F. GRAELL I DENIEL

UNA NOCIÓ DE VECTOR EN L'ESPAI TRIDIMENSIONAL

ESCRITS DE FILOSOFIA DE LA CIÈNCIA

QUADERNS DE FILOSOFIA

59

F. GRAELL I DENIEL

UNA NOCIÓ DE VECTOR EN L'ESPAI TRIDIMENSIONAL

ESCRITS DE FILOSOFIA DE LA CIÈNCIA

59

QUADERNS DE FILOSOFIA

1ª edició febrer 2024

ISBN: 978-84-123314-5-5

www.dossier.xtec/graell
www.xtec.cat/~fgraell
www.quadernsdefilosofia.cat

E-mail: fgraell@xtec.cat

Podeu fer ús de l'adreça electrònica per a qualsevol correspondència amb *Quaderns de Filosofia*.

Es prega de tenir en compte sempre de consultar si hi ha una nova edició dels quaderns (que inclou canvis de vegades prou rellevants) en el web esmentat.

CONTINGUT

PRÒLEG

1. La necessitat de l'estudi detallat de les operacions amb vectors, l'eixamplament del marc de manera que valgui per a un espai geomètric cartesià d'eixos ortogonals, també per a un espai amb eixos oblics, àdhuc al marge d'un qualsevol origen de coordenades, tenint en compte en cada cas allò característic que cal indicar, etc., manté com a objectiu fer unes operacions amb vectors i un càlcul vectorial, és a dir, unes singulars maneres d'assumir tot tipus de qüestions (geomètriques i físiques sobretot), i resoldre-les, en les quals activitats no romanen present les bases que han justificat l'acceptació de les operacions i dels enfocaments. El càlcul vectorial, per exemple, fa com els altres càlculs: treballa autònomament, permet que se suggereixi qüestions i resolucions amb el ben entès que ja no es tracta tant de provar la seva validesa com d'usar-lo quan convé.

Un nou tractament, proper a l'algèbric, el subsumeix, no com a part, sinó com a eina, dins d'una altra manera de descabdellar-se una activitat d'aquest tipus. L'estudiós de les operacions amb vectors i del càlcul vectorial resta sorprès en efecte de la relativa facilitat amb què s'aconsegueix arribar a demostracions més complexes potser en d'altres estudis i càlculs, o a resoldre problemes geomètrics amb força agilitat. Hi ha com un encantament en aquest fer, que deu ser deutor de molts altres, de manera que s'aconsegueix simplificar de vegades considerablement els plantejaments i sovint les solucions.

2. Les operacions (l'addició, la subtracció, els dos productes) no pressuposen que el punt de partida sigui el de vectors que tenen el mateix origen, ni menys que s'hagin de trobar en l'origen d'unes coordenades.

Òbviament tampoc no pressuposa que no hi hagi d'haver un origen comú. Qualsevol aplicació física o geomètrica permet perfectament suposar-ho. Allò rellevant rau que són casos particulars que no invaliden la definició de les operacions al marge de l'origen dels vectors. Hi ha una llibertat il·limitada, acompanyada del fet que es pot operar amb un qualsevol vector igual i paral·lel a un de donat, perquè l'anàlisi vectorial no té cap necessitat de treballar altrament en les operacions, i de fet les defineix de manera que ho pugui fer.

Certament aquí ja no té importància d'on n'ha tret la inspiració: ho estableix en un grau encara més amunt a nivell d'una expressió que manté les seves regles, i que sap particularitzar-se perfectament en els casos que convingui perquè també aquí s'hi aplica les definicions tal qual s'han proposat, apreses precisament a partir, per exemple, dels molts casos que s'assumeix físicament.

3. Tanmateix nosaltres farem un camí invers. Mentre l'estudi dels vectors i del càlcul vectorial simplifica l'exposició, complicarem el que s'hi considera, especialment els assumptes més elementals; si es facilita uns mitjans eficaços, ara oferim una exposició inútil i ineficaç en física i en geometria; es passa en el primer de pressa pels inicis, i nosaltres ens hi aturem amatents. Es tracta de descobrir una mica què fem ben bé quan es treballa amb vectors en l'espai tridimensional, i de fer-ho, no com a prolegòmens d'una exposició dels vectors en matemàtiques, sinó com a interessats a escorcollar què hi comprenem, en la mateixa noció de vector, i en què ens basem en les operacions més senzilles. La feina del matemàtic consisteix a lliurar una presentació dels vectors clara i consistent, però la del filòsof rau a regirar allò més senzill per tots costats per tal de veure-hi l'abast sense que li importi que no tingui conseqüències. La seva resultant és la mateixa consideració que, si fa complicat el que és senzill, no és per mor de plaure's en els embolics, sinó de no assumir el no donat.

En efecte moltes de les obvietats en aquest camp provenen dels sabers adquirits: l'après permet suposar reiteradament que no s'hi troba dificultats, malgrat que basta de sospesar una mica el que es domina per tal que brollin preguntes sense resposta, i alhora que aparegui una munió de suggerències no albirades abans. Car, quan pretenc saber-ho, no faig més que aferrar-me al meu propi comportament, i sols quan no ho faig se'm manifesten els problemes.

La circumscripció a un nombre limitat d'afers a tenir en compte es deu que, més enllà d'això, hi ha la resultant d'un domini en les diferents camps de la matemàtica impossible d'obtenir-la altrament: sols s'hi pot arribar així. Ens basta, però, per a comprendre els nostres aprenentatges, de revisar ben bé què és un vector en el nostre espai, com s'opera, les relacions de què gaudeix, a nivell de noció, amb la geometria, com hi podem expressar una línia, i d'altres. És a dir, escollim un reguitzell d'assumptes elementals, tants com trobem necessaris per a satisfer les nostres preguntes.

4. El treball suposa afers ja estudiats, i que ara repassarem succintament. Per exemple, que la representació, en l'accepció usada aquí, se circumscriu al que és perceptiu o imaginat: una qualsevol interpretació vàlida hauria de partir del representat de manera que no hi hauria un univers ideal que fos aquell que garantís una activitat que podria estimar-se preferent. La unitat, valgui el cas, parlaria del copsament d'un tros representat o imaginat abans de fer-se apresa i, amb els nombres, arribar al càlcul.

L'expressió faria ús de la llengua, havent-se de sotmetre a unes condicions seves, sense que el que es digués a nivell bàsic pogués sostreure's d'atendre el representatiu, i més enllà hi hauria un discurs autònom eficaç i útil en les converses diàries i a l'hora de fer ciència.

La significació de quelcom duu a un afer diferent: la significació del mot «casa» no es troba en el so «casa», sinó més enllà. Tota significació expressiva o remet també al representatiu o palesa un domini que no ho fa sense que calgués atribuir-hi cap prerrogativa òntica.

Des d'aquí es comprendria que el símbol seria una de les formes expressives que remetrien des d'això o allò a una altra cosa, mentre que la icona conservaria una mica el que fa el símbol, i també gaudiria d'alguna cosa de la comparació, la qual remetria al cos propi com a condició. La icona es trobaria a mig camí de ser símbol i de ser comparació.

La nostra disciplina s'aferraria tant com pogués a la representació i, quan no fos possible, atendria els mers significats assumint-ne llur pobresa real, malgrat poder ser meravellosa. Estaríem obligats a «tocar de peus a terra», no hauríem de lliurar un manual per a aprendre càlcul vectorial, sinó de referir com hauria estat factible d'arribar a concebre un vector i com el faríem progressar.

I
UNS PRIMERS ESBOSSOS

Començarem amb alguna referència d’un dels treballs rellevants a l’hora de l’assumpció de les operacions vectorials i del càlcul corresponent, que permetrà que centrem allò a considerar.

1. **Entre els vectors i els escalars.**

Una bona presentació d’un vector mereix ser llegida com cal, i ens n’aprofitaren per tal d’iniciar-nos en l’afer. Diu així:

«1.] En matemàtiques i especialment en física es presenten dos molt diferents tipus de quantitat. Considerem, per exemple, massa, temps, densitat, temperatura, força, desplaçament d'un punt, velocitat i acceleració. D'aquestes quantitats algunes es poden representar adequadament amb un sol nombre − la temperatura, per graus en una escala termomètrica; el temps, per anys, dies o segons; la massa i la densitat, per valors numèrics que es determinen completament quan la unitat de l'escala està fixada. D'altra banda les quantitats restants no són capaces d'aquesta representació. Segur que es diu que la força és de tantes lliures o grams de pes; la velocitat, de tants peus o centímetres per segon. Però *a més* de cadascuna s'ha de considerar que té tant *direcció* com magnitud. Una força apunta cap al nord, sud, est, oest, amunt, avall, o en alguna direcció intermèdia. El mateix és cert del desplaçament, de la velocitat i de l’acceleració. Cap escala de nombres no pot representar-los adequadament. Només pot representar la seva magnitud, no la seva direcció.
2.] *Definició*: un *vector* és una quantitat que es considera que posseeix tant *direcció* com *magnitud*.

Definició: un *escalar* és una quantitat que es considera que posseeix *magnitud* però no direcció»[1].

Un vector és doncs una quantitat considerada amb direcció[2] i magnitud. Si des del punt de vista de la disciplina matemàtica no sembla que hi hagués res a dir, nosaltres proposem de preguntar *com* un vector pot ser una quantitat, ja que el traç (*stroke*) no lliura immediatament una quantitat, i potser la direcció i el sentit que proposa no coincideix amb la direcció i el sentit que voldríem. En el traç o el segment hi ha quelcom a descobrir interessant, o que pot resultar profitós a l'hora d'avaluar el conjunt de l'analítica vectorial.

Vector analysis distingeix el vector matemàtic (que és el lliure) del vector físic (que és el lligat). Malgrat que no en farem molt cabal, sí que convé d'observar la rellevància del vector en física per a comprendre les mateixes operacions vectorials, tal i com ho defensen els nostres estudiosos.

2. **Hi ha un referent físic.**

En efecte s'afegeix més avall:

«Com a exemples de quantitats vectorials s'ha donat la força, el desplaçament, la velocitat i l'acceleració. Cadascun d'aquests té unes altres més característiques que les que pertanyen a un vector pur i simple. El concepte de *vector* inclou dues idees i només dues – magnitud del vector i direcció del vector. Però la força és més complicada. Quan s'aplica a un cos rígid, cal tenir en compte la *línia* en la qual actua; la magnitud i la direcció per si soles no són suficients. I, en cas que s'apliqui a un cos no rígid, el *punt* de

[1] *Vector Analysis: A Text-Book for the Use of Students of Mathematics and Physics*, J. Willard Gibbs, Edwin Bidwell Wilson (1ª edició 1901), el citem per l'edició de Yale University Press, New Haven, 1913, pàg.1.

[2] En català diferenciem entre direcció i sentit, mentre que els textos en anglès parlen sols de direcció. Ens permetem de parlar de direcció-sentit quan faciliti d'evitar alguna confusió.

l'aplicació de la força és tan important com la magnitud o la direcció. Això és sovint cert per a d'altres quantitats vectorials que no són la força. A més la qüestió de les dimensions és present com en el cas de les quantitats escalars. El vector matemàtic, el traç, que és l'objecte principal de la consideració en aquest llibre, abstreu, de totes les quantitats immediates, la seva magnitud i direcció, i res més que aquestes; igual que l'escalar matemàtic, el nombre pur, abstreu la magnitud i només això»[3].

La força no és un vector en el sentit de la matemàtica pura. Tanmateix els vectors se semblen suficientment a les forces perquè siguin útils quan s'hi tracta[4].

Ara bé: cal estar atents a com la física fa les operacions fonamentals:

«En estendre a vectors les operacions fonamentals de l'àlgebra i de l'aritmètica, és a dir, l'addició, la subtracció, i la multiplicació, cal tenir cura no només d'evitar definicions contradictòries, sinó també d'establir definicions útils. Tots dos objectius es poden aconseguir de la manera més natural i fàcil mirant la física (perquè en aquesta ciència els vectors es presenten constantment) i observant com s'hi tracten les quantitats. Si llavors **A** és un desplaçament, una força o una velocitat, donats, què és dos, tres o, en general, *x* vegades **A**? Què és el negatiu de **A**? I si **B** és un altre vector, què és la suma de **A** i **B**? És a dir, què és equivalent a **A** i **B** presos junts? Les respostes òbvies a aquestes preguntes suggereixen immediatament les definicions desitjades»[5].

---

[3] Ídem, pàg.3.

[4] Cf.ídem, pàg.92.

[5] Ídem, pag.6. Més avall, una vegada enllestides les primeres operacions elementals, afegeix: «les operacions d'addició, subtracció i multiplicació escalar s'han definit per als vectors en els camins suggerits per la física i s'han utilitzat en unes quantes aplicacions.», ídem pág.55.

3. **El vector de l’anàlisi vectorial és una icona.**

1. El vector de la matemàtica pura no és sense més el vector de la física, i alhora mira com treballa aquesta darrera disciplina les quantitats de velocitat, acceleració, força, i s’hi inspira a l’hora de circumscriure les operacions fonamentals.

D’aquí que es pugui preguntar ben bé què és un vector en l’accepció de què s’hi considera, que deu tenir una resposta que en part ha de valer tant per al vector de la matemàtica pura com per al de la física.

Si més no el vector en matemàtica es lliura, segons *Vector Analysis*, com una *quantitat* amb *direcció* i *magnitud*[6]. Se’l podria copsar a tall d’una representació (forma part de la realitat perceptiva) que s’assumeix amb un contingut.

2. Ocorre que una direcció, com a tal, no es manté al mateix nivell que una magnitud o que una quantitat. Per això parlem avui de quantitat vectorial, que rebla què hi afegim, a la quantitat.

Agafem primerament el mateix dibuix del vector o traç[7]. Cap instància física o cap translació no gaudeix d’una fletxa, sinó que

---

[6] Es parla de la *direcció* i de la *magnitud* dels vectors. S’admet (cf.ídem, pàgs.2-3) els afers vectorials específics en física com a tenint també *dimensió* (una distància de tres metres, un temps de tres segons, etc.); pel cantó dels escalars el nombre pur implica sols magnitud, nombre pur que s’abstreu dels nombres aplicats. Fent un quadre del que diu *Vector Analysis*:

Quantitat matemàtica	*vector matemàtic*	(magnitud direcció)	*escalar matemàtic*	nombre pur matemàtic (magnitud)
Quantitat física	*vector físic*	(magnitud, dimensió direcció)		nombre aplicat (magnitud amb dimensió)

En efecte la quantitat es diu d’un tot amb parts, i també del nombre – la magnitud suposa quelcom que pot ser més o menys, i també pot comprendre (com aquí) el nombre.

[7] *Vector Analysis* parla de vector o traç (cf. ídem, pàg.3), però potser és millor diferenciar entre vector i dibuix de vector o traç, en l’accepció d’una

aquesta és un dibuix: la bola caurà cap avall i exemplifico el seu pes per un traç que apunta el terra. Alhora estimem que la direcció i el sentit del traç representen correctament el fenomen físic. Llavors hi ha un paral·lelisme entre el seguiment del traç des del seu començament al final, i la direcció i sentit que percebo, o penso-imagino, del pes. Represento quelcom que percebo o penso-imagino. No copio ni faig un dibuix de quelcom: el representat no és com el representant.

Un paral·lelisme entre el que percebo o penso-imagino i el traç que segueixo només pel fet del respectiu seguir una direcció i sentit. Li lliuro, al pes, aquesta representació.

Hi hauria una assimilació de direccions i sentit, quelcom que remet «al meu cos no dat», el traç faria recordar el que succeeix en la realitat física, i alhora el traç és un dibuix incorporat que treballa amb direcció i sentit quan se'l copsa fent-ho.

Havent-hi una assimilació no es pot parlar de simplement de simbolisme, sinó d'icona, que sempre manté quelcom simbòlic pel fet que el paral·lelisme esdevé per afers diferents, seguint un traç o pensat-imaginat un esdeveniment, quan no el percebem.

Es tracta de quelcom a mig camí entre la comparació i el simbolisme.

Quan parlem de vector ens referim doncs a una icona, un dibuix que és representatiu (per la seva direcció i sentit) i amb un contingut (la significació quantitativa i una assimilació).

I es parla de representació perquè hi ha una realitat perceptiva, és la seva realitat; amb un contingut, contingut que és el tot d'una significació i d'una assimilació (hi ha una icona).

Es pot dir que representa en l'accepció d'estar en lloc d'un altre: una tal manera d'expressar-se es deu al fet que la representació té contingut que ja no pot ser, parant esment des del traç, sinó pensat-imaginat.

3. Tot això val així mateix per als desplaçaments en l'espai. Quan volem indicar que desplacem un punt a un altre, ho representem pel traç. No hi ha físicament cap vector entre els punts, sinó que

representació amb un contingut afegit i una representació tal qual, respectivament.

pensem-imaginem el pas d'un punt a l'altre, i el vector permet l'assimilació i la representació corresponent, de manera que torna a haver-hi una icona.

4. La icona del vector, que se segueix des del seu punt d'aplicació al seu terme, també és un segment com ho pot ser un qualsevol altre. En efecte un qualsevol segment, que primerament és una secció de la línia, permet així mateix exemplificar un nombre real, i de fet pot servir per a aprendre el domini dels nombres des de la unitat a un qualsevol[8].

Quan ja s'ha aconseguit aquest domini s'admet sense dificultat el paral·lelisme estructural de tots els nombres, aplicats o no.

Per tant, com tot segment deixa considerar-lo amb la quantitat numèrica[9] que es vulgui, és susceptibles d'esdevenir divisible en una sèrie que s'enumera i es compta, o d'atribuir-li «un qualsevol nombre», quelcom que deu ser equivalent a «ser divisible en les parts que es vulgui», o a «estar compromès amb les quantitats que es necessiti». És clar que el traç, com a representació, no ho inclou: es tracta d'una significació del traç.

A aquesta exemplificació quantitativa, s'hi afegeix que es considera que el vector afecta una direcció i sentit. El traç fa aquí de quelcom amb alguna relació amb una direcció i sentit, fa d'icona, però és més que una icona quan exemplifica quantitat.

El vector s'ofereix com una icona quantitativa establerta en profit de les disciplines de la ciència. I és una expressió del domini de les disciplines formals i geomètriques.

No seria exacte de dir que la icona significa la direcció i sentit perquè hi ha una assimilació de la representació amb el pensat-imaginat, si no percebut, i en aquesta mesura no ho significaria, però sí que hi ha alguna significació en tant que una tal representació ho simbolitza.

El vector és doncs una icona exemplificant de quantitats, i que representa, seguint-lo, quelcom percebut, o que penso-imagino.

[8] Cf. *La unitat i el nombre. Una introducció a l'aritmètica* QF31.
[9] Si no s'hi afegeix res més, una quantitat serà sempre numèrica.

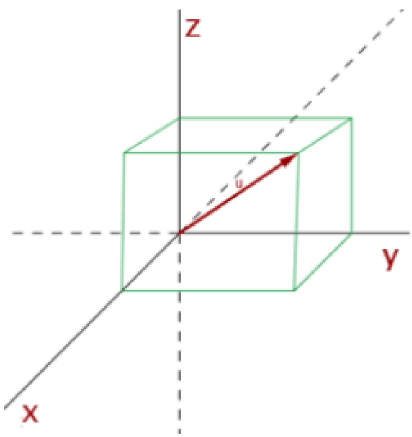
5. Un vector, al marge de qualssevol eixos, dona peu que se'l descompongui, ho veurem més avall, d'acord amb d'altre vectors, de manera que llur suma compongui de bell nou el primer vector.

Tanmateix, els eixos cartesians en un espai tridimensional exemplificant també quantitats, i acordat les que manifesten, el vector col·locat en aquest espai es pot considerar a partir de les coordenades del seu punt d'aplicació i del seu extrem final.

En efecte s'hi troba paral·lelisme i relacions estructurals numèriques interessants.

Dins del marc de les coordenades cartesianes el vector pot mantenir per si mateix relacions quantitatives amb els tres segments, ortogonals els uns amb els altres, que permeten compondre la seva quantitat seguint el teorema de Pitàgores.

El vector dins d'un espai tridimensional cartesià, el seu mòdul pot descompondre's per les quantitats *x*, *y*, *z*, quan el seu punt d'aplicació sigui l'origen de les coordenades.



(https://educaciodigital.cat/ioc-batx/moodle/mod/book/view.php?id=9173)

En col·locar aquest punt a (a,b,c), l'extrem es trobarà ara a $(x+a, x+b, x+c)$, mantenint-se el mateix mòdul.

Llavors hi ha d'altres relacions i paral·lelismes: per exemple, entre els costats dels components a partir del punt d'aplicació, i els segments paral·lels dels eixos quan el punt d'aplicació no es troba en l'origen, etc.

Caldrà una consideració geomètrica per tal de construir els corresponents paral·lelograms, mentre s'arriba a allò rellevant: una relació quantitativa de components i mòdul del vector.

La incorporació del vector en l'espai cartesià permet tractar-lo constantment a partir de relacions de quantitats exemplificades, la qual cosa lliura exactitud, confiança i facilitat, per a les relacions amb d'altres vectors.

4. **El vector de la física.**

Vector analysis tracta dels vectors segons el mòdul i la direcció-sentit, mentre té en compte els vectors de la física, que són els lligats. Certament l'estudi vectorial avui engloba tots els vectors, lligats o no.

La representació icònica d'una força suposa el que hem anant anotant: el traç fa d'icona, una representació amb un contingut que penso-imagino i que exemplifica quantitats; però també es fa necessari de saber on s'aplica com sigui que no és igual l'efecte de fer-ho en un lloc que en un altre, per exemple, en un plat o en l'altre d'una balança.

A més el vector físic gaudeix del que Gibbs anomena «dimensió», que seria potser millor anomenar «significat (o interpretació) físic(a)». Car una força, per exemple la que hi ha quan un cos cau, és quelcom que actua mentre, amb vector o sense, se la considera a partir d'unes quantitats treballades: d'aquí que el vector suposi un conjunt més complex, el d'una representació icònica amb el contingut d'una direcció-sentit, un significat físic, alhora amb un mòdul exemplificat que és el trobat en l'estudi de la força.

5. Un símbol per al vector.

El vector exemplifica una quantitat, i és la representació d'un contingut d'una direcció i sentit, a través del traç o, afegim ara, se'l pot simbolitzar també mitjançant una lletra.

Per tal de no confondre el símbol per al vector i el símbol d'un escalar es fa *la convenció* de simbolitzar el primer a través d'alguna variant de les lletres algèbriques (l'ús de negreta, l'afegit d'una fletxa sobre la lletra, etc.), de manera que aquest nou símbol significa una quantitat, malgrat que ara no està immediatament exemplificada, àdhuc suposa una direcció i sentit, però sense representació. El simbolisme esdevé de *mera significació* perquè s'hi esvaeix l'assimilació (no hi ha traç), i és així com es copsa el vector simbòlicament amb lletres caracteritzades.

Per tant *no és igual* parlar del vector **a** que considerar un vector amb un traç, malgrat que el primer meni fàcilment al segon, amb la garantia que no s'hi introdueix error, i que s'usi el primer precisament per tal d'arribar a un càlcul.

I no és igual el vector **a** i l'escalar a, mentre també per convenció expressem, per exemple, el mòdul del vector a través de:

$$\|\mathbf{a}\|,$$

que llavors es comprèn com a escalar.

En efecte el mòdul (la magnitud, la llargada) d'un vector és la quantitat que una lletra algèbrica comuna simbolitza, i llavors aquesta quantitat simbolitzada opera com qualevol altra quantitat numèrica simbolitzada[10]. Al cap i a la fi xifres i lletres escalars són així mateix símbols.

Amb els símbols escriuríem

$$a = \|\mathbf{a}\|.$$

[10] La quantitat a n'és una expressió, de quantitat. «a» n'és el símbol: ens expressem a través dels símbols, i per això es parla de quantitat simbolitzada.

II
L'ADDICIÓ I LA SUBTRACCIÓ DE VECTORS

La regla del paral·lelogram acompleix la seva comesa quan se la té en compte, al costat de les translacions en l'espai, per a establir la suma com a resultant de l'addició de vectors, i de la subtracció com a operació inversa.

1. **El paral·lelogram de forces i la suma de vectors.**

1. L'equilibri de pesos en balances, les experiències amb la palanca, l'equilibri de dos pesos respecte d'un tercer pes que penja d'una corda en els extrems de la qual pengen els altres dos i que passa per dues corrioles, etc., permeten la confecció d'esquemes de forces que poden rebre una quantificació (a partir dels pesos), d'establir-hi les relacions de les unes amb les altres, i de fet s'ha reeixit al llarg dels segles, més enllà d'assumir la regla dels paral·lelograms, de fer-ho.

El caràcter observacional de l'equilibri de forces i els paral·lelograms de tot tipus que s'hi hagi pogut resoldre, quan es té en compte, no lleva la circumstància que es tracta d'uns exercicis quan l'estudiós reflexiona els uns elements des dels altres, quan s'ha exercitat en una anàlisi dels esdeveniments d'acord amb esquemes que assimilaven aquelles resultants, i quan, com diu Newton, la mecànica confirma abundantment les composicions i les descomposicions (cf. Corol·lari II a les lleis del moviment). En d'altres paraules: el rerefons observacional de tot allò que fa referència a composicions i descomposicions suposa una recerca considerable per part dels físics de tots els temps, gràcies a l'anàlisi de les experiències i, a partir de Newton, a una avaluació del que es componia i es descomponia.

El rellevant, en la regla del paral·lelogram, rau que no es podria resoldre, al marge de tot això, què s'hi esdevé. O si es vol: si especulativament la resultant podria haver estat una qualsevol, no és una convenció, sinó que seguiria els guanys que s'haurien anat adquirint.[11]

La regla del paral·lelogram deu molt a l'esforç de l'estudiós per a comprendre, per exemple, el comportament de molts enginys. Aquella regla està atenent significats, i ara toca esbrinar una mica més com això es duu a terme, en especial quan es parla de vectors.

2. El vector exemplifica quantitat i, com a icona, és una representació de quelcom que penso-imagino, una direcció-sentit; si és fix, el seu origen és un de determinat. Quan es tracta de forces aplicades a un mateix cos en direccions diferents, i estudiant-ho amb paper i llapis, el vector fa patent quantitat, que és la d'una velocitat instantània, per tant constant o, el que és equivalent, d'espai en un temps instantani. No cal assumir que hi hagi un moviment efectiu en la direcció iconitzada pels vectors sinó que, tenint el cos, i en el cos, hi ha unes quantitats i direccions, resta clar que, s'agafi com es vulgui (el paral·lelogram de forces: consideració simultània de les dues velocitats constants, o successiva de les dues velocitats, o espais, és clar) la resultant esdevé un vector que exemplaritza una quantitat amb la icona d'una direcció-sentit. No se'n treu res d'observar els vectors dibuixats i la seva resultant. La regla del paral·lelogram en les forces no està per a mirar els vectors, sinó per a comprendre què s'hi lliura exemplarment i representativament en la icona.

La suma de vectors s'assumeix sempre així. Això ja ho féu Newton quan esclarí la regla del paral·lelogram per a les forces. També ho duu a terme *Vector Analysis* quan afegeix que «l'addició de dos vectors o traços (*strokes*) pot ser tractat de la manera més simple estimant-los com a definidors de translacions en l'espai»[12]. Un vector exemplifica quantitat d'espai i és una representació amb direcció, un segon, es capeixi amb simultaneïtat o sucessivament, permet un vector com a manifestació d'una quantitat i com a icona de direcció-sentit. És igual que es parli de trasllats, d'espais d'un força, etc.: el vector no

[11] Pera un estudi del paral·lelogram de forces, cf. *Una aproximació a la força. Estudis de filosofia de la ciència* QF41.
[12] *Vector Analysis*, pàg.8.

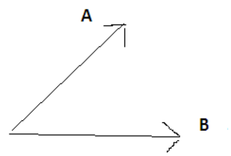
suposa la realització del que exemplifica i fa d'icona, sinó precisament ho exposa.

No cal afegir que l'addició de vectors lliures segueix les mateixes passes.

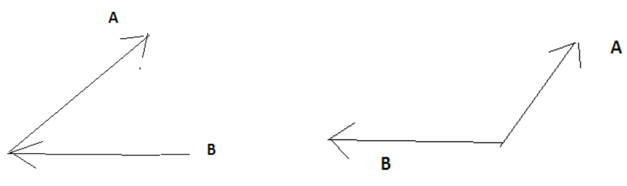
2. La subtracció de vectors.

Sabem que la subtracció numèrica consisteix a trobar un nombre que fa de resta o residu, que sumat amb el subtrahend lliuri el minuend. És el que es fa en la subtracció de vectors, amb l'afegit que no pot tenir només en compte el quantitatiu perquè el vector, com a icona, ho és de direcció-sentit.

Sigui una translació o una velocitat constant, l'afer se circumscriu a la necessitat de considerar què s'està fent. Perquè la subtracció d'un qualsevol esdeveniment de caràcter vectorial conté el sentit d'una rectificació del vector minuend. Quan dibuixem:



i «restem» **B** a **A**, rectifiquem **A**, i el dibuix no reglamentari faria el següent de l'esquerra, o millor el de la dreta:



:

de manera que hauríem representat la subtracció de **A** per **B**. És a dir, no caldria dir sols que la subtracció d'un vector per un altre equival a sumar el minuend amb l'oposat del subtrahend, sinó també que aquella subtracció és l'addició del minuend i d'un vector que «es diu oposat al subtrahend», però que ben mirat és el sentit de què gaudeix el subtrahend.

L'operació amb dos (o més) vectors té en compte el seu valor quantitatiu i alhora que es duu a terme d'acord amb una direcció i sentit. La interpretació de la suma i de la subtracció es fa considerant successivament l'un vector i l'altre, per tant hi ha una doble quantificació i alhora cadascuna s'exerceix en una direcció i sentit. Per això els vectors impliquen si més no l'espai, però quan són lligats també tenen en compte el seu punt d'aplicació en l'espai.

3. El tractament dels vectors com a icones que exemplaritzen quantitats.

1. Com bé diu *Vector Analysis,*

«Les lleis que regeixen l'addició, la resta i la multiplicació escalar de vectors és idèntica a les que regeixen aquestes operacions en l'àlgebra escalar ordinària.
«És precisament aquesta identitat de les lleis formals la que justifica l'extensió de l'ús dels signes familiars =, +, i − de l'aritmètica a l'àlgebra de vectors i és també això el que assegura la correcció dels resultats obtinguts mitjançant l'operació amb aquests signes de la manera habitual. Només una precaució cal esmentar. Els escalars i vectors són tipus completament diferents de quantitat»[13].

Lleis que aquí serien la llei associativa i la commutativa dels factors escalars en la multiplicació escalar; la llei associativa per a vectors en l'addició vectorial; la commutativa de l'addició de vectors; la llei distributiva per a escalars en la multiplicació escalar; la distributiva per a vectors en la multiplicació escalar; la distributiva per al signe negatiu. És a dir:

$$m(n\mathbf{A}) = n(m\mathbf{A}) = (mn)\mathbf{A}$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$$
$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$$

[13] Ídem, pàg.13.

$$(m+n)\mathbf{A} = m\mathbf{A} + n\mathbf{A}$$
$$m(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = m\mathbf{A} + m\mathbf{B}$$
$$-(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = -\mathbf{A} - \mathbf{B}.$$

La consideració de *Vector Analysis* mana de tenir sempre present que els vectors i els escalars són classes diferents de quantitats.

És fàcil d'assumir unes tals lleis quan s'ha copsat el vector com a icona que exemplifica la quantitat, i es va ponderant cadascuna de les lleis: llavors cal no perdre el significat de les quantitats de cada vector al costat de la seva direcció-sentit.

2. «Qualsevol vector **b** col·lineal amb **a** es pot expressar com el producte de **a** i un escalar positiu o negatiu que és la relació de la magnitud de **b** amb la de **a**. El signe és positiu quan **b** i **a** tenen la mateixa direcció [*això és, sentit*]; negatiu, quan tenen direccions [*ídem*] oposades.»[14]

La raó del mòdul del vector **b** al del vector **a** és naturalment un escalar. També: aquella quantitat de **b** és la resultant de multiplicar aquest escalar per **a**; el signe d'aquest escalar dependrà de les magnituds algèbriques dels vectors, d'acord amb l'àlgebra escalar.

[14] Ídem, pàg.14.

III
VECTORS AMB SENTIT OPOSAT
NOTA DE LES MAGNITUDS ALGÈBRIQUES

1. La inversió del sentit d'un vector permet de fer alguna consideració al voltant de les magnituds algèbriques.

El signe negatiu davant de la lletra que simbolitza el vector usa quelcom obtingut en l'àlgebra, i significa el sentit oposat del vector. Per dir-ho així: si el traç exemplifica una quantitat, i la icona ho és de direcció i sentit, el signe negatiu davant la lletra-símbol del vector no fa més que atendre el procediment d'allò numèric estès des de fa molt, se'l fa valer per al mòdul del vector i per al contigut de la icona.

2. La seqüència dels nombres negatius, el zero, i els positius, es copsaria en alguna accepció com una única seqüència de magnituds aritmètiques, les dues meitats de la qual haguessin canviat de xifra (amb el zero separant-les), mentre s'hi afegiria, davant de cada xifra, el símbol de la qualitat, amb l'únic requisit de començar les noves sèries des de zero, tant en un sentit com en l'altre (l'una és la inversa o oposada de l'altra, i cada nombre tindria el seu invers o oposat)[15].

Llavors una sèrie compta, i l'altra ho fa inversament. La magnitud algèbrica no perd el significat de la sèrie numèrica: *un nombre negatiu sempre té un sentit invers al positiu*.

Permeten de considerar nombrosos afers que no són els nombres purs, i lliurar-los una quantificació. I deixen fer quelcom molt important: que se sàpiga quin és el nombre (algèbric) resultant d'una operació.

Una tal circumstància es palesa en l'addició de les magnituds algèbriques (i la subtracció com a operació inversa).

També es mostra en la multiplicació: el multiplicador torna a ser un nombre qualsevol de la sèrie numèrica distribuïda en dues parts oposades; el sentit de $(-a)(+b)$ és immediat; si $(+a)(-b)$, llavors es

[15] La circumstància que la sèrie negativa pogués arribar a $-\infty$ no fóra cap problema quan sabem que tots els infinits suposen estipulacions específiques.

considera des de $(+a)(-1)$, que oposa tot a, tenint en compte que $(+a)(+1)$ no ho fa[16]; si $(-a)(-b)$, llavors des de $(-a)(-1)$, que oposa tot $-a$[17].; la divisió fóra l'operació inversa.

3. Hi hauria molts afers que mantindrien quantitats de sentit oposat, malgrat que llur conjunt no dugués a l'establiment de les quantitats algèbriques i a les seves operacions. Però, a l'hora de definir-les, hauria calgut pensar en una simetria, dues parts d'una única sèrie, i establir les regles fixes de les operacions *atenent al sentit del que és una quantitat oposada*. Comprendre la magnitud algèbrica suposaria *atansar-se al que significa la seva qualitat.*

Es tractaria tot plegat d'un referent numèric autònom, amb les seves regles de formació i d'operació, i s'ha suggerit d'assumir-hi les dues parts inverses com una única sèrie; llavors les operacions es comprendrien com en l'aritmètica amb l'únic afegit que hi hauria el sentit d'inversió entre unes quantitats i les altres, i que les resultants serien tan coherents com els de les operacions amb la sèrie natural, amb la constant que aquella coherència nova tindria en compte la inversió, el sentit de què gaudeix.

Es podria parlar, d'una sèrie natural allargada gràcies a la inversió. El que l'àlgebra proposa és una sèrie única numèrica, que té els pros i els contres de la natural, i la unitat es mante amb el seu sentit malgrat que se la qualifiqui. També serveix per a donar nombre a tot allò que convingués, i les operacions són coherents, amb consistència, amb el que s'ha volgut confegir com a magnitud algèbrica.

L'àlgebra no podria fer el que no és la seva coherència. Una qualsevol aplicació tindria sentit o no en tindria, no pas perquè s'enumerés algèbricament i s'operés, sinó per allò on s'apliqués.

---

[16] Les aplicacions ho reblarien: si cada mes agombolo *x* objectes, un més abans en tindria $-x$ respecte del total d'avui.

[17] Hi ha una consistència numèrica arreu. Si sumem $(-a)(+1)$ i $(-a)(-1)$, a través de $(-a)[(+1)+(-1)]$ fa zero, llavors $(-a)(-1)$ ha de valer $(+a)$. Cal tractar les quantitats algèbriques com si fossin una única sèrie numèrica.

IV
SOBRE ELS COMPONENTS

Repassarem, des d'un punt de mira diferent del de l'addició, els components d'un vector, i hi afegirem els vectors unitaris **i**, **j**, **k**, a tall d'un exercici ordenat, que ho exposa pas a pas.

1. **Components de vectors.**

1. El vector és una icona exemplificadora d'una quantitat escalar, quan convé amb una significació física, i la representació de quelcom que penso-imagino amb direcció i sentit.

Un vector essent això, puc relacionar-lo amb d'altres vectors.

Així com la suma de dos o més vectors duu a un nou vector, puc estimar un vector com la suma d'altres dos o més vectors, que serien llavors els seus components, mentre es respecti el mòdul i la direcció-sentit de la resultant dels sumands.

Els components de vectors suposen doncs el domini de consideracions a diferents nivells.

El vector no té en principi relació amb un qualsevol element geomètric. Certament el traç amb què dibuixem el vector exemplifica una quantitat numèrica, i hi ha la representació de quelcom orientat, el traç fent d'icona, és a dir, el vector.

Però tot això és independent de la geometria i de les coordenades.

2. **Components de segments i components de vector en l'espai tridimensional.**

1 Al marge dels vectors he après a descompondre un segment en l'espai cartesià.

Dalt ja vam apuntar que, malgrat que el vector no és un segment geomètric, se'l pot tractar com a tal, i tant un segment com un vector poden exemplificar una quantitat.

Per això, si el punt d'aplicació del vector coincideix amb l'origen de les coordenades, llavors els components poden seguir la direcció dels eixos des d'aquell origen.

Quan aquell punt no es troba en l'origen de les coordenades el vector es pot descompondre amb els components paral·lels als eixos, i en tots els casos se sap trobar-hi relacions numèriques, que s'hi exemplifiquen, d'acord amb el teorema de Pitàgores.

Aquestes quantitats exemplificades també són iguals, quan el vector no té el seu punt inicial en l'origen de coordenades, a les dels segments de la corresponent quantitat de l'eix, a obtenir de la següent manera: després de traçar, des del punt d'inici i des del punt final d'aquells primers components respectivament, la línia ortogonal sobre cada cara, i baixar, des del punt on cau de cada cara, la vertical a l'eix corresponent, l'espai delimitat en cada eix es comprèn com els components del vector en els eixos de coordenades. Al cap i a la fi el que val són les relacions numèriques i geomètriques.

2. Els vectors no són simplement segments geomètrics; el traç s'hi pot estimar sense més, les quantitats numèriques que els vectors exemplifiquen els palesen comportant-se com a segments geomètrics quantificats numèricament, i la seva direcció i sentit lliura una orientació a aquest segment.

La descomposició d'un segment en geometria analítica es pot mantenir paral·lela a la descomposició del vector: les quantitats del primer s'avenen amb les del segon, i l'orientació figura que s'ha respectat.

Hi ha doncs una exemplificació dels components del vector mentre es treballa amb els components del segment, i s'hi afegeix, si cal, les consideracions numèriques.

3. **Els tres vectors unitaris $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$.**

El vector, com a icona, representació de direcció i sentit, i el seu traç exemplificant una quantitat numèrica, s'estima, s'ha dit, la suma de dos o més vectors qualssevol que el tinguin com a resultant, considerant l'afer tal i com s'ha indicat en la suma de vectors.

En conjunt el vector pot tenir els vectors components que s'esculli.

Tractant-se d'una representació de direcció i sentit, i d'una exemplificació de quantitat, els components vectorials s'orientaran per l'espai, i podran fer-ho atenent la seva tridimensió.

Si hi afegim que tot vector pot ser un múltiple de la seva unitat vectorial (vector unitari), assumim els vectors **i**, **j**, **k**, com a vectors unitaris *d'acord amb les tres dimensions de l'espai en coordenades cartesianes*.

Un vector unitari, però, és la representació d'una direcció i sentit i l'exemplificació d'una unitat: el traç és un tot unitari. Hi ha igualtat numèrica entre aquest vector i les unitats dels eixos cartesians, i l'aproximació de vectors i eixos cartesians es fa des de la unitat exemplificada en els uns i en els altres.

És d'aquí que s'ha de comprendre llur presentació a *Vector Analysis*:

«*Definició*: Les tres lletres **i**, **j**, **k** es reservaran per denotar tres vectors de llargada d'unitat dibuixats respectivament en les direccions dels eixos *X*-, *Y*- *i Z*- d'un sistema rectangular a dretes.
En termes d'aquests vectors, qualsevol vector es pot expressar com

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Els coeficients *x*, *y*, *z* són les coordenades cartesianes ordinàries dels termes de **r** si el seu origen està situat a l'origen de coordenades. Els components de **r** paral·lels als eixos *X*-, *Y*-, i *Z*- són respectivament

$$x\mathbf{i},\ y\mathbf{j},\ z\mathbf{k}.$$

Les rotacions al voltant de **i** des de **j** a **k**, al voltant de **j** des de **k** a **i**, i al voltant de **k** des de **i** a **j** són totes positives.
Per mitjà d'aquests vectors **i**, **j**, **k** s'estableix una tal correspondència entre l'anàlisi vectorial i l'anàlisi en coordenades cartesianes que és possible passar a voluntat de l'una a l'altra. No hi ha res contradictori entre aquestes. Per contra sovint és desitjable, o fins i tot necessari, traduir les fórmules obtingudes per mètodes vectorials en coordenades cartesianes per tal de comparar-les amb resultats ja coneguts, i és encara més sovint convenient passar de l'anàlisi cartesiana a vectors

tant per la brevetat obtinguda com perquè les expressions vectorials mostren el significat intrínsec de les fórmules».[18]

4. Els components $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$. de $\vec{\mathbf{a}}$.

En efecte després, havent après a descompondre vectors, direm que podríem descompondre **a** en un espai tridimensional cartesià amb tres eixos de coordenades, en els tres vectors $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_{2,} \mathbf{a}_{3,}$, cadascun dels quals seguiria la direcció paral·lela d'un eix diferent, quan no es trobessin en els respectius mateixos eixos (**a** tindria llavors el seu punt d'aplicació en l'origen de les coordenades), que serien uns vectors components, que alhora permetrien els mòduls

$$\|\mathbf{a}_1\|, \|\mathbf{a}_2\|, \|\mathbf{a}_3\| ,$$

llur significació tractada com a quantitats escalars $a_1, a_{2,} a_{3,}$ i per tant:

$$\|\mathbf{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

La descomposició tenint lloc en components paral·lels als eixos, o també seguint els eixos, el vector **a** es deixa expressar en termes dels components de la següent manera:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$$

en l'espai tridimensional i en un sistema a dretes[19].

---

[18] Ídem, pag.21.

[19] En el cas d'usar coordenades tridimensionals cartesianes es fixa convencionalment el sistema, que sol ésser a dretes, on es troben els signes dels valors dels eixos (els valors positius de l'eix *x* es dirigeixen a la dreta del pla del paper, i els negatius a l'esquerra; els valors positius de l'eix *y* són al pla i apunten cap amunt, els negatius cap avall; els valors positius de l'eix *z* s'orienten cap enfora del paper en direcció al lector, els negatius cap endins, en direcció oposada al lector). Car aquí cal saber què estimem positiu o negatiu.

Quan es col·loca en el pla l'eix *z* amb l'eix *y*, llavors els valors positius de l'eix *x* van cap a fora vers el lector.

5. **Les operacions des dels components $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$.**

Hem repassat una mica l'addició i la subtracció de vectors, i ara convindria de fer-ho des del punt de mira dels components **i, j, k,** dels vectors.

És fàcil de considerar un vector descompost en els seus tres vectors $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3,$ i, més enllà, en els components als eixos, en $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$.

Després es podria fer, amb un altre vector **b**, la corresponent descomposició, i arribar a $b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$**.**

Ara bé: que la suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, i tenint en comte les coordenades cartesianes, hagi de dur a la suma del seus components **i, j, k,** en l'ordre respectiu, sembla difícil de copsar sense l'ajut gràfic. En aquest punt l'estudiós té present la representació de sumands i de resultants, a més a més de la descomposició dels primers, i l'exemplificació quantitativa dels vectors i els segments implicats.

Es tracta que es considera la resultant tenint en compte la direcció i sentit dels sumands, i també les relacions entre quantitats des de les que els vectors $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3,$ exemplifiquen, i des de les que els vectors $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3,$, exemplifiquen, i se sol·licita per a això l'ajut de gràfics per a respectiva exemplificació de les quantitats i de la representació de direccions i sentits.

Mentre que els vectors no són mers afers geomètrics, el càlcul amb vectors duu a fer-ho des d'operacions i consideracions apreses perquè no podem abastar-ho altrament, no gaudim de la suficient capacitat de copsar les complicacions d'una suma entre vectors: d'aquí l'exemplificació geomètrica i el corresponent estudi numèric.

6. El mòdul i la direcció-sentit (els punts i les línies d'aplicació).

El vector no lligat té mòdul, direcció-sentit, i res més. Es diu el mateix vector independentment d'on es trobi de l'espai euclidià mentre estigui col·locat en la mateixa línia o en una de paral·lela (amb el mateix sentit).

Es manté dos vectors paral·lels amb el mateix mòdul com el mateix vector per a facilitar l'estudi de problemes en els quals no és rellevant la interpretació física. Això valdria per a la mateixa explicació de la manera de treballar els vectors: si es vol donar a conèixer la suma de vectors lliures l'esclariment no té en compte cap lloc fix d'aplicació previ d'un qualsevol dels vectors a sumar, lliurats com a dades, mentre els col·loca allà on convé.

El vector lligat, es clar, amb significació física, suposa punts d'aplicació o, com les forces mecàniques, línies d'aplicació. Car aquí l'observació i l'experiència deixen aplegar què es pot ometre o què no.

V
L’EQUACIÓ VECTORIAL D’UNA LÍNIA RECTA

En l’anàlisi de vectors expressats per símbols, $\mathbf{r} = x\mathbf{a}$ s’assumeix com l’equació vectorial de tots els punts d’una línia**,** x essent un paràmetre escalar variable.

1. Si **a** és un símbol d’una significació quantitativa i direccional, i si x és una variable escalar entre $-\infty$ i $+\infty$, $x\mathbf{a}$ simbolitzarà per a cada valor de x una significació quantitativa i direccional, el mòdul del qual podrà oscil·lar des de $-\infty$ a $+\infty$.

Per tant per a cada valor de x, significarà com a mòdul una qualsevol quantitat proporcional al de **a,** i interpretada amb la mateixa direcció.

D’aquí que, com diu *Vector Analysis*, aquesta equació vectorial $x\mathbf{a}$ pot ser considerada com l’equació vectorial de tots els punts de la línia en la direcció vectorial.

2. $x\mathbf{a}$ essent l’equació dels punts d’una línia en una direcció vectorial, cada valor seu simbolitza un vector determinat, i en cada cas també podem sumar-li un vector amb direcció diferent, vectors la quantitat dels quals podem exemplificar amb traços, i amb la corresponent representació de direccions, i llavors fer-ne la suma tal i com s’ha explicat dalt.

El vector simbolitzat per **a** permet l’equació, que lliuraria els punts al llarg de la línia *OA*.

Llavors agafem un punt qualsevol fora de la línia *OA*, per exemple, *B*, i hi tracem una paral·lela a *OA*, que permet doncs ser expressada en els termes de l’equació $x\mathbf{a}$[20]**.**

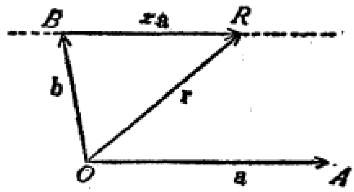
---

[20] Heus aquí un exemple de la rellevància de tenir els vectors lliures paral·lels com a equivalents, àdhuc com el mateix vector, en geometria. La necessitat

Finalment un qualsevol punt R de la línia que passa per B pot considerar-se la resultant del trasllat del vector $\overrightarrow{BR}$ (un dels casos simbolitzats pe $x\mathbf{a}$) i del vector $\overrightarrow{OB}$.

L'equació $\mathbf{b} + x\mathbf{a}$

determina el punt R en la paral·lela *BR*. Això valdrà per als diferents valors de *x*, mentre que les quantitats simbolitzades per **b** i **a** són constants, d'aquí que la resultant de l'equació anirà seguint els punts de la línia paral·lela a *OA* que passa per *B*, i l'equació $\mathbf{b} + x\mathbf{a}$ podrà avaluar-se com l'equació vectorial de tots els punts en la línia que és paral·lela a **a**, essent *B* un dels seus punts.



I $\mathbf{b} + x\mathbf{a}$ és comparable a una equació escalar del tipus de $b + ax$, mentre allí tant **b** com **a** són símbols de significacions de quantitat numèrica i d'orientacions, en l'altre b i a són símbols de quantitats sense que orientin, i d'aquí que sols tingui sentit geomètric dins d'un sistema de coordenades.

---

d'això prové de les disposicions que apareixen en les diferents construccions dels problemes.

Certament no caldria considerar-ho en aquest cas si es resolgués que se suma cada vector en la línia *OA*, de l'equació $x\mathbf{a}$ amb el vector $\overrightarrow{OB}$, resultant que aniria lliurant el corresponent vector OR, de manera que s'aniria assenyalant cadascun dels punts en la línia *BR*.

VI
UNA APORTACIÓ DEL VECTOR EN GEOMETRIA

Els vectors no s'ofereixen com un element geomètric més, sinó que l'eficàcia, àdhuc en aquet terreny, es deu a la seva exemplarització de quantitats, i a la seva representació de direcció i sentit.

Fàcilment es passa per alt aquest singular caràcter, sobretot quan s'usa vectors en geometria. Agafem el següent exemple:

«*Exemple 2*: Si a través d'un punt qualsevol dins d'un triangle es dibuixa línies paral·leles als costats, la suma de les raons d'aquestes línies als costats corresponents és 2.
Sigui *ABC* el triangle, *R* el punt dins seu. Trieu *A* com a origen, *AB* i *AC* com els dos vectors fonamentals **S** i **T**. Sigui

$$\overline{AR} = \mathbf{R} = m\,\mathbf{S} + n\,\mathbf{T}. \qquad (a)$$

$m\mathbf{S}$ és la fracció d'*AB* que és tallada per la línia paral·lela a *AC* a través *R*. La resta d'*AB* ha de ser el fracció $(1 - m)\mathbf{S}$. Consegüentment, per triangles similars, la raó de la línia paral·lela a *AC* respecte a la mateixa línia *AC* és $(1 - m)$. De la mateixa manera, la raó de la línia paral·lela a *AB* amb la mateixa línia *AB* és $(1 - n)$. Després **R** expressa, en termes de **S** i $\mathbf{T} - \mathbf{S}$, el tercer costat del triangle. Evidentment des de (*a*)

$$\mathbf{R} = (m + n)\,\mathbf{S} + n\,(\mathbf{T} - \mathbf{S}).$$

Per tant $(m + n)$ **S** és la fracció d'*AB* que és tallada per la línia paral·lela a *BC* a través de *R*. En conseqüència, per similars triangles, la raó d'aquesta línia [paral·lela a *BC*] a *BC* és $(m + n)$. Afeginy les tres raons

$$(1 - m) + (1 - n) + (m + n) = 2,$$

i el teorema està demostrat.»[21]

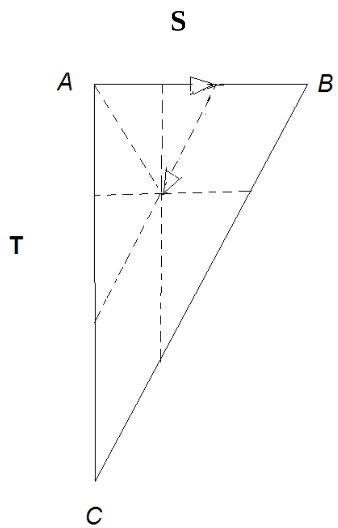
---

[21] Ídem, pàg.23.

L’expressió $\mathbf{R} = m\ \mathbf{S} + n\ \mathbf{T}$ estant donada, el gràfic geomètric lliura una suma de vectors, que s’allarga amb

$$\mathbf{R} = (m + n)\ \mathbf{S} + n\ (\mathbf{T} - \mathbf{S}),$$

que finalment s’interpreta. Interessa la direcció i el sentit, en funció del gràfic geomètric, sobretot les quantitats exemplificades.



Per construcció geomètrica, el vector **R** és la suma de les parts corresponents d’*AB* i *AC*, o de les parts corresponents d’*AB* i *BC*. Compreses aquestes últimes com a vectors fan:

$$\mathbf{R} = (m + ?)\ \mathbf{S} + ?\ (\mathbf{T} - \mathbf{S}),$$

d’on la incògnita ha de valer *n* a partir de la inspecció geomètrica de les parts que fan de vectors (o dels seus segments), i de les quantitats lliurades per deducció quantitativa des de *(a)*.

VII
ELS PRODUCTES DE VECTORS

La comprensió física d'un problema no es confon amb la representació que hi ha del vector. No pertany a aquesta representació, sinó al seu significat, i ha ajudat definitivament a establir les regles de les multiplicacions de vectors.

1. **El producte escalar.**

1. El que es fa en física o en geometria ha orientat si més no la suma de vectors. Al marge dels vectors, la física es troba constantment quantificant i no hi hauria cap noció rellevant que no contingués la seva capa de quantificació. És veritat que cal no simplificar la seva tasca, i que es té present d'altres aspectes.

Agafem el treball com a exemple: l'estudi de la força ha assumit un tractament quantitatiu, ha treballat la regla del paral·lelogram, ha comprès el càlcul infinitesimal, ha discriminat i dominat com cal la distribució de pesos i forces útils d'aquells no ho són, hi ha hagut una sedimentació històrica i individual d'experiències i observacions, de càlculs i les seves generalitzacions, de consideracions geomètriques, etc. Molt abans d'un qualsevol estudi vectorial ja s'hauria establert la relació entre un trajecte i la força útil. El producte escalar de vectors recolliria en esquema el que diem del treball. En alguna accepció palesaria el contingut d'una força, implicitaria o explicaria la part útil, i anotaria les operacions que cal seguir.

L'esquema formal del producte de força útil per espai tindria, d'una banda, una plasmació en els vectors com a icones, exemplificadores de quantitats i representacions de direcció i sentit com a traços, i el treball com un afer comprès es trobaria enllà o ençà d'una representació − d'una altra, s'expressaria en termes de vectors com a símbols que signifiquen això darrer.

Es tractaria, en el cas del treball, d'una resultant de l'estudi físic, del coneixement del paral·lelogram de forces i de l'establiment del treball com a producte de forces útils per recorreguts, i això seria extensible, amb les precisions oportunes, a d'altres consideracions físiques. Si més no torna a ser rellevant que es tracta del producte de dues quantitats orientades, a resoldre d'acord amb el que s'ha après, sempre en qualsevol cas afers significatius per ser físics.

Restaria una pregunta rellevant: per què la seva resultant és un escalar? Versemblantment per una certa convenció, i que així ha estat eficaç en l'estudi.

2. El treball, com a producte escalar entre la força i l'espai recorregut, té en compte l'angle que tanquen entre les dues direccions: multipliquem la força per l'espai, i pel cosinus de l'angle.

Mentre la força i l'espai són considerats com a vectors, ja hem comentat que la nostra capacitat de càlcul de quantitats vectorials és limitada: passem a ajudar-nos amb el domini quantitatiu (és clar) i geomètric.

El producte escalar resol les necessitats físiques i geomètriques, si és el cas, mentre bastaria saber les quantitats i l'angle que tanquen, tal com s'esdevenia en el treball abans i tot de l'estudi dels vectors. Mirem com ho podem calcular avui:

El teorema del cosinus es mostra quelcom algèbric i geomètric:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta,$$

expressió que no difereix de:

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta,$$

més enllà de la designació, amb l'única diferència que s'ha partit d'uns símbols que signifiquen magnituds i direccions-sentits.

D'aquí que s'operi com a afers algèbrics escalars i geomètrics:

$$2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 -$$
$$-(a_3 - b_3)^2 =$$
$$= 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3).$$

3. La definició del producte escalar de dos vectors abandona l'orientació i esdevé sols la resultant del producte dels tres escalars a_1, a_2, a_3 de l'un pels tres escalars b_1, b_2, b_3 de l'altre, és a dir

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Resultat que s'assumiria, si es vol, a partir d'anar sumand tantes vegades els escalars a_1, a_2, a_3 per si mateixos com b_1, b_2, b_3 ho designen, i fer-ne la suma total.

Hi ha una insistència en el càlcul numèric per a resoldre el producte, amb l'ajut, si cal, del geomètric

2. **El moment d'una força respecte d'un punt com a resultant d'un producte vectorial.**

En fer girar una roda que sostenim horitzontalment pel seu eix es pot considerar que un punt seu extern del neumàtic ha rebut un força, i que hi ha un moment resultant del producte de la suposada força per la distància del punt esmentat al centre. Es tractaria d'un moment més dels molts que se'n podria esmentar.

Tanmateix l'exemple de la roda palesa que, amb això, encara no hem descrit el sentit de gir de la roda (sentit horari o antihorari, per exemple, i des d'on es mira).

En un cas particular, lliurat per convenció el sentit positiu o negatiu del moment d'acord amb el gir antihorari o horari, bastaria que l'observador definís quin gir és l'inicialment referent en una cara per a reglar el sentit dels moments d'acord amb les cares.

Tanmateix la comunicació es faria més equívoca en un llenguatge genèric. L'assumpció del moment de la força respecte de l'eix per un vector perpendicular al pla que formen els vectors de la força i el de posició des del punt de l'eix tindria justament la funció de permetre comunicar el sentit del gir i de saber quin és el costat que es contempla. Car en general es convé d'assumir que el sentit antihorari de gir indica el costa positiu, i llavors el vector d'un moment amb sentit positiu s'alçarà perpendicular per aquest costat; però el mateix moment vist des del sentit horari de gir continuaria essent el vector d'abans, per tant dirigint-se enllà des de la cara positiva.

Això vol dir que, parlant sobre problemes generals, basta indicar si el vector resultant gaudeix d'un sentit positiu o negatiu per a determinar el pla que li és perpendicular, i per a fixar el sentit del gir que imposa la força: es comunica doncs quina és la cara a considerar.

Certament es podria esmentar d'altres exemples. Molt especialment el producte vectorial troba una excel·lent aplicació en electromagnetisme.

3. El producte vectorial com a vector.

1. El vector resultant del producte vectorial és doncs prou usat en física.

El fet que el producte vectorial no gaudeixi de la propietat commutativa, i que la permuta de factors inverteixi el signe del vector s'ha establert a partir d'haver prestat atenció als esdeveniments físics i també, en els casos on no hi ha físicament un correlat del vector (per exemple, el moment), s´hi assumeix per conveniència.

La força elemental a la qual està sotmès l'element d'un conductor per on circula una intensitat I afectat per un camp magnètic és $d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times d\mathbf{B}$, quantitat exemplificada per un vector perpendicular al pla circumscrit a patir dels vectors factors, inverteix de sentit si els commutem, els factors,

D'altra banda, admesa la convenció de ser sentit positiu el gir en sentit antihorari, i negatiu l'horari, no costa d'acceptar que el moment d'una força respecte d'un punt lliura un vector resultant amb sentit oposat quan intercanviem l'ordre dels factors.

La regla de la mà dreta (en una distribució a dretes) resumiria amb èxit els requisits de la direcció i sentit de la resultant, sobretot cara a les magnituds físiques. D'aquí que, en el cas del gir de la roda, escriuríem primer el vector de posició i després el vector de la força per tal de respectar el moment amb sentit positiu per al gir antihorari. Un convenció portaria a l'altra.

Els moments d'una palanca en equilibri esdevindrien exemplificats i representats per dos vectors perpendiculars als vectors del braç i del pes, *però aquells primers oposats en el sentit,* que correspondria al fet que els moments s'igualen en l'equilibri, i que no caldria cap altra comunicació.

2. Que el producte vectorial de dos vectors lliurés sempre un tal vector es deuria que s'atendria la necessitat física d'una més gran especificitat de la resultant.

Precisament el sentit d'acord amb la regla de la mà dreta (en coordenades a dretes) segons l'ordre del vectors faria que es parlés de vegades de *pseudovectors*: la resultant del producte vectorial seria sempre un pseudovector (no hi hauria una simetria perfecta amb la seva reflexió a través d'un pla: s'hi trobaria inversió del sentit del vector producte).

3. Un vector exemplifica quantitat i representa direcció i sentit.

Podem dir que dos vector circumscriuen un pla, però el vector no es mou pròpiament en aquest nivell. És a dir, mentre parlem del dos vectors, i que circumscriuen un pla, això ens serveix per a estar atenent llur representació i exemplificació a tall d'un afer lineal geomètric.

És a dir, considerem el pla com una exemplificació de quantitats mentre atenem així mateix la representació dels vectors amb les corresponents exemplificacions. És clar: es tracta que hi ha un descabdellament geomètric, des de les corresponents representacions, al qual atribuïm un valor quantitatiu equivalent a allò que anem meditant.

No es nega la utilitat de dos vectors per a circumscriure un pla, sinó d'adonar-se que aquest nivell exemplificador geomètric no supleix llur caracterització com a vectors.

4. La resultant d'un producte vectorial ha estat coneguda abans que la corresponent interpretació com a vectors.

El mòdul, que és un escalar, de la resultant del producte vectorial palesa que es tracta d'una operació algèbrica que s'obté doncs del producte dels mòduls dels vectors implicats per un sinus, i ara independentment de la direcció i sentit.

En efecte els vectors fan capbussar en l'anàlisi algèbrica per a deixar-la en profit d'un vector; s'hi manté implícita, i va facilitant un càlcul dintre d'uns contorns algèbrics establerts.

5. La resultant del producte vectorial, i que serveix per a definir-lo, prové del que s'ha obtingut, o s'ha convingut, en l'estudi físic: la seva direcció i sentit, perpendicular al pla dels vectors; el seu mòdul, el producte dels mòduls dels vectors pel sinus de l'angle que formen.

Com ja ho hem fet dalt, caldria distingir l'entitat geomètrica, que exemplifica una quantitat equivalent a l'exemplificada pel traç del vector, i el vector com a símbol de quantitat i orientació, o com a icona exemplificant de quantitat i representació de direcció i sentit .

Que en l'expressió simbòlica $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ s'interpreti **a** i **b** com els costats d'un paral·lelogram, i la resultant $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ la seva àrea, es fa quan s'avalua sobretot l'afer a nivell geomètric i amb valors escalars.

4. **Els components $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$,** de $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$.

Sabem que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ és una expressió simbòlica que mena a una significació escalar de $ab \sin \alpha$, i a una de direcció i sentit; després la icona vectorial resultant, l'hem establerta perpendicular a la representació dels dos vectors icònics de la multiplicació. És a dir, hi ha $ab \sin \alpha$, i l'exemplificació icònica orientada perpendicularment al pla delimitat a partir de les representacions dels factors, des dels corresponents vectors a nivell simbòlic o icònic, segons les resultants físiques, i tenint-les en compte.

Com sigui que nosaltres *no sabem multiplicar vectorialment altrament vectors*, en seguim les passes consegüents.

Un sistema cartesià a dretes, per exemple, facilitaria les referències elementals, malgrat que no fos una condició necessària.

Sigui com sigui ens servirem dels tres vectors unitaris, expressats per símbols, que ja coneixem, **i**, **j**, **k**.

Llavors, mantenint-nos a nivell simbòlic, si tinc un vector unitari **i** en l'eix x, i un **j** en el y, i per tant, seguint el mòdul del producte vectorial $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ definit, compto $1(x)1(y) \sin \alpha$, aquell producte és el que simbolitzaré per **k.** Si els vectors unitaris **i** i **k** són de l'eix x i del z, el mòdul de llur producte $\mathbf{i} \times \mathbf{k}$ farà $1(x)1(z) \sin \alpha$, i aquell producte és el que simbolitzaré per $-\mathbf{j}$, etc., àdhuc si el mòdul del producte $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$ és $1(x)1(x) \sin \alpha$, llavors dic que el seu mòdul val 0.

Si recollim tot això, algunes resultants elementals fan:

	mòdul	*vector*	
$\mathbf{i} \times \mathbf{i}$	$1(x)1(x) \sin \alpha$	0	$\rightarrow \mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0$
$\mathbf{i} \times \mathbf{j}$	$1(x)1(y) \sin \alpha$	$\mathbf{k}$	$\rightarrow \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$
$\mathbf{i} \times \mathbf{k}$	$1(x)1(z) \sin \alpha$	$-\mathbf{j}$	$\rightarrow \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$
$\mathbf{j} \times \mathbf{j}$	$1(y)1(y) \sin \alpha$	0	$\rightarrow \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$
$\mathbf{j} \times \mathbf{i}$	$1(y)1(x) \sin \alpha$	$-\mathbf{k}$	$\rightarrow \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$
$\mathbf{j} \times \mathbf{k}$	$1(y)1(z) \sin \alpha$	$\mathbf{i}$	$\rightarrow \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$
$\mathbf{k} \times \mathbf{k}$	$1(z)1(z) \sin \alpha$	0	$\rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$
$\mathbf{k} \times \mathbf{i}$	$1(z)1(x) \sin \alpha$	$\mathbf{j}$	$\rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
$\mathbf{k} \times \mathbf{j}$	$1(z)1(y) \sin \alpha$	$-\mathbf{i}$	$\rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$

on cal considerar un a un els diferents productes per a assumir que en cadascun s'acompleix que la resultant és igual a un vector perpendicular al pla circumscrit pels vectors que es multiplica, i que el seu mòdul és 1 o 0, segons els casos.

En el producte vectorial mantenim que són (símbols de) vectors, i hi apliquem el que hem après des de la física (orientació perpendicular, mòdul determinat). Tenim sempre les resultants físiques com a guia.

Allò simbolitzat convencionalment per $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ mena a un símbol que significa $ab \sin \alpha$ com a mòdul, i amb una orientació, i a una icona que representa una orientació perpendicular als vectors simbolitzats per **a** i **b,** i exemplifica el mòdul.

Caldria treballar també *amb els valors algèbrics*, és a dir, si $\mathbf{a} = a_i\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, i $\mathbf{b} = b_i\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Llavors, per exemple, començaríem de la següent manera:

	mòdul	*vector*	
$\mathbf{i} \times \mathbf{j}$	$1(x)1(y) \sin \pi/2$	$\mathbf{k}$	$\rightarrow \mathbf{i} \times \mathbf{j}$
$a_1\mathbf{i} \times \mathbf{j}$	$a_1(x)1(y) \sin \pi/2$	$a_1\mathbf{k}$	$\rightarrow \mathbf{a_1} \times \mathbf{j}$ *o* $a_1\mathbf{i} \times \mathbf{j}$
$a_1\mathbf{i} \times b_2\mathbf{j}$	$a_1(x)b_2(y) \sin \pi/2$	$a_1b_2\mathbf{k}$	$\rightarrow \mathbf{a_1} \times \mathbf{b_2}$ *o* $a_1\mathbf{i} \times b_2\mathbf{j}$
	etc.		etc.[22]

[22] Ho consideraríem així mateix altrament. Car, per exemple $\mathbf{a_1} \times \mathbf{b_2}$ lliuraria un vector amb un mòdul a_1b_2 i perpendicular al pla format per l'eix de les *x* i

Apilant els diferents simbolismes de significació equivalent:

	mòdul	*vector*	
$\mathbf{i} \times \mathbf{j}$	$1(x)1(y)\sin\pi/2$	$\mathbf{k}$	$\rightarrow \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$
$a_1\mathbf{i} \times \mathbf{j}_1$	$a_1(x)1(y)\sin\pi/2$	$a_1\mathbf{k}$	$\rightarrow \mathbf{a_1} \times \mathbf{j}$ *o* $a_1\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ *o* $a_1(\mathbf{i} \times \mathbf{j})$ *o* $a_1\mathbf{k}$
$a_1\mathbf{i} \times b_2\mathbf{j}$	$a_1(x)b_2(y)\sin\pi/2$	$a_1b_2\mathbf{k}$	$\rightarrow \mathbf{a_1} \times \mathbf{b_2}$ *o* $a_1\mathbf{i} \times b_2\mathbf{j}$ *o* a_1b_2 $(\mathbf{i}\times \mathbf{j})$ *o* $a_1b_2\mathbf{k}$,
	etc.		etc.

Per tant, per exemple:

$$(a_i\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_i\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3)$$[23]

$$= a_1b_1(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + a_1b_2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_1b_3(\mathbf{i} \times \mathbf{k})$$
$$+a_2b_1(\mathbf{j} \times \mathbf{i})+a_2b_2(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + a_2b_3(\mathbf{j} \times \mathbf{k})$$
$$+a_3b_1(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + a_3b_2(\mathbf{k} \times \mathbf{j})+a_3b_3(\mathbf{k} \times \mathbf{k})$$

$$= a_1b_2\mathbf{k} - a_1b_3\mathbf{j} - a_2b_1\mathbf{k} + a_2b_3\mathbf{i} + a_3b_1\mathbf{j} - a_3b_2\mathbf{i}$$

---

de les *y*, per tant un vector en la direcció de l'eix *z* amb un mòdul a_1b_2 que equival, és clar, a $a_1b_2\mathbf{k}$

[23] Sabent les propietats dels triples a dretes, i que per tant, en un producte escalar triple, hi és vàlid que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a},$$

es demostra fàcilment la propietat distributiva tant per a $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ com per a $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

Per exemple, si cal demostra-ho per a $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{m}$, llavors fem el següent:

$$[(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{m}] \cdot \mathbf{r} = [\mathbf{r} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})] \cdot \mathbf{m} =$$
$$[(\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})] =$$
$$[(\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{c}] =$$
$$[(\mathbf{a} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{r} + (\mathbf{b} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{r} + (\mathbf{c} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{r}] =$$
$$[(\mathbf{a} \times \mathbf{m}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{m}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{m})] \cdot \mathbf{r}$$

Seguint aquest procediment ho podríem allargar per a

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{o}).$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)_1\mathbf{k}$$
$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

I això és el que simbolitzem per al vector resultant de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

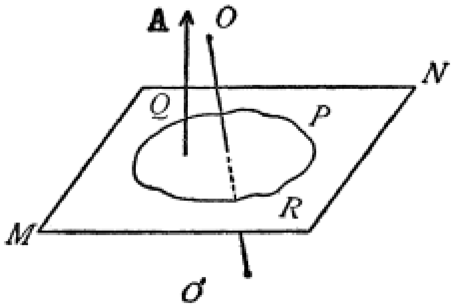
Certament hi ha una barreja de significacions de (símbols de) vectors, de consideracions d'escalars, àdhuc d'imatges geomètriques. La nostra capacitat significativa i representativa és limitada i ens abracem als procediments algèbrics, i geomètrics si cal.

VIII
SOBRE L'ÚS DE VECTORS PER A DENOTAR ÀREES

Una àrea es denota per un vector la magnitud del qual és el valor numèric d'aquella àrea i de direcció i sentit en la normal sobre el costat positiu del pla.

1. *Vector analysis* ho estableix de la següent manera:

« Definició : Una àrea situada en un pla *MN* i delimitada per una corba contínua *PQR* que no es talla a si mateixa enlloc es diu que apareix positiva des del punt *O* quan les lletres *PQR* segueixen les unes a les altres en sentit antihorari o ordre positiu; negativa quan segueixen l'ordre negatiu o el sentit de les agulles del rellotge.



«És evident que una àrea no pot tenir cap signe determinat per se, sinó només en referència a aquella direcció en la qual se suposa que es traça el seu límit i a algun punt fora del seu pla. Perquè l'àrea *PRQ* és negativa en relació amb *PQR*; i una àrea vista des de *O* és negativa respecte a la mateixa àrea vista des d'un punt *O´* al costat del pla oposat a *O*. Un cercle en el pla *XY* i descrit en l'ordre trigonomètric positiu apareix positiu de cada punt d'aquell costat del pla en el qual l'eix *Z* és positiu, però negatiu des de tots els punts del costat en els quals l'eix Z és negatiu. Per aquest motiu el punt de vista i la direcció de descripció del límit s'han de tenir sempre present.

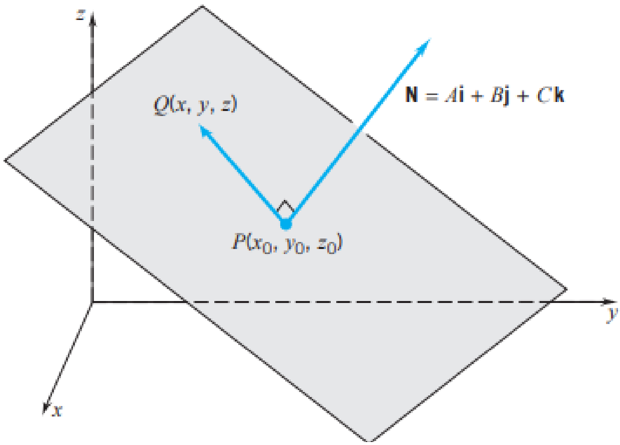
«Un altre mètode per a establir la definició és el següent: Si una persona que camina sobre un pla traça una corba tancada, es diu que l'àrea tancada és positiva si es troba al seu costat esquerre, negativa si a la seva dreta. És clar que si es considera dues persones que tracen juntes la mateixa corba caminant per costats oposats del pla, l'àrea tancada es trobarà a mà dreta d'una i a mà esquerra de la altra. A una, li semblarà per tant positiva; a l'altra, negativa. Aquell costat del pla sobre el qual l'àrea sembla positiva s'anomena costat positiu; el costat sobre el qual apareix negativa, el costat negatiu. Aquesta idea és familiar per als estudiants d'electricitat i magnetisme. Si un corrent elèctric flueix seguint una corba plana tancada, les línies de força magnètica a través del circuit passen del costat negatiu al positiu del pla. Un pol magnètic positiu col·locat sobre el costat positiu del pla serà repel·lit pel circuit.
«Es pot considerar que una àrea plana posseeix més que una magnitud positiva o negativa. Es pot considerar que posseeix direcció, és a dir, la direcció de la normal al costat positiu del pla en què es troba. D'aquí que una àrea plana sigui una quantitat vectorial.»[24]

Tanmateix no comenta com s'arriba a assumir la figuració d'una àrea plana per un vector d'aquelles característiques.

2. Un camí comprensiu s'obté a partir de la manera de trobar l'equació escalar i vectorial d'un pla, per exemple, tal i com es fa a *Calculus*[25]. En la figura el punt $P(x_0, y_0, z_0)$ pertany al pla, i tracem un vector $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ perpendicular al pla. Agafem un punt arbitrari *Q(x,y,z)*, i llavors tenim el vector:

$$\overrightarrow{PQ} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}.$$

[24] *Vector analysis,* pàgs.46-47.
[25] *Calculus: One and Several Variables,* Saturnino Salas, Einar Hille, Garrett Etgen, .John Wiley and Sons, Inc. Hoboken, NJ, 2007.



El punt Q és del pla només si:

$$\mathbf{N} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0, \qquad (1)$$

és a dir:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Un qualsevol punt del pla acomplirà aquesta equació, o sigui (1). La qual cosa implica que, **N** essent un vector normal al pla, pot convenir-se que agafi un valor de mòdul igual a l'àrea del pla, si és el cas, a no ser que es prefereixi simplement (1) com a expressió d'un pla sense contorns determinats, i llavors qualsevol punt del pla haurà d'acomplir (1) si és un pla que té **N** perpendicular.

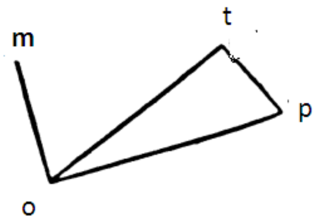
Quan s'ha convingut que agafi de mòdul la quantitat de l'àrea plana, un qualsevol punt del pla satisfaria, en la hipòtesi, (1).

Es tracta de lliurar un tractament vectorial que sigui coherent amb el conjunt de l'estudi vectorial, i aquí res no impedeix d'escollir un vector així com a representació de l'àrea.

3. Notem, per exemple, que la densitat de flux que creua qualsevol superfície elemental $d\mathbf{S}$ no col·locada ortogonalment respecte de la seva direcció valdria precisament el producte escalar de la densitat de flux per $d\mathbf{S}$, per tant l'escalar del primer per $dS \cos \alpha$.

4. D’altra banda potser bastaria fer notar que, en el producte vectorial, la seva resultant és un vector normal al pla que els factors determinen, i amb mòdul l’àrea que abracen, que expressa doncs una tal àrea. Aquesta seria la idea inicial de Clifford quan digué:

«El moment de la línea recta finita *pt* al voltant del punt *o* és el doble de l’àrea del triangle *opt*. La seva magnitud és el producte de la longitud *pt* i la perpendicular sobre seu des de *o*.



Tota àrea plana ha de considerar-se com una quantitat dirigida. Es representa per un vector traçat perpendicular al seu pla, que conté tants centímetres lineals com centímetres quadrats tingui l'àrea. El vector s’ha de traçar cap al costat del pla des del qual l'àrea sembla girar en sentit contrari a les agulles del rellotge. Així, *om* és el vector que representa el doble de l'àrea *opt*, sent *p* l'extrem proper de *pt* i *m* al costat superior del pla *opt*»[26].

Podria semblar que aquest raonament condicionaria la generalització al lliurament de dos vectors, i que una qualsevol àrea no podria ser estudiada des d’una àrea d’un paral·lelogram; tot i això, el fet que l’autor ho presenti des del moment d’una línia finita no fa que suposi que l’àrea a representar pel vector hagi de ser sempre una quantitat algebraica, ni que calgui sempre que sigui la d’un paral·lelogram.

[26] *Elements of Dynamic: An Introduction to the Study of Motion And Rest In Solid And Fluid Bodies*, Macmillan and Co., London, 1878, book I, pàg.92. L’autor ja usa les denominacions *vector product* i *scalar product* («we are thus led to two different kinds of product of two vector *ab*, *ac*; a *vector product*, which may be written *V.ab.ac*, …and a *escalar product*, which may be written *S*.ab.*ac* …», pàg.95).