



Resolució de problemes d'optimització

Pep Bujosa (Associació Catalana de GeoGebra <http://acgeogebra.cat/>)

Àrea màxima d'un cilindre inscrit en un con

Primera part. Configuració de la finestra 3D i construcció dels cossos estàtics.

Obriu el GeoGebra 3D i configureu la finestra 3D al vostre gust:

- Amb el botó dret accediu a **La zona gràfica**
- Trieu les opcions que preferiu. Teniu present que algunes encara no estan actives.

Val la pena prestar atenció a les dels apartats **Clipping** i **BoxSize**. El **Clipping** ens mostra el cub que delimita la part visible de l'espai.

- Proveu les diferents opcions de **Clipping** i **Boxsize**.
- Deixeu inactiu el **Clipping**. En aquest moment no el necessitem.
- Tanqueu la finestra d'opcions.
- Feu un clic sobre **Zona gràfica 3D** per tal que es vegin les eines habituals.




Anem a construir el con. Dependrà del radi i de l'altura donats. Inicialment, entrarem un radi una altura arbitrària i després ja els farem variables.


- Entreu **Q=(0,0,0)**, **Radi=3**, **Altura=7**, **A=(0,0,Altura)**
- Entreu **Con[Q, A, Radi]**

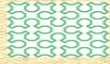
Ja tenim dibuixat el con.

- Feu invisibles els punts **A** i **Q**.

- Amb l'eina  activada, podeu moure el con.

- Per tornar a la situació inicial premeu 

- Premeu l'eina  per amagar els eixos



Observeu la finestra algebraica. S'han creat tres objectes nous. L'objecte **a**: representa el con i el seu volum. L'objecte **b**: representa l'àrea lateral del con. L'objecte **c**: representa la base del con. Anem a canviar els colors.

- Seleccionem l'objecte **a**: i amb el botó dret accedim a les **Propietats**.
- Anem al color i triem-ne un. També podem canviar l'opacitat.
- Seleccionem ara l'objecte **c**:
- Amb el botó dret, accedim a les **Propietats**.
- Anem a **Estil** i feu que l'**Estil de línia oculta** sigui **Invisible**. Així queda més bé. També podem canviar el gruix de la línia.
- Si voleu podem canviar el color.

Ara heu de dibuixar el cilindre inscrit. Caldrà que feu alguns càlculs.

Les dimensions del cilindre dependran del seu radi. Doneu inicialment un radi fix, que després fareu que sigui variable.

- Entreu **RC= 2**
- L'altura del cilindre ve donada per l'expressió

$$HC = \text{Altura} - \frac{\text{Altura} \times RC}{\text{Radi}}$$

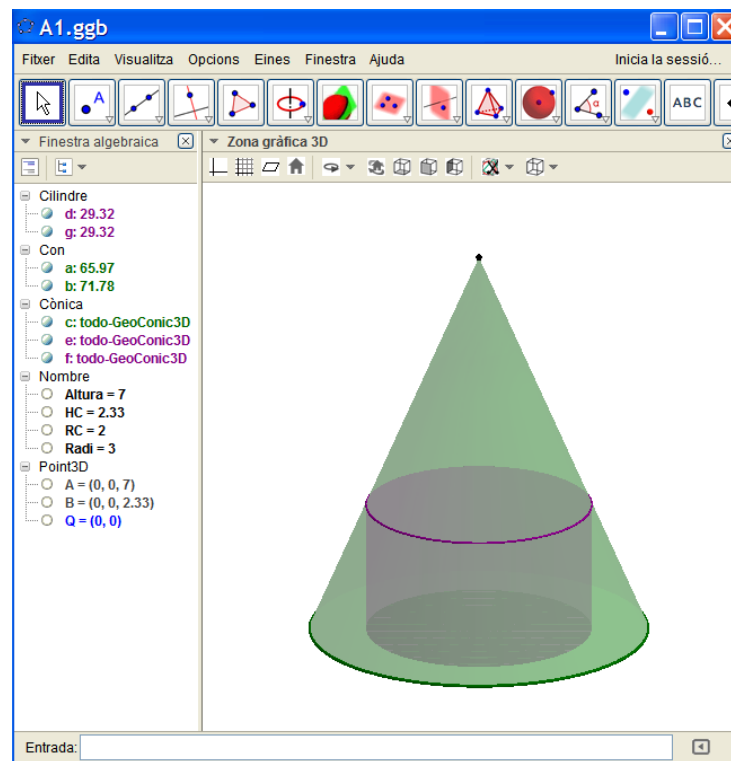
On *Altura* i *Radi* són l'altura i el radi del con que hem entrat abans.

- Entreu, doncs, **HC=Altura-Altura*RC/Radi**
- Entreu **B=(0,0,AC)**
- Entreu **Cilindre[Q, B, RC]**

Observeu la finestra algebraica. S'han creat quatre objectes nous. L'objecte **d**: representa el cilindre i el seu volum. L'objecte **g**: representa l'àrea lateral del cilindre. Els objectes **e**: i representen les bases del cilindre.

- Repetiu el procediment que hem fet amb el con per canviar els aspectes estètics del cilindre inscrit.


Haureu arribat a una situació semblant a:



Segona part. Configuració de la finestra 2D. Connexions amb la 3D.

Si voleu començar la pràctica des d'aquí heu d'obrir el fitxer A1.ggb dins d'una versió 3D del GeoGebra.

Ara obrireu la segona finestra gràfica.

- Accediu a **Visualitza | Segona finestra gràfica**.
- Premeu el botó  de la part superior dreta de la finestra per enganxar-la a l'altra.
- Redimensioneu les finestres perquè es vegin bé totes dues.
- Feu que la segona sigui la finestra activa, fent un clic a sobre.
- Definiu una **Casella d'entrada/sortida** en aquesta finestra amb la llegenda **Radi =** i com a Objecte vinculat **Radi**.
- Feu el mateix amb una altra casella amb la llegenda **Altura =** i vinculada a la variable **Altura**.

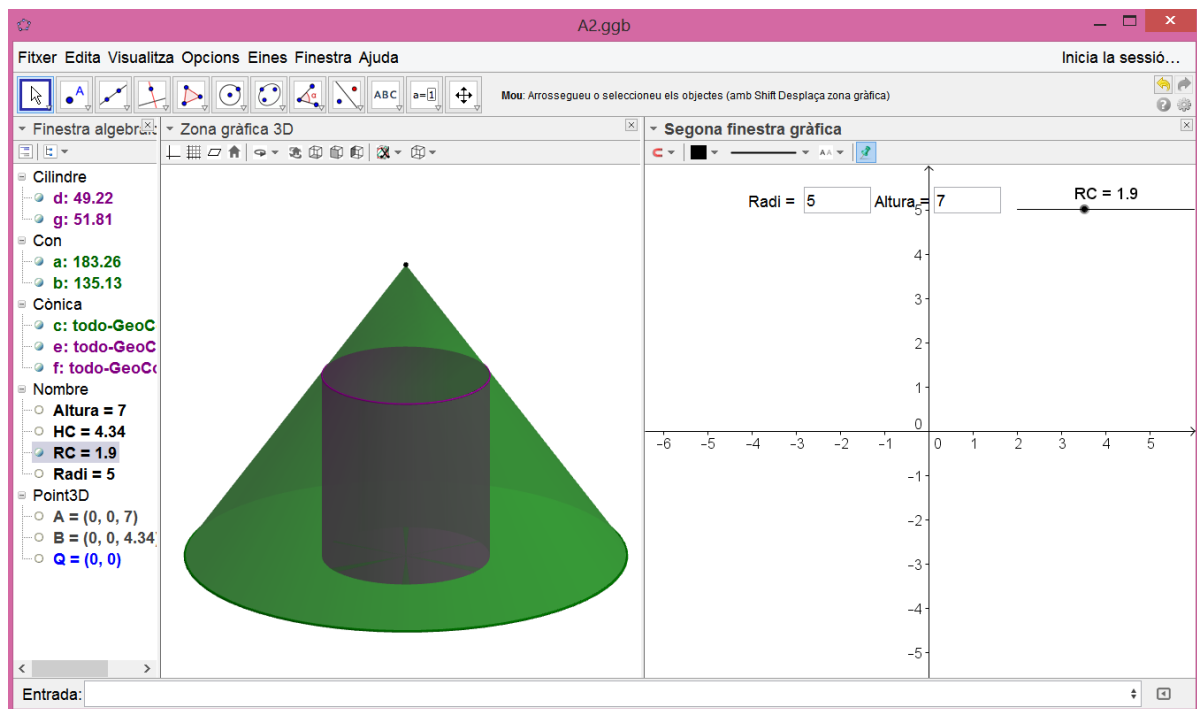
Amb aquestes dues caselles ja podeu canviar les mides del con inicial. A continuació, fareu que el radi del cilindre sigui variable.

- Seleccionau **RC** de la finestra gràfica. Recordeu que aquesta és la constant que representa el radi del cilindre. Ara la convertirem en variable.
- Amb el botó dret aneu a les seves **Propietats**. De la pestanya **Bàsic** activeu l'opció **Mostra objecte**.
- Ha aparegut la pestanya **Punt lliscant**, perquè, d'aquesta manera convertiu una constant en una variable o punt lliscant. Accediu-hi



- Feu que el valor mínim sigui 0, el màxim Radi (així el radi del cilindre no superarà mai el radi del con) i que l'increment sigui 0.01.
- Aneu a la pestanya **Avançat** i desactiveu l'ubicació a la zona gràfica (es refereix a la finestra 3D) i activeu-la per a la segona finestra gràfica, que és allà on tindreu els controls.
- Aneu canviant els valors d'aquestes tres variables i observeu com el modifica la figura. **Ja teniu connectades les dues finestres.**

Haureu arribat a una situació similar a:



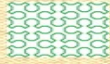
Tercera part. Representació gràfica de l'àrea del cilindre inscrit en funció del seu radi.

Si voleu començar la pràctica des d'aquí heu d'obrir el fitxer A2.ggb dins d'una versió 3D del GeoGebra.

Partim de la situació que hem deixat al final de la part anterior. Les dues finestres ja estan connectades. A continuació, entrareu la funció que relaciona el radi del cilindre inscrit amb la seva àrea.

- Feu un clic a la segona finestra gràfica perquè quedi activa.
- Escriviu a la casella d'entrada la funció $2 * \pi * x^2 + 2 * \pi * x * \left(\text{Altura} - \frac{\text{Altura}}{\text{Radi}} * x \right)$, sense cap nom inicial de funció (no heu d'escriure $f(x) = \dots$).

Aquesta és l'expressió, gens operada, de la funció que relaciona el radi (x) del cilindre inscrit amb la seva àrea, on *Altura* i *Radi* són l'altura i el radi del con. No



heu de entrar cap nom de la funció, és a dir no heu d'escriure $f(x) = \dots$, per evitar que hi hagi cap problema si la f ja està *ocupada*. Ara li canviareu el nom.

- Seleccioneu l'expressió que acabeu d'entrar i que trobareu a la finestra algebraica. Canvieu-li el nom per f .
- Doneu un color blau a la gràfica.

Ara creareu un punt que es mourà per sobre de la gràfica de la funció en canviar el valor del radi del cilindre.

- Entreu $PC=(RC, f(RC))$.
- Amb el botó dret accediu a les **Propietats** d'aquest punt i entreu Àrea com a llegenda. Feu-la visible.
- També entreu $XX=(RC,0)$ per tal que es visualitzi sobre l'eix horitzontal la variació del radi del cilindre.
- Repetiu el procediment anterior per deixar visible, per aquest punt, la llegenda Radi Cil.

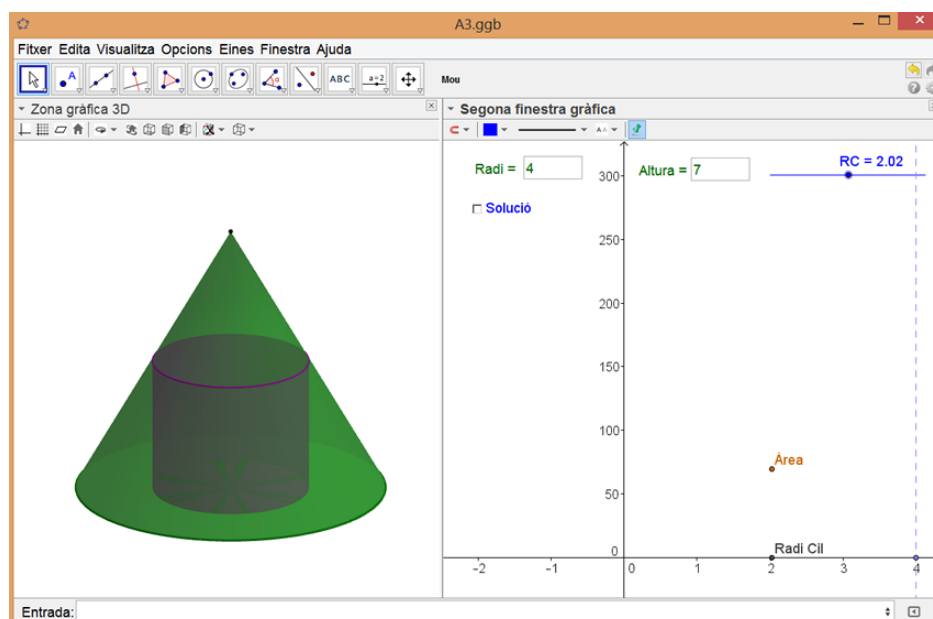
A continuació visualitzareu el valor del radi del con inicial.

- Entreu $MR=(Radi,0)$
- Utilitzeu l'eina **Recta perpendicular** per fer una perpendicular a l'eix horitzontal que passi pel punt MR.
- Canvieu el color i l'estil del punt i la recta dibuixats.

Tot seguit, creareu una casella de control per fer visible o no la gràfica de f .

- Trieu l'eina **Casella de control per mostrar/amagar els objectes** i feu un clic dins la segona la segona finestra gràfica. Entreu com a **Llegenda** Solució i com a **Objecte** la funció f . Feu que no es vegi la gràfica.

Hauríeu d'haver arribat a una situació com aquesta:





Quarta part. Tractament de la derivada. Escala dels eixos, un botó de control i els últims detalls estètics

Si voleu començar la pràctica des d'aquí heu d'obrir el fitxer A3.ggb dins d'una versió 3D del GeoGebra.

En aquesta última part, començareu per trobar la possible solució del problema, quan sigui possible.

- Feu un clic en la segona finestra gràfica la segona finestra gràfica i escriviu a la casella d'entrada $df(x) = f'(x)$. Es dibuixarà la gràfica de la derivada de $f(x)$.
- Feu servir l'eina **Intersecció** per trobar el punt d'intersecció entre la gràfica de la derivada i l'eix horitzontal. Doneu-li el nom **C**, si ja no el té.

Aquest punt, a més d'indicar el valor del radi òptim per a una àrea màxima, també ens servirà per trobar una la millor escala per als eixos de la segona finestra gràfica.

- Entreu **mm=Si[Altura > Radi, f(x(C)), f(Radi)]** Aquesta expressió surt de l'anàlisi que podeu fer dels casos que no hi ha solució. Si en el con inicial, l'altura és igual al radi, la funció $f(x)$ és converteix en una recta creixent. Si l'altura és més petita que el radi, la funció $f(x)$ és una paràbola oberta per a la part superior. En qualsevol d'aquests dos casos, el punt C no existeix.
- Feu un clic dins la segona finestra gràfica. A continuació, amb el botó dret, accediu a les propietats de la **Zona gràfica**.
- Tot seguit, de la pestanya **Bàsic** ens fixarem en les dimensions dels eixos.
- Entreu (és una de les possibilitats) a **x mín = -0.1 Radi**, a **x màx = 1.2 Radi**, a **y mín = -0.1 mm**, a **y màx = 1.3 mm**. Tanqueu la finestra de propietats.
- Feu canvis en els valors de l'altura i el radi del con inicial i observeu com s'actualitzen els eixos.

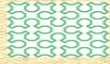
Tot seguit, creareu una casella de control per fer visible o no la gràfica de la derivada de f .

- Trieu l'eina **Casella de control per mostrar/amagar els objectes** i feu un clic dins la segona la segona finestra gràfica. Entreu com a **Llegenda** Derivada i com a **Objectes** $df(x)$ i **C**. Suposem que el nom del boleà que s'ha generat es diu **j**. Si no és així poseu-li aquest nom, per unificar idees.

Per tal que en amagar la derivada si s'amaga la funció, fareu el següent:

- Seleccioneu la casella de control Solució. Amb el botó dret accediu a les seves **Propietats**.
- Accediu a **Seqüència de comandaments**. Escriviu a la pestanya **En actualitzar**, **j=false**. Premeu el botó **D'acord**. D'aquesta manera en actualitzar la casella Solució, desapareixerà la gràfica de la derivada.

Ara, creareu un botó per controlar el traç del punt que ens indica l'àrea.



- Escriuiu a la casella d'entrada `kk=false` . Aquest bolea ens controlarà l'aparició o no del traç.
- Feu un clic dins de la segona finestra gràfica i activeu l'eina **Botó**.
- Escriuiu com a **Llegenda** Traç sí/NO.
- Escriuiu la seqüència de comandaments següent.
`kk=Si[kk==false, true, false]`
`ActivaTraç[PC, kk]`
`ActualitzaConstrucció[]`

- Acabeu amb **Aplica**.

Amb aquest botó aconseguireu activar o desactivar el traç del punt PC i esborrar les marques que ja s'hagin dibuixat.

Fareu ara que surti la fórmula de la funció $f(x)$ a la segona finestra gràfica.

- Trieu l'eina **Text**. Feu un clic dins de la segona finestra gràfica.
- Activeu l'opció **Fórmula LaTeX**.
- Escriuiu $f(x) =$. Trieu del desplegable **Objectes** la funció **f**. Acabeu amb **D'acord**.
- Feu clic amb el botó dret a sobre del text i accediu a **Propietats**
- Accediu a la pestanya **Avançat** i entreu en la casella **Condicció per mostrar l'objecte** el nom del bolea corresponent a la casella de control Solució. Així, aquesta també controlarà l'aparició del text.
- Podeu, també, canviar el color del text que ha sortit i posar-lo en negreta.

Per acabar, doneu algun retoc estètic a la construcció i feu aparèixer, si ho trobeu oportú. Algun rètol més.

