps; et Puissance, tout ce qui l'y peut faire servir, ou en general tout ce qui est capable de mouvoir un corps, soit à l'aide d'une Machine, ou non. Tout ce que cette puissance exerce de force pour cela s'appelle sa force absolue, laquelle se prend aussi pour cette Puissance, lorsque cette force est tout ce que celle même Puissance est capable d'en exercer*»⁹.

comprendre un afer. D'aquí que no calgués esbrinar si la llei del paral·lelogram newtoniana és experimental o no: mai no ho hauria estat.

⁸ Cf. Pierre Duhem, *Les origenes de la statique*, A.Hermann, Paris, 1905/6, tom II, pàg.254-276..

⁹ Pierre Varignon, *Nouvelle Mécanique ou Statique, dont le projet fut donné en 1687*, Paris, Jombert, 1725, pàg.3.

Sigui com sigui la importància de la llei de la composició de forces concurrents es palesa en el fet que una part important de contemporanis la prenen com el principi de l'estàtica, mentre que el 1687 aparegueren els *Principia* amb la nova concepció de la força i de la llei de la composició.

¿Es pot assumir a partir de Newton que la llei de la composició de forces fa de principi de tota l'estàtica?

La resposta dependrà en qualsevol cas del pes que un hom vulgui donar a allò que s'anomena «demostració» i a allò que vulgui assumir explícitament o implícitament. Si més no sembla que l'assumpció d'una suma de forces total nul·la, i d'una altra de moments nul·la, basti per a l'equilibri intern d'un sistema de forces aplicades en un cos. I a nivell pràctic hi ha una clara preferència a l'hora de l'estudi de l'estàtica a favor de forces i de moments.

D'altra banda un hom pot arribar a demostrar l'equilibri d'un tot a través dels treballs virtuals. Ocorre que llavors apareix la qüestió de la necessitat de fer seu el teorema (o principi) dels treballs virtuals. ¿Cal demostrar-lo? Hi ha criteris diferents de resposta. Si més no totes les demostracions no ocasionals¹⁰ posteriors a l'autor anglès d'aquest teorema s'han basat en la composició de forces de Newton, la qual cosa faria pel cap baix que s'avalués la llei del paral·lelogram com a bàsica per a tota l'estàtica.

Passi's, tanmateix, a examinar una mica tot això dels treballs virtuals.

¹⁰ Fàcilment s'admet que el teorema del treball virtual prova la llei de la palanca i a l'inrevés, i això valdria per a d'altres màquines. Cf., per exemple, M.Duhamel, *Cours de mécanique*, Mallet-Bachelier, París, 1862 (3^a), tom I (hi ha l'estàtica i la dinàmica), pàgs.198-200.

III EL TEOREMA DELS TREBALLS VIRTUALS

La *Mecànica analítica* de Lagrange conté una obra sistemàtica de l'estàtica, recull el bo i millor de les aportacions anteriors, i s'ofereix com un treball analític que arrenca del principi de les velocitats virtuals.

«El principi de les velocitats virtuals pot lliurar-se de manera molt general de la següent manera:

Si un sistema qualsevol de tants cossos o punts com es vulgui, cadascun tirat per potències qualssevol, és en equilibri, i que un hom doni a aquest sistema un petit moviment qualsevol, en virtut del qual cada punt recorre un espai infinitament petit que expressarà la seva velocitat virtual, la suma de les potències multiplicada cadascuna per l'espai que el punt, on és aplicada, recorre seguint la direcció d'aquest mateixa potència serà sempre igual a zero, tot comptat com a positiu els petits espais recorreguts en el sentit de les potències, i com a negatius els espais recorreguts en un sentit oposat.

Jean Bernoulli és el primer, que sàpiga, que ha apercebut aquesta gran generalitat del principi de les velocitats virtuals, i la seva utilitat per a resoldre els problemes de l'estàtica. És això que un hom veu en una de les seves cartes a Varignon, datada el 1717, que aquest darrer ha col·locat al començament de la secció novena de la seva nova mecànica, secció dedicada tota entera a mostrar

per diferents aplicacions la veritat i l'ús del principi del qual es tracta.

Aquest mateix principi ha donat lloc després a aquell que Maupertuis ha proposat en les Memòries de l'Acadèmia de les Ciències de París per a l'any 1740, amb el nom de Llei de repòs, i que Euler ha descabdellat més i fet més general en les Memòries de l'Acadèmia de Berlín per a l'any 1751. Per fi encara és el mateix principi que serveix de base a allò que Courtivron ha lliurat en les Memòries de l'Acadèmia de Ciències de París per a 1748 i 1749.

I en general crec poder avançar que tots els principis generals que es podran potser encara descobrir en la ciència de l'equilibri no seran sinó el mateix principi de les velocitats virtuals, vistos diferentment, i dels quals no diferiran més que en l'expressió.

Però aquest principi és no sols molt simple en ell mateix i molt general: a més té l'avantatge preciós i únic de poder traduir-se en una fórmula general que recull tots els problemes que es poden proposar sobre l'equilibri dels cossos. Exposarem aquesta fórmula en tota la seva extensió: procurarem fins i tot de presentar-la d'una manera encara més general de com hom ho ha fet fins al dia present, i de donar-ne unes noves aplicacions»¹¹.

§1. Una estàtica analítica autònoma.

Des d'algun punt de vist el principi¹² apuntaria dos fets que sols aparentment semblen fàcils d'assumir quan es pensa en

¹¹ J.L.Lagrange, *Mécanique analytique. Nouvelle édition revue i augmentée par l'auteur*, Tome Premier, Courcier, París, 1811, pàgs.22-23.

¹² Assumi-se'l com a principi pel fet que Lagrange ho féu. Certament s'ha provat de demostrar a partir d'altres supòsits i llavors no seria pas un principi sinó un teorema. Més avall se'n dirà quelcom.

partícules (o en els centres de gravetat d'uns cossos): el primer, que la resultant del conjunt de forces que actuen en un sistema ha de ser nul·la per a estar en equilibri; el segon, que el sistema que està en equilibri permet una expressió analítica que inclogui la suma, que és zero, del producte de cadascuna de les forces implicades per una quantitat d'espai infinitesimal, respectiva de cada força i seguint la direcció de la seva aplicació.

Hi ha doncs una obvietat pel cantó de les forces i una estratagema lúcida pel cantó dels infinitesimals.

Però cal adonar-se també que la noció de força, tal i com s'admet des de llavors, fou una troballa de Newton que permet moltes digressions. La facilitat d'assumir-la avui no lleva les dificultats d'interpretar-la, i de fet un hom ho pot fer de diferents maneres segons les concepcions pròpies de la massa i del moviment.

Per la seva banda aquell infinitesimal, que s'anomena «desplaçament virtual» («velocitat virtual» en Lagrange), és independent del temps, s'expressa a través d'una específica delta minúscula enlloc de la minúscula del diferencial precisament per a reblar-hi que es fa al marge del temps, i segueix un càlcul analític paral·lel que no es fa funció del temps sinó d'altres variables.

La qual cosa implica, sembla, que el principi dels treballs virtuals no podria estimar-se un afer fàcil d'assumir immediatament perquè totes les obvietats es despleguen a partir de conceptes molt elaborats i des de llargues digressions analítiques. Hi ha, sí, una naturalitat a assumir-lo quan es parteix del domini de formes i de càlcul.

La gràcia del principi dels treballs virtuals rau doncs precisament a ser, en un sentit, una resultant, a més a més de ser un principi en un sentit diferent. Car és la conseqüència del progressiu domini de l'àlgebra i de l'anàlisi, de les troballes al llarg dels segles, en especial les dels segles XVII, XVIII, i

sobretot del fet d'haver-hi ments prou valentes i tenaces per tal de dur a terme la tasca analítica d'ajuntar en un sistema, quelcom que sempre és obert, un reguitzell de fórmules coherentment travades capaces de lliurar expressions generals als plurals afers de l'estàtica des de quelcom que sembla prou simple per a qui ho domina, que no deu ser assumit simplement a partir d'una experiència directa pel fet que és una resultant.

L'estàtica esdevé doncs una disciplina regida rígidament per l'anàlisi de tal manera que converteix el que fa en un ideari. D'alguna manera hi ha quelcom de prodigiós, sobretot en els estudiosos que el duen a terme. Ara se sap trobar una expressió quantitativa eficaç d'una gran part de fenòmens, i aparentment aquests no han estat ja peces cabdals per a l'estructura que els comprèn i els preveu.

§2. Els motius pels quals se l'assumeix.

L'estàtica analítica no mira immediatament de ser útil en les tasques pràctiques perquè atalaia d'entendre els lligams entre supòsits d'ordre ideal.

Malgrat això el principi de l'estàtica i les seqüències analítiques que proposa s'assumeixen per llur caràcter fructífer i perquè generalitzen en moltes accepcions i per tant també unifiquen allò que semblava difícil d'aplegar. L'èxit d'una estàtica analítica rau en el seu mateix exercici, i per això ningú no dubta de la seva bondat. És a dir: la justificació dels sistemes analítics rau en el mateix exercici que ho possibilita.

La interpretació que se'n fa remetria a un afer molt diferent.

Perquè es tracta d'acceptar que no hi ha oposició entre quantitat i qualitat; per tant que la circumstància de pensar quantitativament les relacions proposa una autonomia legítima que no té cap necessitat de bandejar una mirada representativa;

que les dificultats per a interpretar les vàries passes de la matematització es vencen amb bon sentit; que els propòsits d'enxarxar quantitativament els afers inclou, no podria ser altrament, idealització de plural mena; que es poden dur a col·lació els problemes mecànics que un hom cregui convenient; que la circumstància de seguir una seqüència analítica, de crear-la, d'alterar-la, etc., més aviat amb una unilateralitat de cerca, palesa una necessitat del mateix home, i no hi ha pas obligació d'estimar-la perquè mostri la consistència d'un sistema teòric.

En efecte el que avala una estàtica analítica és tota la història del càlcul, tot el que s'ha après de les forces, el reguitzell immens d'escrits relacionats; i el prodigi de comprendre una munió de problemes d'equilibri a partir d'unes seqüències deductives és la conseqüència de tot això, amb el ben entès que cal també algú que sigui capaç arribar-hi fins i tot si ignorés ben bé què ho ha fet possible.

§3. L'origen no exclou l'observació.

No caldria bandejar la voluntat d'entendre-hi, en els fets observats, regularitats que no s'hi lliuren sense algun esforç del qui s'hi presta; és a dir, la cura dels esdeveniments naturals i dels pensaments que s'hi troben implicats.

Perquè es pot presuposar que el principi del treball virtual, i dels desplaçaments corresponents, hi té un tal origen. La seva aparició en la història del pensament remetria molt enllà, i no s'entendria a banda del conjunt de la mecànica. Versemblantment amb el rerafons de remetre a trajectes (anomeni's, amb el llenguatge actual, mètode dels desplaçaments virtual), com fora el cas de Jordanus, de Descartes, de Wallis, o a velocitats (amb el llenguatge de principis del XVIII, mètode de les velocitats virtuals), que llavors se seguiria més aviat un aspecte peripatètic, i que

inclouria Charistion, Galileu i el mateix Johann (o Jean) Bernoulli (a partir del qual no sembla que calgui distingir més la terminologia, que avui ja ha abandonat la referència aristotèlica de la velocitat), no s'hi exclou aquell esforç d'entendre-hi¹³.

Basti alguna referència anterior a Bernoulli per a copsar-hi la tensió entre pensament i observació. John Wallis (1616-1703) – entre les moltíssimes afirmacions que conté la seva obra *Mechanica, sive de motu. Tractatus geometricus* (1670-1671) – defensa (*Pars prima*, cap.II) per als cossos que cauen o que puguen una mesura de la seva caiguda o pujada: el producte del seu pes pel recorregut que fan quan cauen o puguen. Quan hi ha diferents cossos es calcula la suma de totes les caigudes i de totes les pujades. Si la primera és més gran el seu excés representa la magnitud total de caiguda, si la segona, la magnitud total de pujada. Si són iguals els sistema roman en equilibri.

Wallis fa quelcom més: estén això referit a la força¹⁴ de la gravetat a una qualsevol altra força motor, que llavors es mesura pel desplaçament efectuat en la direcció d'aquesta força (i la força contrària pel desplaçament en una direcció oposada). Per tant el conjunt del moviment de cadascuna de les forces s'obté pel càlcul del producte de la força respectiva pel seu desplaçament.

¹³ El lector pot consultar amb profit el llibre de Pierre Duhem citat, especialment tot el capítol XVII dedicat a la sistematització de les lleis de l'estàtica.

¹⁴ En la terminologia de John Wallis: «*Gravitas, est vis motrix, deorsum: sive, ad centrum Terrae*», «*Vim motricem, vel etiam Vim simpliciter, appello Potentiam efficiendi motum*», «*Momentum, appello, id quod motui efficiendo conducit*» (definicions XII, V i III, respectivament), *Mechanica, sive de motu. Tractatus geometricus, Pars Prima*, Londres, Typis Gulielmi Godbid: impensis Mosis Pitt, Londres, 1670, pàgs.2-3.

Ha establert doncs el principi que li serveix de base per a la seva estàtica, idees que caldria esperar més de quaranta anys perquè tornin a aparèixer amb la carta de Bernoulli.

Certament Wallis ha de pressuposar que les forces són constants i els desplaçament en línia recta (també és veritat que no li són estranyes les consideracions infinitesimals).

L'univers que fa present l'anglès és doncs aquell que amb terminologia molt posterior s'anomenarà treball. Versemblantment no sembla desencertat de veure-hi l'esforç d'entendre l'esdeveniment que ocorre amb les forces com a treball, i el fet que la igualtat de treballs en sentit oposats fan l'equilibri. Per tant l'equilibri pressuposa la igualtat entre treballs virtuals.

Independentment de la noció de força de Walis, versemblantment les nocions d'igualtat de magnituds en l'accepció del producte d'una força per una distància deu remetre a consideracions que deriven de l'observació, o si més no les generalitzen.

Per tant les paraules que Ernst Mach escrigué ja fa prou temps es mantenen encertades quan es rellegeixen avui. A l'apartat dedicat al principi dels desplaçaments virtuals s'esforça a cercar aquells elements d'observació que hi dugueren (les politges de dos, sis i vuit cordes, l'estudi de Galileu dels plans inclinats i la troballa – parlant amb llenguatge posterior – de la igualtat de treballs, la continuació que en féu Torricelli, hi porta a col·lació Johann Bernoulli), apuntà com es generalitza el principi, com s'hi introdueixen les consideracions infinitesimals, l'exemplaritzà des de les màquines simples (i des de la concepció newtoniana de la força), sostingué que la prova del principi feta per Lagrange ja el pressuposa i hi va introduir alguna elaboració de Maupertuis i d'Euler. I en acabant concloué:

«És important de tenir clar que en el principi es tracta solament de constatar un fet. Quan es bandeja això, llavors se sent

sempre una manca i s'hi cerca un fonament, que no cal trobar. Jacobi cita en les seves "Vorlesungen über Dynamik" que Gauss havia dit (verbalment) que les equacions del moviment de Lagrange no s'havien provat sinó que sols estaven expressades històricament. En efecte ens sembla que aquesta comprensió és la correcta també en referència al principi dels desplaçaments virtuals.

La tasca dels investigadors anteriors que han estat bàsics en un camp és molt diferent de la dels que vénen després. Els primers han de cercar i constatar sols els fets més importants, i per això cal, com ensenya la història, més esperit del que es creu comunament. Estan lliurats els fets més importants, llavors hom els pot fer servir deductivament i lògicament en la física matemàtica, pot ordenar els camps, pot indicar que, en l'acceptació del fet, s'hi inclou tota una sèrie d'altres fets que un hom no veu simplement igual en el primer. Una tasca és tan important com l'altra. Però cal no barrejar l'una amb l'altra. No es pot provar matemàticament que la natura ha de ser així com és. Però es pot provar que les qualitats observades codeterminen, sovint no visible directament, una altra sèrie.

Finalment cal remarcar que el principi dels desplaçament virtuals, com qualsevol altre principi general, a través del poder que se li atorga té un efecte alhora decebedor i esclaridor. És decebedor en la mesura que hi reconeixem sols fets llargament coneguts i instintivament discernits, si bé més penetrantment i més determinadament. És esclaridor mentre ens permet de veure, per damunt dels mateixos fets simples, relacions de la màxima complexitat»¹⁵

¹⁵ Ernst Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1991 [reproduueix la novena edició feta a Leipzig el 1933, 1^a 1883], pàgs. 68-69.

§4. Nota sobre la rellevància dels infinitiesimals.

L'obra de Pierre Varignon *La nova mecànica o estàtica* seguida pel *Projecte per a una nova mecànica* fou publicada pòstumament el 1725. Ja s'ha dit que conté la carta que li envià Johann Bernoulli des de Basilea el 26 de febrer de 1717. S'hi estableix el principi de les velocitats virtuals per a tota mena de sistemes (ja no cal que les forces s'apliquin en línia recta) amb magnituds virtuals infinitament petites.

Des dels càlculs analítics actuals cap enrere fins a arribar al mètode de les exhaustions s'hi va trobant consideracions infinitiesimals. El seu enorme avantatge, la meravella que fa present, rau si més no en algunes característiques cabdals: la primera la circumstància d'avaluar l'infinitiesimal com a alguna cosa o com a no-res, depenent del plantejament de l'afer. El polígon inscrit mai no arriba a ser la circumferència quan el nombre dels seus costats creix, però sí que la té com a límit (hi ha infinitiesimal amb una doble avaluació). La divisió entre dues quantitats infinitiesimals pot considerar-se com entre dos no-res o no, etc. El gran Bertrand Russell es va equivocar quan es va convèncer que, amb Weierstrass, es resolien les ambivalències en els infinitiesimals. Precisament llur utilitat rau en la doble cara que permeten.

La possibilitat de l'estudi de línies i superfícies corbes i, en conjunt, de trajectes complicats en un qualsevol aspecte, fóra una segona característica rellevant, al costat de permetre una dimensió quantitativa a un qualsevol esdeveniment que no es manté regular en algun sentit (per exemple, una força). En principi l'infinitiesimal minimitza fins on convingui la desviació

i la irregularitat, i permet d'entendre i de mantenir com a magnitud un límit geomètric o una relació en un càlcul.

Una tercera característica cabdal es recolza en el fet que la quantitat infinitesimal es troba implicada amb quantitats que no ho són, i que llavors pot adquirir una rellevància singular. Seguint els exemples de dalt: hi ha la circumferència, hi ha la funció derivada, etc.

Mutatis mutandis caldria estendre els trets a no importa quin càlcul amb infinitesimals.

Si més no se suposa que s'és capaç en l'estàtica de lliurar funcions dels moviments que depenguin de variables independents i de ser capaç d'extreure'n les quantitats infinitesimals que fan de desplaçament virtual precisament a partir de la derivació que permet aquella funció.

Prengui's com a expressió del principi del treball virtual¹⁶:

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

que, en coordenades cartesianes, s' escriu així:

$$\sum_i^N (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = 0$$

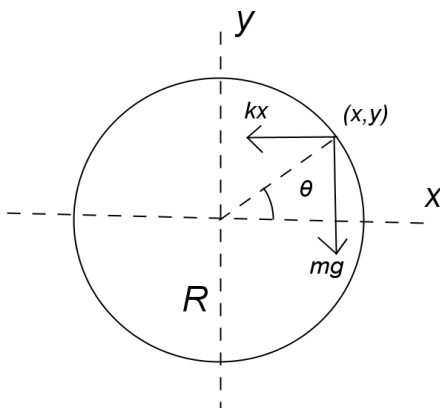
Un exemple¹⁷ farà entendre el rellevant poder dels desplaçaments virtuals: es demana de trobar les posicions d' equilibri d' una partícula a moure's sobre la següent circumferència vertical:

¹⁶ Dalt s'ha esmentat que la presència del símbol δ (i no de d) es deu que aquest desplaçament virtual es fa independentment del temps; és a dir, no hi té una connexió mitjançant les lleis de la dinàmica. No hi ha en principi un temps infinitesimal definit dt

¹⁷ Cf. El laboriós treball de Vicent Martínez Sancho, *Fonaments de física* (dos volums), Enciclopèdia Catalana, Barcelona, 1991, I, pàgs.118-121.

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

i sotmesa a una força atractiva directament proporcional a l'abscissa:



El camp de força aplicat sobre la partícula serà:

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{i} - mg\mathbf{j}.$$

[El primer terme sempre va dirigit cap al centre, el segon cap avall]. Admetent-se que:

$$x = R\cos\theta$$

$$y = R\sin\theta.$$

Llavors:

$$\mathbf{F} = -kR\cos\theta\mathbf{i} - mg\mathbf{j}$$

Pel principi del treball virtual:

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0.$$

En aquest cas

$$-kR\cos\theta\mathbf{i} \cdot \delta\mathbf{x} - mg\mathbf{j} \cdot \delta\mathbf{y} = 0.$$

Però si $x = R\cos\theta$, llavors:

$$\delta\mathbf{x} = \frac{\delta\mathbf{x}}{\delta\theta} \delta\theta = -R \sin\theta \mathbf{i} \delta\theta$$

i si $y = R \sin \theta$, llavors:

$$\delta y = \frac{\delta y}{\delta \theta} \delta \theta = R \cos \theta \delta \theta$$

θ fent de variable generalitzada. Substituint i generalitzant:

$$kR \sin \theta \cos \theta - mg \cos \theta = 0.$$

D'aquesta equació es poden treure immediatament les quatre posicions d'equilibri. La simplicitat del cas no impedeix d'annotar l'eficàcia dels infinitesimals en el principi.

§5. La preeminència del principi del treball virtual.

Aquest principi pressuposa una circumstància que deu poder estendre's també a un qualsevol treball, independentment de l'estàtica. Això és, que els treballs són comparables i poden ser iguals i tot, i dirigits en una mateixa direcció o oposada. El treball es transmet, fa la competència a un altre treball, s'hi oposa, col·labora amb un altre treball, etc.

L'expressió quantitativa de tot això no impedeix de dirigir la mirada a un fet capaç de suggerir una munió de qüestions. La transmissió del treball sembla una nova manifestació del fet que un hom no estima que hi hagi anorreament de res (no hi ha recreació o destrucció, sinó sols transformació). Però qualsevol relació d'un treball amb un altre hauria, sembla, de ser la conseqüència d'un camp experimental. Perquè, què és aquí allò que és coherent o que segueix una racionalitat determinada? Versemblantment la defensa dels capteniments del treball i dels treballs deu tenir el seu suport en el vaivé entre pensament i percepció, de tal manera que hi ha un procés que proposa des del pensament i que percep intencionalment (o a l'inrevés). Car es podria reivindicar que es tracta de quelcom suggerit pel comportament dels afers; és a dir, que no sembla poder-se dubtar que l'observació i la lectura que se'n fa ha d'haver donat

peu a rastrejar-ho – tot i això algú podria proposar que es tracta d'un principi heurístic i d'investigació.

Certament ningú no busca sense quelcom que ho faci entendre. I difícilment es manté res general que no hagi estat suggerit. Les relacions del treball amb el treball deuen ser doncs això, un afer enmig d'un tot, i en conjunt les coses deuen anar sempre així.

Si l'expressió quantitativa d'això tendeix a esvair allò capaç de provocar les consideracions de treball, el treball remet – més enllà d'un mer pragmatisme del ja adquirit – a les pautes d'espais i de temps i a relacions de cossos, i fa entreveure que hi ha quelcom en l'esdeveniment que fa que es mantingui alguna cosa.

Si més no el principi dels treballs virtuals proposa l'anul·lació de tots els treballs virtuals per a un sistema en equilibri. Gairebé es podria afegir que és obvi per ell mateix quan un hom assumeix per a tot treball que no s'estimba en el no-res: per tant que si hi ha equilibri el treball global ha de ser nul. És clar que també es podria recórrer a l'inversa: allò que ocórrer en un sistema en equilibri palesa el tarannà dels treballs virtuals, és a dir, que es comparen, es contraposen, s'igualen, etc.

Malgrat tot el principi no és pas evident per més entenedor que arribi a ser. Hi ha una coherència conjunta de tot amb tot, i cada àmbit deu quelcom a la suggerència empírica i molt a la manera d'anar analitzant, quantificant, fins a arribar a la formulació.

Cal aplicar-ho a les consideracions de treball finites o infinitesimals. Però cal aplicar-ho a tot el que s'ha après de les palanques i de la resta d'aparells. I s'ha de perllongar amb l'adquisició del que és la força segons els antics, els clàssics i els moderns, i les respectives lleis de la composició de forces.

Hi ha, sí, alguna circularitat en tot això, i alhora s'és capaç d'una jerarquització. Per això la prevalença del principi del treball virtual no és incompatible a creure que aquest principi és demostrable des de la palanca o provable des de la llei de la composició de forces. O que el mateix Lagrange ho provés a patir del que anomena el principi de les polítges mentre defensa l'afirmació anterior.

Sens dubte les demostracions que s'han fet reblen més aviat que hi ha una congruència entre forces, palanques, treballs, d'altres màquines, sistemes en equilibri, etc. Potser es podria afegir que el pensament no sap de vegades ben bé com s'hi ha arribat, al conjunt.

Una qualsevol demostració rebla aquesta congruència, mentre la fa palesar, i, per tant, la manté¹⁸

¹⁸ El lector pot trobar diferents demostracions del principi dels treballs virtuals. Una de les més fascinants es troba en l'opuscle *Démonstration du principe des vitesses virtuelles: considéré comme base fondamentale de la mécanique*, (St. Pétersburg, À l'imprimerie des Voies de communication, 1832) de Pierre Dominique Bazaine, que usa la llei de la composició de forces. L'escrit és fàcil d'adquirir: el seu autor es proposa de lliurar una prova del principi per a l'obra de Lagrange pel fet que estima que no n'hi ha prou amb la basada en el principi de les polítges continguda en la *Mécanique analytique*.

També Vicent Martínez Sancho el demostra en el treball esmentat (pàgs.68-69) a partir de la composició de forces i rebla l'exigència de no admetre'l com a principi, sinó com a teorema.