

## Problemes de Probabilitat, 1a part

1. Respecte de l'experiment aleatori de tirar dos daus a la vegada indica els elements que componen els esdeveniments següents: "sortir els dos nombres iguals", "la suma dels dos nombres és més gran que 7", "sortir un 6 com a mínim" i "la diferència dels dos nombres és més gran que 1".
2. En l'experiment aleatori de contar el nombre de gols del Barça durant un partit, són esdeveniments les expressions següents?: "marcar més de tres gols", "marcar molts gols", "marcar menys gols que els normals" i "marcar menys gols que la mitjana de la lliga anterior".
3. En referència a l'experiment de tirar dos daus a la vegada indica, entre els esdeveniments següents, quines parelles són incompatibles (disjunts): "sortir dos nombres iguals", "la suma dels dos nombres és major que set", "la diferència dels dos nombres és 2", "surten com a mínim un sis" i "la suma dels dos nombres és menor que 5".
4. L'esdeveniment impossible és incompatible amb qualsevol altre esdeveniment?
5. Assenyala tots els esdeveniments possibles relacionats amb l'experiment de tirar una moneda. Fes el mateix però de l'experiment de tirar dues monedes.
6. En una revisió mèdica els alumnes es classifiquen com: alts, mitjans i baixos. Agafant com experiment aleatori la revisió mèdica d'un alumne, quin és el conjunt de resultats? Quins són tots els esdeveniments possibles?
7. Pel que fa a l'experiment de tirar dos daus, un de blau i un altre de vermell, els esdeveniments A, B i C, són: A="la suma dels dos nombres és major que 6", B="en el dau vermell hi surten més punts que en el blau" i C="la suma dels punts és 6 o 7".  
Descriu, per mitjà d'una frase, als esdeveniments següents:  
 $A \cap B, A \cup B, A \cap B \cap C, \bar{A}, \Omega, (A \cap B) \cup C, \bar{A} \cap \bar{B}, \emptyset, \bar{B} \cup \bar{C}$ .
8. En una urna hi ha sis boles de la mateixa mida, tres d'elles són vermelles, dues són grogues i una blava. L'experiment consisteix en treure a l'atzar una bola de l'urna. Quin és el conjunt de resultat?. Quants esdeveniments es poden considerar?
9. Imaginem-nos ara que hi ha sis boles de la mateixa mida i enumerades de l'u al sis. Si es treu una bola a l'atzar, quin serà el conjunt de resultats? Quants esdeveniments es poden considerar?
10. Els esdeveniments relacionats a continuació fan referència a l'experiment de tirar una moneda quatre cops. Per mitjà de les operacions intersecció, reunió i contrari, descompon-los en altres esdeveniments. A="el primer cop surt cara i l'últim també", B="treure tres cares o bé tres creus", C="no es treu cap cara", D="es treu més d'una cara però a l'última tirada creu, o si no, es treu tot creus".
11. Fent servir les propietats de les operacions entre esdeveniments simplifica:  
 $(A \cup B) \cup (A \cap B), (\bar{A} \cap B) \cap (\bar{B} \cap A), \bar{A} \cup (A \cap B) \cup (\bar{B} \cap A),$   
 $(A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup B)$ .
12. Si es tiren dues monedes quina és la probabilitat d'obtenir: a) dues cares, b) una cara una creu, c) dues creus?
13. Si es tira un dau quina és la probabilitat d'obtenir un nombre de punts més gran que 4? I la d'obtenir un nombre parell de punts?
14. Quina és la probabilitat de que en tirar una moneda 10 cops aparegui una successió alternada de cares i creus? I si es tira n cops?
15. Quina és la probabilitat de que en tirar tres monedes juntes surti com a mínim una cara?
16. Quina és la probabilitat de que en tirar dos daus s'obtingui un doble?
17. Quina és la probabilitat de que en tirar una moneda 10 cops aparegui una creu com a mínim? I si es tira n cops?

18. Una urna conté 20 boles blanques i 30 negres. Si s'extreu quatre boles, quina és la probabilitat de que siguin les quatre blanques?
19. Quina és la probabilitat d'obtenir una suma de 8 punts en tirar tres daus a la vegada?
20. Si es tiren dos daus, què és més probable que la suma dels punts doni 12, o bé, que el producte doni 12?
21. En una urna hi ha 50 boles, sis d'elles porten premi. Si s'extreu un grup de cinc boles, determina la probabilitat d'obtenir: a) un sol premi, b) tres i solament tres premis, c) al menys un premi.
22. En un experiment aleatori la probabilitat d'un esdeveniment A és p. Demostreu que la probabilitat de realitzar-se A, com a mínim una vegada, en una sèrie de n experiments és  $1-(1-p)^n$ . Què passa si n tendeix a infinit?
23. Es barregen 5 monedes falses amb nou de bones. Si es trien a l'atzar una moneda quina és la probabilitat de que sigui falsa?. Si se'n trien dues, quina és la probabilitat de que una sigui bona i l'altre falsa?, i que siguin les dues falses?
24. Si es col·loquen al atzar, en un prestatge, 4 volums d'una obra, quina és la probabilitat de que quedin en l'ordre correcte?
25. Una moneda mal construïda té com a probabilitat de sortir cara a  $\frac{2}{3}$  de la probabilitat de sortir creu. Quines són aquestes probabilitats?
26. Una dau està construït de tal forma que la probabilitat de cada és proporcional al nombre de punts de la cara. Quines són les probabilitats de cada cara? Quina és la probabilitat de treure un nombre parell?
27. Es tria un nombre natural a l'atzar, un entre l'1 i el 1000, es considera que tots el 1000 números tenen la mateixa probabilitat de ser triats. Calcula la probabilitat de que el número triat sigui: a) múltiple de 2, b) múltiple de tres, c) múltiple de 2 i múltiple de 3 i d) múltiple de 2 o múltiple de 3.
28. En una cursa intervenen tres cavalls, el primer té el doble de possibilitats de guanyar que el segon i aquest en té el doble que el tercer. Calcula les probabilitats que té cada cavall de guanyar.
29. Quina és la probabilitat de que un grup de quatre cartes, triades a l'atzar, continguin exactament dos asos? I que continguin dos asos com a mínim?
30. Troba la probabilitat d'obtenir com a mínim tres cares en cinc tirades d'una moneda.
31. Suposarem que la probabilitat d'un nadó de ser mascle és de 0,51. Troba la probabilitat de que una família de sis fills tingui: a) com a mínim un nen, b) com a mínim una nena.
32. S'han classificat els 200 alumnes d'un col·legi segons el sexe i segons si porten o no ulleres, resultant la següent taula. Si es tria a l'atzar una comissió de dos alumnes, quina és la probabilitat de que la comissió la formin: a) dues noies, b) un noi i una noia, c) dos amb ulleres, d) dos sense ulleres, e) solament un amb ulleres i f) un noi amb ulleres i una noia sense

	amb ulleres	sense ulleres	total
noies	40	80	120
nois	30	50	80
totals	70	130	200

33. Un bombo preparat per una rifa conté 1000 boles enumerades, de les que se'n trauran 5 que seran els premis. Hem comprat 10 nombres, calcula la probabilitat de: a) obtenir un sol premi, b) obtenir dos premis, c) obtenir els cinc premis, d) no obtenir cap premi, e) obtenir algun premi.
34. En un magatzem hi ha 1000 camises de les que un 2% tenen un defecte. Un client compra 20 camises que es trien aleatòriament de entre les emmagatzemades. Quina és la probabilitat de: a) cap de les 20 camises és defectuosa, b) una de les 20 camises és defectuosa, c) dues són defectuoses.

35. En l'experiment de tirar dues monedes podem considerar com a conjunt de resultat el format pels tres elements:  $\Omega = \{dues\ cares, dues\ creus, cara\ i\ creu\}$ . D'aquesta forma la probabilitat de que surti cara i creu és  $1/3$  (Llei de Laplace). Però si es tiren molts cops dues monedes, es pot observar que "cara i creu" surt aproximadament en la meitat de les tirades. Com pots explicar aquesta desviació entre la probabilitat i la freqüència?
36. Quina és la probabilitat d'obtenir un doble 6 quan es tira un dau 10 vegades? I si es tiren  $n$  vegades?
37. Per a qualsevol esdeveniment pot succeir que es compleixi i pot succeir que no es compleixi. D'aquesta forma tenim un resultat favorable (que es compleixi) i dos resultats possibles (que es compleixi i que no es compleixi). Aplicant la llei de Laplace es pot dir que tots els esdeveniments tenen una probabilitat de  $1/2$ . És això cert? Com es pot explicar la contradicció?
38. 10 persones es col·loquen al atzar a la taula per sopar. Quina és la probabilitat de que dues amigues siguin juntes?. I si hi haguessin  $n$  persones?
39. En una reunió de 10 persones, cada una tira una moneda, i, en el cas de que una d'aquestes monedes quedi diferent de totes les altres, el seu propietari paga la consumició. Quina és la probabilitat de que això passi a la primera tirada de les monedes?
40. En una urna hi ha  $n$  boles vermelles i  $m$  grogues. Es treuen a l'atzar  $p$  boles ( $p \leq n+m$ ). Quina és la probabilitat de treure  $q$  ( $q \leq p$ ) boles vermelles?.

## Problemes de Probabilitats, 2a part

1. Es disposa de tres urnes iguals, cada una té 10 boles: 3 blanques, 2 roges i 5 negres. Troba la probabilitat de que en treure una bola de cada una : a) no s'obtingui cap bola roja, b) s'obtinguin tres boles blanques, c) no s'obtinguin boles roges i com a màxim una negra.
2. Es tira una moneda dues vegades, l'esdeveniment "en la primera tirada surt cara" és independent de "en la segona tirada surt cara"?
3. En l'experiment de tirar un dau es consideren els esdeveniments:  $A = \text{'surt més gran que 3'}$ ,  $B = \text{'surt més petit que 4'}$ ,  $C = \text{'surt nombre parell'}$ . Examina aquest esdeveniments dos a dos per veure si són independents o no.
4. Sabem que  $P(A) = 0,3$ , que  $P(B) = 0,5$  i que  $A$  i  $B$  són independents. Calcula  $P(A \cap B)$ ,  $P(A|B)$ ,  $P(B|A)$ ,  $P(\overline{A \cup B})$ .
5. Entre els 10 alumnes d'una classe se'n trien 3 per donar-los un disc. A continuació, de entre els mateixos 10, se'n trien 5 per donar-los un llibre. Suposant que les tries ha estat fetes completament a l'atzar, quina és la probabilitat de que a un alumne prèviament determinat li hagi tocat un disc i un llibre? Quina és la probabilitat de que no li hagi tocat cap premi? I, quina és la probabilitat de que li hagi tocat algun objecte?
6. En una urna hi ha 10 boles 7 de blanques i 3 de negres, si se'n extreuen 3 boles, una a continuació de l'altre, sense torna a l'urna la bola extreta, quina és la probabilitat d'obtenir-les totes blanques? I si s'agafen les tres boles de cop?. I si s'agafen una rera l'altre però retornant cada cop la bola a l'urna?
7. Emprant les lleis de Morgan, demostra que si dos esdeveniments són independents també ho són els seus contraris.
8. Un producte està format de dues parts,  $A$  i  $B$ , que es fabriquen en dues màquines diferents. S'ha comprovat que la probabilitat d'un defecte en  $A$  és  $0,1$ , i que la probabilitat d'un defecte en  $B$  és  $0,2$ . Quina és la probabilitat de que un producte tingui algun defecte? Quin és el tant per cent de productes amb algun defecte?
9. Tenim tres urnes, en cada una hi ha sis boles de les que tres són vermelles, dues blanques i una blava. Troba la probabilitat de que en extreure una bola de cada urna s'obtinguin tres boles vermelles.
10. Un producte està format per dues parts, que anomenarem part  $A$  i part  $B$ , de fabricació completament independent. La probabilitat de que la part  $A$  tingui un defecte és de  $0,06$ , i la de que el tingui la part  $B$  és de  $0,07$ . Quina és la probabilitat de que el producte surti sense defectes? I la de que tingui algun defecte?
11. Un canó te la probabilitat de  $0,25$  de tocar l'objectiu. Si el canó disparés 3 cops quina seria la probabilitat de tocar l'objectiu?
12. Els tres canons d'un vaixell tenen una probabilitat de  $0,1$ ,  $0,2$  i  $0,3$  de tocar una posició enemiga. Si es disparen els tres canons, quina és la probabilitat de tocar la posició?
13. S'extrauen a l'atzar tres cartes, una rera l'altre sense retornar, d'una baralla. Quina és la probabilitat d'obtenir un cavall una sota i un rei? I, si les cartes es retornessin?
14. En una urna hi ha 50 boles, 10 d'elles tenen escrites la lletra  $F$ , unes altres deu la lletra  $I$ , unes altres deu la  $U$ , unes altres deu la  $S$ , i les últimes deu la  $N$ . S'extreuen 6 boles consecutivament sense retornar-les,. Quina és la probabilitat de forma la paraula INSUFI amb les sis boles extretes?.
15. Calcula la probabilitat de que 4 persones triades a l'atzar tinguin onomàstiques diferents.
16. Calcula la probabilitat de que entre les 25 persones que s'han reunit hi hagi alguna coincidència onomàstica.
17. Demostra que si dos esdeveniments  $A$  i  $B$ , que no són ni el segur ni l'impossible, són independents també ho són  $A^c$  i  $B$ , i que també ho són  $A^c$  i  $B^c$

18. De entre 20 equips de muntatge n'hi ha 5 de defectuosos. Tres operaris agafen successivament un dels equips. Quin d'ells té la probabilitat més alta d'agafar un equip defectuós?
19. Tres gots estan plens d'aigua però en un d'ells hi ha un verí mortífer que no es pot distingir. Tres condemnats han de veure's el contingut d'un dels gots. El primer condemnat pot triar entre els tres gots, el segon ho fa de entre els dos que queden i el tercer ha de veure's el que li deixen. Quin té més probabilitat de sobreviure?
20. Quina és la probabilitat de que en tirar un dau  $n$  vegades surti, com a mínim, un doble sis.
21. En una capça hi ha quatre papers doblats, un porta escrit el nombre 1, un altre el 2, un tercer el 3 i l'últim té escrit els tres nombres: 1, 2 i 3. Respecte de l'experiment de treure un paper a l'atzar es consideren els tres esdeveniments:  $A =$  'treure un 1',  $B =$  'treure un 2' i  $C =$  'treure un 3'. Demuestra que qualsevol parella dels esdeveniments  $A$ ,  $B$  i  $C$  són independents.
22. Dos jugadors,  $A$  i  $B$ , juguen amb dos daus,  $A$  guanya si la suma de punts és 6,  $B$  guanya si la suma és 7.  $A$  comença tirant, si surten 6 punts guanya i s'ha acabat la partida, si no surten 6 punts tira  $B$ , que guanyarà si li surten 7 punts, si no li surten tirarà  $A$ , i així fins que algun dels dos guanyi. Descric el conjunt de resultats. Aquest conjunt és finit? Quina és la probabilitat de que guanyi  $A$  en la primera tirada. Quina és la probabilitat de que guanyi  $B$  en la segona tirada. Quina és la probabilitat de que guanyi  $A$  en la tercera tirada?. Quina és la probabilitat de que guanyi  $A$ ? Quina és la probabilitat de que guanyi  $B$ ? I, quina és la probabilitat de que no s'acabi mai la partida?
23. Sabem que en tirar 5 monedes hem obtingut com a mínim dues cares. Calcula la probabilitat de que el nombre de cares sigui exactament de tres.
24. Es tiren sis daus, quina és la probabilitat d'obtenir els sis nombres?
25. Un objecte està format per tres peces de fabricació independent. El percentatge de peces defectuoses per cada peça és: 3, 5 i 10 respectivament. Un objecte és útil si les tres peces són bones i també ho és en la quarta part dels cops en que hi ha dues peces defectuoses. No és útil quan les tres peces són defectuoses o bé quan solament hi ha una peça defectuosa. Quin és el percentatge d'objectes no útils?
26. Els cens d'un país permet conèixer que el 80% són de pell blanca, que hi ha un 52% de dones i que hi ha un 40% de dones blanques que són solteres. Troba la probabilitat de que una persona triada a l'atzar d'aquest país sigui dona soltera i blanca.
27. Referint-nos al cens d'una població americana s'ha vist que hi ha un 5% de població de pell groga, un 55% de pell blanca i un 40% de pell negra. També es coneix que un 40% dels blancs són solters, que un 30% dels negres són solters i que el 35% dels grocs són solters. Troba la probabilitat de que sigui blanc un ciutadà triat al atzar de entre els solters de la població.
28. Tres màquines  $A$ ,  $B$  i  $C$  produeixen respectivament 50, 30 i 20 per cent d'unes peces. El percentatge de peces defectuoses són 1, 3 i 6 per cent respectivament. S'agafa una peça a l'atzar que resulta ser defectuosa, quina és la probabilitat de que sigui de la màquina  $C$ ?
29. En un Institut hi ha el 8% de nois i el 12% de noies que tenen els ulls blaus. Les noies són un 60% de l'alumnat. Es tria a l'atzar un estudiant que resulta té els ulls blaus, quina probabilitat hi ha de que sigui noia?
30. En una urna  $A$  hi ha 2 boles blanques i 5 de negres, en un altre urna  $B$  hi ha 4 boles blanques i 4 de negres, i en una tercera urna  $C$  hi ha 6 boles blanques i una de negra. Es selecciona a l'atzar una urna (amb igual possibilitat per a cada una) i es treu una bola d'ella que resulta ser blanca. Quina és la probabilitat de que la bola triada sigui de la urna  $C$ ?

## Problemes de probabilitats (selectivitat)

1. La probabilitat de que un tirador amb arc faci diana és 0,2. Si fa 5 intents, calcula la probabilitat que faci exactament 3 dianes.
2. En una loteria de 1.000 bitllets es rifen un primer premi i un segon premi, que es treuen successivament d'una caixa que conté 1.000 números. Els esdeveniments “*el primer premi correspon al 345*” i “*el segon premi correspon al 608*”, són dependents o independents?. Raoneu la resposta.
3. El 4% dels disquets d'ordinador que fabrica una determinada empresa resulten defectuosos. Els disquets es distribueixen en capces de 5 unitats. Calculeu la probabilitat de que en una capsa no hi hagi cap disquet defectuós.
4. En un joc, A i B són dos esdeveniments independents, la probabilitat de A és  $\frac{1}{2}$  i la de B és  $\frac{1}{3}$ . Calculeu la probabilitat de A condicionada a B a partir de la probabilitat de  $A \cap B$ . Calculeu també la probabilitat de  $A \cup B$ . Raoneu les respostes.
5. En un cert joc d'atzar, la probabilitat d'un esdeveniment A és  $\frac{1}{2}$ , la de B és  $\frac{3}{4}$  i la de  $A \cup B$  és  $\frac{5}{8}$ . Determineu si A i B són independents.
6. La probabilitat de patir una mena d'incident en fer una immersió es considera que és de 0,1. Calculeu la probabilitat de que un submarinista amb 400 immersions hagi tingut més de 60 immersions amb incidents. Comenteu el resultat.
7. Comenteu la diferència entre esdeveniments incompatibles i esdeveniments independents. Poseu un exemple de cada un d'ells.
8. En una capsa tenim 3 boles vermelles i 4 de negres. Quina és la probabilitat de no treure cap bola vermella en fer tres extraccions amb reposició? I la de treure exactament dues boles vermelles?.
9. Descriviu un experiment aleatori, escriviu el conjunt de resultats i els esdeveniments elementals.
10. En un procés de fabricació, la probabilitat que una peça resulti defectuosa és 0,03. Calculeu la probabilitat que en agafar 4 peces de manera independent en trobem com a mínim una de defectuosa.
11. Tenim una moneda trucada amb probabilitat 0,6 de sortir cara i probabilitat 0,4 de sortir creu. Si la tirem 4 vegades, quina és la probabilitat de que surti creu més de dues vegades?
12. Després de fabricar un producte determinat, aquest passa per dos controls de qualitat A i B, que comproven qualitats independents. El producte només sortirà al mercat si es superen els dos controls. Sabem que el 80% dels productes superen el control A, i que el 60% surten al mercat. Calculeu el percentatge de productes que superen el control B.
13. D'una baralla espanyola de 48 cartes en triem una a l'atzar. Són independents els esdeveniments “*treure un rei*” i “*treure una espasa*”? Raona la resposta.
14. Tirem 6 daus. Calculeu la probabilitat que surti almenys un 5.
15. Si tirem 5 vegades un dau perfecte, calculeu la probabilitat de que surti “6” més de 3 vegades.

Solucions als problemes de la 1 <sup>a</sup> part	Solucions als problemes de la 2 <sup>a</sup> part
<p>12.- a) 0,25, b) 0,5, c) 0,25  13.- <math>5/6</math> i <math>1/2</math>  14.- <math>1/2^9</math>  15.- 0,875  16.- <math>1/6</math>  17.- <math>1 - 1/2^{10}</math> i <math>1 - 1/2^n</math>  18.- 0,02103  19.- 0,09722  20.- Que el producte doni 12.  21.- 0,38443, 0,00893 i 0,48743  23.- 0,35714, 0,49451 i 0,10989  24.- 0,04167  25.- 0,6 i 0,4  26.- <math>1/21</math>, <math>2/21</math>, <math>3/21</math>, <math>4/21</math>, <math>5/21</math>, <math>6/21</math> i <math>12/21</math>  27.- 0,5, 0,333, 0,111 i 0,722  28.- <math>1/7</math>, <math>2/7</math> i <math>4/7</math>  29.- 0,00972 i 0,02920  30.- 0,5  31.- 0,98616 i 0,98240  32.- 0,35880, 0,54271, 0,12136, 0,42136, 0,02286, 0,06030  33.- 0,04822, 0,0008785, 0,000000000030544, 0,95089, 0,04910  36.- 0,51548  38.- 0,02222 i <math>2/n(n-1)</math>  39.- 0,01953  40.- <math display="block">\frac{\binom{n}{q} \binom{m}{p-q}}{\binom{n+m}{p}}</math></p>	<p>1.- a) 0,512, b) 0,027 c) 0,087  4.- 0,15, 0,3, 0,5, i 0,35  5.- 0,15, 0,35 i 0,65  6.- 0,29167, 0,29167 i 0,343  8.- 0,28 i 28%  9.- 0,125  10.- 0,4558 i 0,5442  11.- 0,578125  12.- 0,496  13.- 0,0006167 i 0,0005787  14.- 0,1699  15.- 0,98364  16.- 0,96787  18.- 0,25, 0,25 i 0,25  19.- <math>2/3</math>, <math>2/3</math> i <math>2/3</math>  20.- <math>1 - 5^n/6^n - n5^{n-1}/6^n</math>  22.- <math>5/36</math>, <math>35/36 \cdot 1/6</math>, <math>35/36 \cdot 5/6 \cdot 5/36</math>, <math>30/61</math>, <math>31/61</math> i 0  23.- 0,3846  24.- <math>6!/6^6</math>  25.- 83,16%  26.- 0,1664  27.- 0,43564  28.- 0,46154  29.- 0,69231  30.- 0,52174</p>