Capítol 1, Conjunts i enunciats

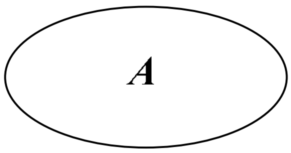
1.1 Conjunts i elements

Totes les teories parteixen de *conceptes elementals* que no es defineixen. En aquest estudi, admetrem com un d'aquests conceptes elementals el de **conjunt** i el d'**element.**

És freqüent definir a un conjunt com una agrupació, una col·lecció, un grup, una reunió, etc. Totes aquestes paraules són pràcticament sinònimes a la de conjunt i no aporten cap sentit nou al concepte.

És freqüent representar als conjunts amb lletres majúscules i els elements amb lletres minúscules. Aquest costum no és general, podria ser fins i tot al revés, o podria ser que en lloc de lletres s'usessin altres símbols.

És normal representar gràficament els conjunts amb una línia tancada formant una espècie d'oval que suggereix el límit dels seus elements. A voltes es dibuixen els elements dins de l'oval, però moltes vegades no s'hi dibuixen, la imaginació ha de suplir aquesta manca.



1.2 Relació de pertinènça

Els conjunts estan formats per elements. Als elements que formen un conjunt se'ls diu que **pertanyen** al conjunt. Veiem exemples:

- La lletra a és un element que pertany al conjunt alfabet.
- El nombre dos és un element que pertany al conjunt de nombres enters.
- Un triangle és un element que pertany al conjunt de tots el polígons plans.

La relació de pertinènça s'indica pel símbol

$$\in$$

Per exemple, si indiquem per *A* al conjunt del alfabet, per **Z** al conjunt del nombres enters i per *P* al conjunt tots els polígons, es pot posar:

$$\begin{array}{rcl} a & \in & A \\ 2 & \in & Z \\ triangle & \in & P \end{array}$$

Per negar la relació de **pertinènça** es fa servir el símbol

$$\notin$$

Així s'escriurà:

$$10 \notin A$$

$$a \notin Z$$

$$segment \notin P$$

1.3 Conjunt buit

Existeix un conjunt molt especial, es tracta *d'un conjunt que no té cap element*, s'anomena **conjunt buit**, i s'indica pel símbol

$$\phi$$

Encara que es pugui pensar que un conjunt sense elements no existeix o que li falta la qualitat essencial per a ser conjunt com és la de tenir elements, el cert és que la seva utilització és obligada per donar sentit a una sèrie d'operacions que es construeixen sobre els conjunts. Es tracte d'un concepte semblant al del nombre zero.

1.4 Subconjunts

Una relació entre conjunts és la d'inclusió, si A i B són conjunts s'escriurà

$$A \subset B$$

i es dirà que *A* **està inclòs** en *B si tots els elements d'A també són elements de B.*

Per exemple si *A* és el conjunt de l'alfabet i *B* és el conjunt de tots el caràcters informàtics, és evident que *A* està inclòs en *B,* ja que en els caràcters informàtics hi ha totes les lletres de l'alfabet.

Si un conjunt *A* està inclòs en un altre *B* es diu, també, que *A* és un **subconjunt** de *B.* Amb aquest nom es vol donar a entendre, que A és una part de B.
Si *A* és subconjunt de *B*, a vegades també es diu que *B* és un **superconjunt** d'*A*.

Fixeu-vos que seguint estrictament la definició d'inclusió tot conjunt és subconjunt d'ell mateix, o sigui:

$$A \subset A$$

sigui quin sigui el conjunt A.

Un cas especial és el del conjunt buit, que com que no té elements resulta difícil l'aplicació de la definició d'inclusió. Tot i així, i per conveniències del procés matemàtic, es considera que el conjunt buit està inclòs en qualsevol conjunt. Sigui quin sigui el conjunt A es pot posar

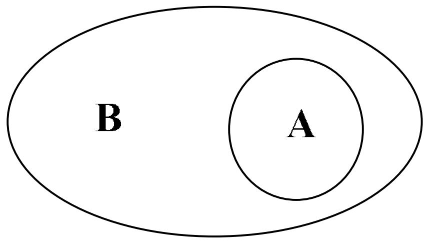
$$\phi \subset A$$

La relació d'inclusió es pot escriure tal com s'ha dit, o en ordre invers. Així les relacions

$$A \subset B \qquad i \qquad B \supset A$$

indiquen el mateix.

En forma gràfica aquesta relació es veurà per mitjà d'un oval dins d'un altre. Si A està inclòs en B es veurà així:



$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$

1.5 Enunciats

Un **enunciat** és qualsevol asseveració o afirmació sempre que s'hi pugui aplicar un criteri de veracitat. És a dir que de cada enunciat es pot afirmar si és cert o fals. Per exemple: " les ovelles tenen tres peus", "tots el nombres decimals finits són racionals", o bé "totes les funcions contínues són derivables".

El concepte d'enunciat és un concepte elemental, o sigui és el primer d'una cadena de conceptes que es van construint a partir d'ell. Els conceptes elementals no es defineixen, ja que no es disposa d'altres elements previs per poder-ho fer. Passa igual que pel concepte de conjunt, paràgraf 1.1.

El criteri per assignar la veracitat o falsedat a un enunciat no té perquè respondre a formules lògiques ni de qualsevol altre tipus, aquesta assignació és una part de l'elementalitat del concepte d'enunciat.

No és universal el nom d'enunciat, s'utilitzen altre vocables, per exemple també és molt usat el de proposició.

L'enunciat "Tots el nombres decimals finits són racionals" donada a l'exemple anterior és certa des del punt de vista matemàtic. Mentre que "Totes les funcions contínues són derivables" és falsa.

Per no haver d'operar amb tot una frase que resultaria pesat, la majoria de vegades els enunciats s'indiquen per una sola lletra:

p = "x és un nombre més gran que zero"
q = "x és un nombre tal que hi ha un enter z que x = 2*z"
r = " Aquest llibre té 80 pàgines"

Hi ha enunciats 'variables', que no se'ls pot dir que siguin certs o falsos, perquè depenen d'una, o més d'una, variables, i segons els valors que prenguin aquestes variables l'enunciat podrà ser cert o bé fals. Per exemple, l'enunciat *p* anterior té per variable x, i serà cert en el cas de que x sigui un nombre parell, i serà fals en cas contrari.

A cada enunciat s'hi pot assignar un conjunt que contingui els valors que els fan certs. Als enunciats que sempre són falsos se'ls hi assigna el conjunt buit (mai es compleixen). I als enunciats que sempre són certs se'ls hi assigna el conjunt més gran possible en el tema que es treballa, conjunt que es sol indicar per **Ω.** Al altres enunciats se'ls hi assignarà un subconjunt de **Ω.**

1.6 Operacions entre enunciats

La negació:

La partícula ¬ col·locada a l'esquerra d'un enunciat fa canviar radicalment el significat d'aquest. En lloc de l'afirmació d'un enunciat, amb el signe ¬ al davant, es nega aquesta afirmació. Per això al símbol ¬ també se li diu **negació**.

Per exemple si p = "tots els llibres són útils", tindrem que ¬p = "no tots els llibres són útil", o d'una altre forma, ¬p = "hi ha llibres que no són útils".

O, un exemple més matemàtic, si q = " x és un nombre primer", tindrem que ¬q = "x no és un nombre primer".

No sempre la negació es presenta amb el símbol indicat. A vegades es fan servir altres símbols, com ara:

$$\overline{p}, \qquad Cp, \quad o\ bé \qquad p^{\neg}$$

La conjunció:

Un altre símbol que transforma els enunciats és el $\wedge$, que uneix dos enunciats per donar-ne una altre de nou. Si p i q són enunciats, $p \wedge q$ n'és una altre. L'enunciat $p \wedge q$ serà cert només quan siguin certs simultàniament p i q. Si algun dels enunciats p o q no és cert tampoc ho serà $p \wedge q$.

Al símbol $\wedge$, es sol dir **conjunció**, o bé partícula **i**, ja que unim per una i els dos significats dels enunciats p i q, donarà el significat de $p \wedge q$.

Si p = "l'element x pertany al conjunt A" i q = "l'element x pertany al conjunt B", tindrem que $p \wedge q$ = "l'element x pertany al conjunt A i l'element x pertany al conjunt B", o bé més simplificat $p \wedge q$ = "L'element x pertany al dos conjunt A i B"

La disjunció:

En el llenguatge normal la disjunció 'o' té dos significats. Si es diu 'a o b', no queda clar quina d'aquestes dues significacions té: "vull a o b, però no les dues", o "vull a, o vull b, o també les dues alhora".

En matemàtiques el significat de la **disjunció** $\vee$, que també es diu partícula **o**, correspon al segon dels significats: 'o un, o l'altre, o tots dos'. Així l'enunciat $p \vee q$ serà cert si algun dels dos enunciats p o q, o els dos, són certs.

Si p i q tenen el significat donat més amunt, tindrem que $p \vee q$ = "l'element x pertany al conjunt A, o bé, l'element x pertany al conjunt B, o d'una altre format $p \vee q$ = "l'element x pertany al conjunt A, o al B, o a tots dos".

1.7 Quantificadors

Quantificador existencial:
Es tracta del símbol:

$$\exists$$

Que es pot traduir per 'existeix'. Aquest signe ha de precedir a un element i a un enunciat, aleshores, el signe es pot interpretar així. "com a mínim existeix un element que fa cert l'enunciat".

L'expressió:

$$\exists x \text{ tal que f té un màxim en } x$$

Ens diu que com a mínim hi ha un valor x en que la funció f hi té un màxim.

La partícula *tal que*

Encara que no sigui un quantificador, però tenint en compte que és molt usada la frase 'tal que' o 'de forma que', aquesta es pot substituir pel símbol **|**. Així l'expressió vista en el paràgraf anterior es pot posar:

$$\exists \; x \mid f(x) \text{ és màxim}$$

Quantificador universal

Es tracte del símbol

$$\forall$$

que es pot substituir per la frase 'per tots' o "per qualsevol' o 'qualsevol que sigui'. Per exemple

$$\forall x \in A \;\; x \text{ està relacionat amb } b$$

ens diu que 'qualsevol que sigui l'element x del conjunt A, x estarà relacionat amb b', o més senzill 'tots els element d'A estan relacionat amb b'.

1.8 Descripció de conjunts

Si es tracta de descriure un conjunt amb pocs elements, hi ha una forma senzilla de fer-ho, es tracte d'explicitar tots els elements. Això es sol fer indicant el símbol del conjunt seguit d'un igual i, a continuació, s'escriuen tots els elements tancats amb claus i separats per comes, així per exemple:

A = {a, b, c, d, e}
B = {10, 20, 30, 40, 50}
C = {verd, blau, groc, lila}

Una altra forma més general de definir un conjunt és especificar un segon conjunt, ja conegut, que sigui superconjunt del que es va a definir, seguit de les condicions que han de complir els seus elements per que pertanyin al conjunt definit. La forma en que s'ha de fer és:

A = {els element del conjunt *B* que compleixin aquestes condicions}
O fent servir les partícules lògiques estudiades es pot definir el conjunt de nombres parells positius com:

$$P = \{ x \in Z \mid (x > 0) \wedge (\exists \; z \in Z \mid x = 2 * z)\}$$

El conjunt definit per aquesta forma és el conjunt associat a l'enunciat o condició explicitada, mireu l'apartat 1.5

Fixeu-vos que aquesta segona forma de definir a un conjunt és idèntica a la que es fan servir en els diccionaris per definir les paraules. La descripció de la paraula *taula* en el Fabra és: *Moble que consisteix en una peça llisa i plana sostinguda horitzontalment per tres o més peus o petges, que serveix per a menjar*.

Que podríem interpretar com: *Una taula és un element del conjunt de mobles que compleix amb les condicions de tenir una peça llisa i plana que està sostinguda horitzontalment per tres o més peus i que serveix per a menjar.*

1.9 Implicacions

Es dirà que un enunciat *p* **implica** a una altre enunciat *q si q és certa sempre que ho sigui p* i s'indicarà pel símbol:

$$p \Rightarrow q$$

Per exemple, si *p* = "N és un múltiple de 6" i *q* = " N és parell", ens trobem que tots el múltiples de sis són parells, o el que és el mateix, sempre que *p* sigui certa també ho serà *q.* Com que es compleix la definició, tindrem que p implica q

Un altre exemple. S'ha estudiat en Anàlisi que per tal de que una funció sigui derivable ha d'ésser contínua, O sigui, si *p* = "f és una funció derivable en (a,b)" i *q* = "f és una funció contínua en (a,b)", podem dir, també, que *p* implica *q.*

Naturalment aquesta relació es pot expressar en sentit invers:

$$p \Rightarrow q \qquad \text{i} \qquad q \Leftarrow p$$

indiquen el mateix.

Aquesta relació també s'expressa amb altres formes que volen dir el mateix:

p **implica** *q*
p **té per conseqüència a** *q*
de *p* **es dedueix** *q*
si és compleix *p* **també es compleix** *q*

O invertint el termes:

q **és implicat per** *p*
q **és conseqüència de** *p*
q **és deduïda per** *p*

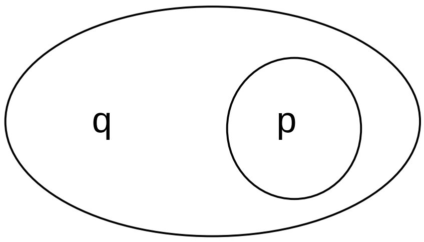
O d'una forma més tècnica:

p **és condició suficient per** *q*
q **és condició necessària per** *p*

És interessant veure que si $p \Rightarrow q$ *,* la proposició *p* té un àmbit de validesa més restringit que el de *q*. Naturalment amb una implicació es passa d'una proposta o condició p particular a una altre q més genèrica.

La representació gràfica de dues proposicions de manera que una impliqui a l'altre ha d'ésser per mitjà de dues àrees una dins de l'altre, com dos subconjunts. Si $p \Rightarrow q$*,* la regió corresponent a *p* (on p és certa, paràgraf 1.5) estarà inclosa dins la de *q*. És clar, *q* es complirà en més oportunitats que *p*, però sempre que es compleixi *p* es complirà *q*, tal com diu la definició.

$p \Rightarrow q$



Una implicació entre dues proposicions és una altre proposició que, naturalment, pot ser certa o falsa. Per això la implicació és una operació entre proposicions.

La demostració de que una implicació és certa s'anomena **proposició**. Si una proposició té una certa rellevància científica, o una importància històrica, s'anomena **teorema**. Si una proposició solament serveix com a esglaó per arribar a demostrar un altre proposició més important es diu **lema**. Si una proposició és una conseqüència d'un altre proposició o teorema important es sol dir **corol·lari**.

1.10 Enunciats equivalents

Dos enunciats *p* i *q* són **equivalents** si *es compleix a la vegada que p impliqui a q i que q impliqui a p,* circumstància que s'indica pel símbol:

$$p \Leftrightarrow q$$

De la mateixa definició es desprèn que l'equivalència d'enunciats és el mateix que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Fixeu-vos que si *p* i *q* són equivalents passarà que sempre que es compleixi *p* es complirà *q*, ja que *p* implica *q*. Però també sempre que es compleixi *q* es complirà *p*, ja que *q* implica *p*. O sigui, que *p* i *q* es compliran simultàniament o no es compliran cap de les dues. Això vol dir que les dos enunciats 'enuncien' exactament el mateix. O dit d'una altre forma, són els mateixos enunciats, encara que potser estan expressats de forma diferent.

És clar que els conjunts associats a dos enunciats equivalents són totalment coincidents.

Si dos enunciats són equivalents es diu que entre elles existeix una **doble implicació** fent referència a les implicacions d'una proposició cap a l'altre i viceversa.

Si existeix una doble implicació entre *p* i *q* i seguint la nomenclatura donada en el paràgraf 1.6, és diu molt sovint que *q* és **condició necessària i suficient** per *p*, o el que és el mateix, *p* és condició necessària i suficient per *q*.

Una doble implicació és un nou enunciat que pot ser cert o fals. És clar que per demostrar la certesa d'una doble implicació s'han de demostrar les dues implicacions de la definició.

Per exemple d'enunciat equivalents posem: p = " X és un punt del pla que les seves coordenades (x,y) compleixen amb $x^2 + y^2 = 25$" i q = "X és un punt del pla que dista 5 unitats de l'origen". Per demostrar l'equivalència s'han de demostrar les dues implicacions: $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow p$, cosa que deixem com exercici.

1.11 Igualtat entre conjunts

Dos **conjunt** són **iguals** *si els elements d'un també són elements de l'altre i viceversa.*

El fet de que tots els elements d'A siguin de B vol dir

$$A \subset B$$

I el fet de que tots els elements de B sigui d'A vol dir que

$$B \subset A$$

A la pràctica, per a demostrar la igualtat entre dos conjunts s'haurà de demostrar les dues inclusions, que es redueix a demostrar aquestes dues implicacions:

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$
$$x \in B \Rightarrow x \in A$$

tal com diu la definició de subconjunt del paràgraf 1.4,

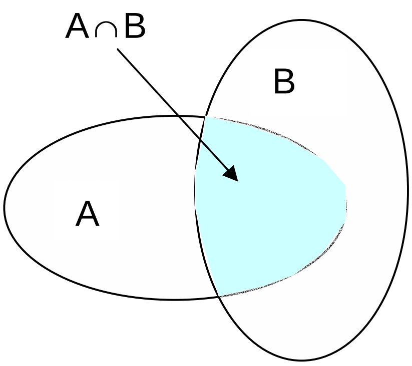
1.12 Intersecció de conjunts

Suposem que els conjunts A i B són subconjunts d'un altre conjunt **Ω**.
Anomenarem **intersecció** d'A i B a *un altre conjunt compost pels elements comuns d'A i de B.*

Amb la formulació estudiada anteriorment, la intersecció es pot expressar:

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

I d'una forma gràfica:



Si dos conjunts no tenen elements comuns, la seva intersecció és el conjunt buit i en aquest cas es diu que els conjunts són **disjunts.**

Al conjunt **Ω** el considerarem com un conjunt que engloba a tots els possibles conjunts que poden anar apareixent en el desenvolupament del tema que es tracta. Per exemple, si estem treballant sobre intervals d'una recta el conjunt **Ω** serà la recta real **R**.

La intersecció és una operació entre conjunts, en el sentit de que, tal com es veurà més endavant, l'operació s'aplica a dos conjunts i dóna com a resultat un altre conjunt.

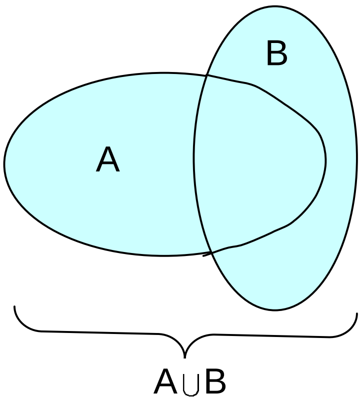
1.13 Reunió de conjunts

Suposem que els conjunts A i B són subconjunts d'un altre conjunt **Ω**.
Anomenarem **reunió** d'A i B a *un altre conjunt compost tant pel elements d'A com els de B, tenint en compte de que si hi ha elements comuns aquests solament consten un cop.*

Amb la formulació estudiada anteriorment, la reunió es pot expressar:

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Que d'una forma gràfica



La reunió de conjunts és una operació ja que s'aplica a dos conjunts i dóna com a resultat un altre conjunt.

1.14 Complementari d'un conjunt

Suposem que el conjunt A està inclòs dins un altre conjunt **Ω**. Anomenarem complementari d'A respecte de **Ω** a un altre conjunt format per tots els elements de **Ω** que no siguin d'A, i ho anotarem com A^c.

$$A^c = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

S'ha de fer notar que el complementari no és una operació entre conjunts, ja que no s'aplica a dos conjunts, sinó que solament s'aplica a un i dóna un altre com a resultat.

1.15 Propietats de la intersecció i de la reunió

Tant la intersecció com la reunió de conjunts tenen aquests propietats:

Propietat	Intersecció	Reunió
Commutativa	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Tenir element neutre	És $\mathbf{\Omega}$; $A \cap \mathbf{\Omega} = A$	És ϕ; $A \cup \phi = A$
Distributiva	respecte la reunió: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	respecte la intersecció: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Per demostrar cada una d'aquestes propietats, s'ha de demostrar una igualtat entre dos conjunts, i per això, s'ha de procedir de la forma indicada en el paràgraf

1.11. Desenrotllarem la demostració de la propietat distributiva de la intersecció respecte la reunió:

En primer lloc demostrarem que $A\cap (B \cup C) \subset (A\cap B) \cup (A\cap C)$

$$
\begin{aligned}
& x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow \\
& x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Rightarrow \\
& x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

Arribats a aquest punt hauríem d'usar la propietat distributiva de la partícula $\wedge$ respecte de $\vee$, cosa que no s'ha explicat. Tot i així, aquesta propietat és molt intuïtiva i es pot comprendre fàcilment.

A l'última línia del procés ens diu que l'element x pertany a A i a més pertany a B o a C. Si d'aquestes dues possibilitat (ser de B o de C) pertanyés a B, tindríem que x pertany a A i a B. Però si es complís la segona possibilitat, tindríem que x pertany a A i a C. D'aquí es desprèn que x pertany a A i a B, o bé, pertany a A i a C, o sigui

$$
\begin{aligned}
& (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Rightarrow \\
& x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \Rightarrow \\
& x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

Amb el que es demostra que $A\cap (B \cup C)$ és un subconjunt de $(A\cap B) \cup (A\cap C)$.

La demostració de $A\cap (B\cup C) \supset (A\cap B) \cup (A\cap C)$ és pràcticament igual a la efectuada. Aquesta, i totes les demostracions de les altres propietats, les deixem com exercicis.

Un altre exercici molt fàcil, que el lector hauria de fer, és el d'interpretar gràficament cada una de les propietats, que encara que sembli un exercici infantil pot donar llum sobre el tema.

Després d'aquestes propietats és lícit escriure una sèrie d'operacions $\cap$, o $\cup$, seguides i sense usar parèntesis

$$
A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots\ldots \cap A_n
$$
$$
A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots \cup A_n
$$

tant si es posen parèntesis com si no el resultat ha d'ésser el mateix.

Aquestes expressions es poden anotar d'aquesta forma simplificada:

$$
\bigcap_{i=1}^{n} A_i \qquad\qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i
$$

1.16 Lleis de Morgan i àlgebra de Bool

Les lleis de Morgan són dues propietats que relacionen les operacions d'intersecció i de reunió amb el complementari:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Es poden resumir dient que *el complementari d'una intersecció és igual a la reunió dels complementaris* i que *el complementari d'una reunió és igual a la intersecció dels complementaris*.

Les demostracions formals i les interpretacions gràfiques les deixem com exercicis pel lector.

Sempre que es disposi de:

- Un conjunt.
- Dues operacions, definides en el conjunt, que tinguin les propietats examinades en la taula del paràgraf anterior.
- Una 'operació complementari', definida en el conjunt, que aplica un element a un altre element, i que compleixi amb les lleis de Morgan.

es diu que aquest conjunt junt amb les dues operacions i el complementari formen una **àlgebra de Bool**

Trobareu àlgebres de Bool, per exemple, en la lògica proposicional i en el càlcul de probabilitats.

1.17 Partició d'un conjunt

Donat un conjunt A i una sèrie de subconjunts, A_1, A_2, A_3, ... A_n, d'A, es diu que els subconjunts formen una partició d'A si es compleixen aquestes dues condicions:

No hi ha cap element d'A que no estigui en algun Ai
Qualsevol parella de subconjunts és disjunta (paràgraf 1.12)

Condicions que també es poden expressar així:

$$1.\quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$$
$$2.\quad A_i \cap A_j = \Phi \qquad \forall\, i \neq j$$

Aquestes dues propietats ens diuen que entre tots els subconjunts A_i 'cobreixen' totalment al conjunt A, i que no hi ha cap regió d'A 'coberta' per dos A_i a la vegada. Un enrajolat perfecte d'una habitació dóna un exemple de partició