Capítol 2, Relacions

2.1 Parell ordenat

Si tenim dos elements a i b, podem construir un nou objecte format per aquests dos elements que l'anomenarem **parell ordenat** i l'escriurem com

(a,b)

de manera que si tenim dos d'aquests objectes formats de la forma esmentada, per exemple, (a,b) i (c,d), aquests objectes seran iguals solament en el cas que

a=c i que c=d

D'aquí es desprèn que (a,b) no és el mateix que (b,a), i resulta que és important l'ordre en que estan escrits cada element, d'aquí el seu nom de parell ordenat.

No s'ha de confondre un parell ordenat (a,b) amb el conjunt format per aquests dos elements {a,b}, ja que en aquest cas sí que {a,b} = {b,a}.

A l'element a del parell ordenat (a,b) s'anomena **primer element** i a l'element b s'anomena **segon element**. En algunes circumstàncies es diuen **primera coordenada** i **segona coordenada** respectivament.

En moltes ocasions la formació de parells ordenats s'aconsegueix a partir d'un primer parell ordenat de dos conjunts: (A,B). Els parells ordenats que es desprenen en aquest cas, estaran formats per un primer element d'A i un segon element de B, amb aquest ordre.

Per exemple si el primer conjunt és A= $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ i el segon és B={1,2,3}, tindrem que (α, 1), (β, 2) i (δ, 3) són parells ordenats despresos de (A,B).

Una ampliació del concepte de parell ordenat és la de **terna ordenada** que és el mateix que s'ha dit per les parelles, però en tres elements, s'anoten

(a,b,c)

També és important l'ordre en que s'escriuen els elements; (a,b,c) no és igual a (a, c, b). De la mateixa forma podem formar **quaternes**, ..., **n-ternes ordenades**.

2.2 Producte cartesià

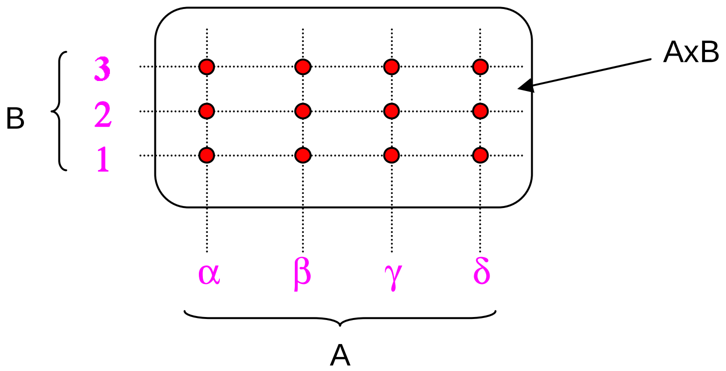
Donat un parell ordenat de conjunts (A,B) s'anomena **producte cartesià** d'A per B al *conjunt format per tots els possibles parells ordenats que es desprenen de (A,B).* Aquest conjunt s'escriu AxB.

Si A i B són els conjunts definits en el paràgraf anterior tindrem que:
AxB = $\{(\alpha,1), (\alpha, 2), (\alpha, 3), (\beta,1), (\beta, 2), (\beta, 3), (\gamma,1), (\gamma, 2), (\gamma, 3), (\delta,1), (\delta, 2), (\delta, 3)\}$

Com que cada element del primer conjunt s'ha de 'combinar' amb tots els elements del segon conjunt, en el cas de que els conjunts A i B tinguin un nombre finit d'elements, i considerant el símbol # com a 'nombre d'elements del conjunt', tindrem

$$\#(AxB) = \#A \cdot \#B$$

Moltes vegades es representa el producte cartesià com les interseccions d'un tramat de rectes tal es veu a continuació.



Cada un dels petits cercles del gràfic representa un parell ordenat, el conjunt de tots els cercles representa el producte cartesià. Com veieu en el gràfic, es presenten els parells ordenats, com els punts en coordenades cartesianes. D'aquí ve el nom de producte cartesià.

En la representació gràfica d'un producte cartesià, es pot considerar el primer conjunt com un eix horitzontal on els seus elements estan posat d'esquerra a dreta si hi ha una ordenació. I el segon conjunt es pot considerar com l'eix vertical en ordre ascendent si es que estan ordenats

Un exemple important de producte cartesià és el **R**x**R**, on **R** representa al conjunt dels nombres reals. Cada element de **R**x**R** és un parell ordenat de reals, o sigui les coordenades d'un punt del pla, i **R**x**R** està compost per tots el possibles punts (parells ordenats) d'un pla. **R**x**R** és la plasmació algebraica del mateix pla.
Si disposem d'una terna de conjunts es podrà desprendre ternes ordenades: Si (A, B, C) és una terna de conjunts, les ternes que es desprenen estaran formades així:

$$\{ (a, b, c) \mid a \in A, \quad b \in B, \quad c \in C \}$$

El conjunt de totes les possibles ternes d'aquests conjunt s'anota com

AxBxC

I es diu **producte cartesià de tres conjunts**.

De la mateixa forma es defineix el producte cartesià de quatre conjunts, de cinc, etc.

Si els conjunts d'un producte cartesià són iguals, al seus productes es solen escriure d'una forma abreujada, amb exponents, d'aquesta forma:

$$\mathbf{Z}\text{x}\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^2$$
$$\mathbf{R}\text{x}\mathbf{R}\text{x}\mathbf{R} = \mathbf{R}^3$$
$$\ldots$$

Amb aquesta notació tenim que $\mathbf{R}^2$ és el pla geomètric i que $\mathbf{R}^3$ és l'espai de tres dimensions, procés que es pot generalitza a $\mathbf{R}^n$.

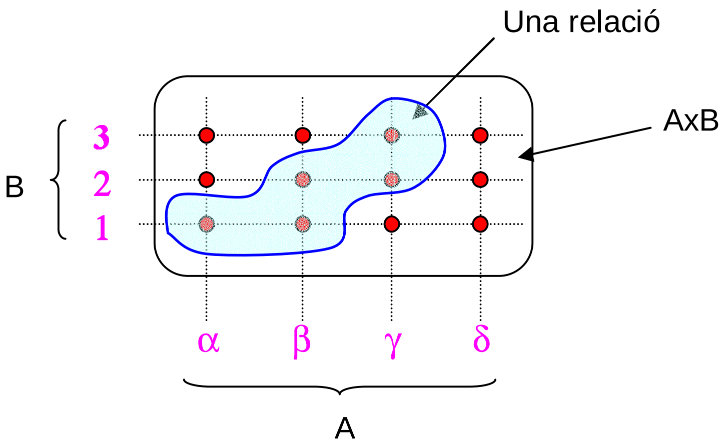
2.3 Relacions

Si es tractés d'una relació d'amistat entre les persones d'un poble i les d'una altre, podríem formar parelles de persones, una d'un poble i una altre de l'altre, de forma que existeixi amistat entre elles. Segurament no és cert que totes les possibles parelles formades per una persona de cada poble tenen una relació d'amistat, solament algunes d'aquestes parelles tenen aquesta relació. Així pot ser que Maria i Andreu tinguin una relació d'amistat, en canvi, Joan i Amàlia no la tenen.

Una relació és un vincle que el tenen alguns parells ordenats. Aquest vincle que es complirà per algun subconjunt del conjunt de totes les parelles (producte cartesià).

Generalitzant el concepte explicat, podem dir que una **relació** entre els conjunts ordenats A i B *és qualsevol subconjunt del producte cartesià AxB.*

Si A i B són els conjunts definits en el paràgraf 2.1, una relació entre aquests conjunts podria ser la que està representada en el gràfic



Com que la parella (α, 1) pertany a la relació es diu que α **està relacionat** amb 1, però α no està relacionat amb 2 ni amb 3. L'element β està relacionat amb 1 i amb 2, però no ho està amb 3. Es dóna la circumstància que δ no està relacionat amb cap element.

Una relació es pot indicar per una lletra, tal com es fa amb tots el conjunts. Sí R és una relació entre A i B es pot escriure que

$$R \subset AxB$$

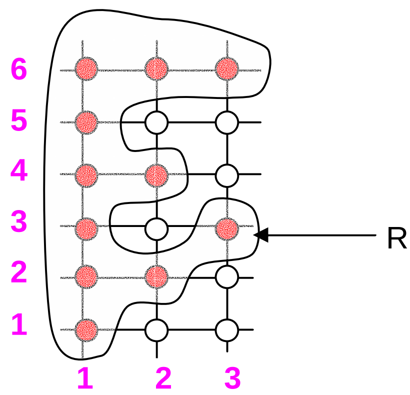
En aquest cas, per indicar que α està relacionat amb 1 es pot fer simplificadament posant el nom de la relació entre mig dels dos elements:

$$\alpha R 1$$

Per indicar que un element no està relacionat amb un altre, com per exemple a no està relacionat amb el 2, es pot fer així:

$$a \not R 2$$

Una relació també es pot indicar explicitant les condicions que han de complir les parelles per tal de que siguin de la relació. Per exemple, si A = {1, 2, 3} i B= {1, 2, 3, 4, 5, 6}, una relació R podria ser "la que relaciona els elements d'A amb els seus múltiples de B", que representada gràficament dóna:



2.4 Relacions binàries

Una relació entre dos conjunts iguals es diu **binària**

O sigui, en una relació binària els dos conjunts són el mateix conjunt.

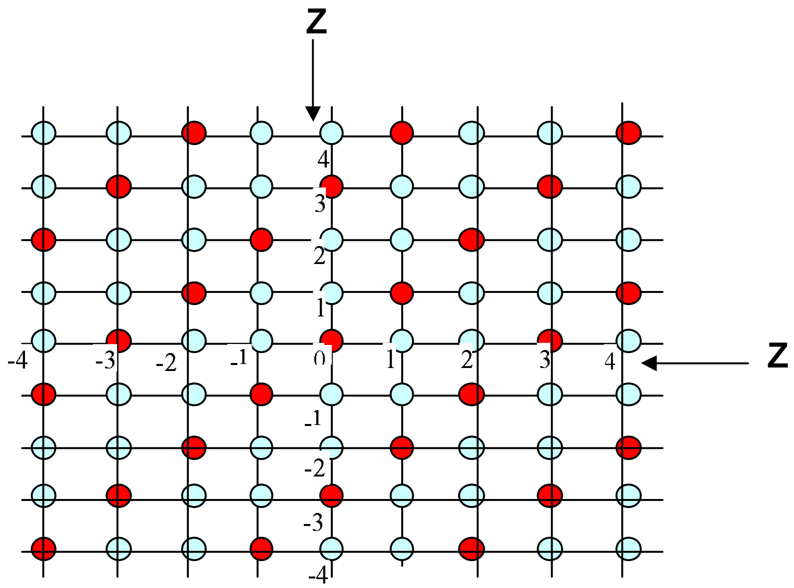
Per exemple, considerem com a primer i segon conjunt els nombres enters **Z**, i definim la relació ~ següent "Un nombre està relacionat amb un altre si la seva diferència és múltiple de 3".

Amb aquesta relació el zero està relacionat amb el 3, el 6, etc. L'1 està relacionat amb el 4, el 7, etc, i també amb el -2, -5, etc. Relacions que es poden indicar com:

$$3 \sim 6, \quad 1 \sim 4, \quad 1 \sim 7, \quad -2 \sim -5, \text{ etc.}$$

En ser Z un conjunt infinit no es pot representar totalment la relació anterior, però sí que es pot fer d'una part, tal com es veu en el gràfic següent.

Cada puntet del gràfic representa un parell ordenat del producte **Z**x**Z**, els puntets foscos representen els de la relació. Les coordenades de cada un dels puntets foscos són parells relacionats. Els altres puntets representen parells de fora de la relació.



2.5 Grafo d'una relació binària

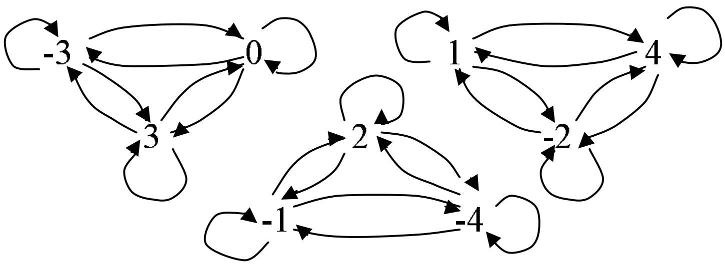
Es tracta de fer una representació gràfica de les relacions binàries. Com que en les relacions binàries els dos conjunts coincideixen només en representarem un, no els repetirem. Es col·locaran els elements del conjunt de forma arbitrària i s'uniran entre ells per una fletxa indicant que aquell parell és de la relació (que el parell està relacionat)

Suposem el conjunt {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4} i en ell hi definim la relació "dos nombres estan relacionats si dividint (divisió entera) cada un per 3 dóna el mateix residu".

Recordeu com es fa una divisió entera en el cas que el dividend sigui negatiu:

-4 | 3
6   -2
2

El grafo d'aquesta relació és



La forma de col·locar els elements del conjunt per dibuixar un grafo d'una relació binària, hem dit que és arbitrària, encara que variant aquesta col·locació es poden formar grafos més fàcils d'interpretar, fins i tot més estètics.

2.6 Relació binària simètrica

Una relació binària R definida en el conjunt A (s'ha d'entendre AxA) es diu que és **simètrica** si es compleix:

$$a\,R\,b \;\Rightarrow\; b\,R\,a$$

que es pot traduir com: *si un element està relacionat amb un altre, també aquest altre ha d'estar relacionat amb el primer.*

L'exemple del paràgraf anterior de la relació $\approx$ és simètrica. En canvi, l'exemple del paràgraf 2.1 de la relació R que relacionava un valor amb el seu múltiples no és simètrica. La demostració d'ambdues propietats es deixa com exercici.

Si els punts d'una relació binària en un gràfic cartesià són simètrics respecte la bisectriu dels dos eixos (els dos conjunts) aquesta relació és simètrica. Vegeu el gràfic del paràgraf anterior.

En un grafo d'una relació binària, sempre que hi hagi una fletxa d'anada hi ha d'haver una fletxa de tornada per tal de que la relació sigui simètrica.

2.7 Relació binària antisimètrica

Una relació binària R definida en el conjunt A (s'ha d'entendre AxA) es diu que és **antisimètrica** si es compleix:

$$aRb \quad \Rightarrow \quad bRa \qquad \forall\ a \neq b$$

Per tal de que una relació binària sigui antisimètrica s'ha de complir que *si un element està relacionat amb un altre, aleshores aquest altre no pot està relacionat amb el primer*.

L'exemple de relació donat en el paràgraf 2.1 (relacionar-se amb els múltiples) és una relació antisimètrica. En canvi l'exemple del paràgraf 2.2 (si la seva diferència és múltiple de tres) no és antisimètrica.

Davant d'un gràfic cartesià d'una relació es pot veure que és antisimètrica, si per cada punt de la relació, el seu simètric respecte de la bisectriu no és de la relació.

En un grafo es pot veure que una relació és antisimètrica si sempre que hi hagi una fletxa (anada) no hi hagi la fletxa de tornada

2.8 Relació binària reflexiva

Una relació binària R definida en el conjunt A es diu que és **reflexiva** si es compleix:

$$a\,R\,a \qquad \forall\, a \in A$$

El que es pot traduir com: *Per qualsevol element d'A aquest ha d'estar relacionat amb sí mateix.*

Si A és el conjunt de tots els subconjunts d'A, es pot definir una relació en A de la següent forma: "Un conjunt està relacionat amb un altre sí el primer és subconjunt del segon". Com que tot conjunt és subconjunt de sí mateix es pot dir que aquesta relació és reflexiva.

Una relació reflexiva es pot veure observant el gràfic cartesià perquè tots els punt de la bisectriu han d'ésser de la relació.

Per tal de que un grafo representi una relació reflexiva tots els elements han de tenir un 'bucle' a ells mateixos.

2.9 Relació binària antireflexiva

Una relació binària R definida en el conjunt A es diu que és **antireflexiva** si es compleix:

$$a \not R\, a \quad \forall\, a \in A$$

O sigui que no hi pot haver cap element d'A que estigui relacionat amb sí mateix.

Per exemple, si definim en els nombre naturals la relació "un nombre es relaciona amb un altre si el primer és més petit que el segon", es tracta d'una relació antireflexiva ja que no hi ha cap nombre que sigui més petit que ell mateix.

Una relació antireflexiva es pot veure observant el gràfic cartesià perquè tots els punt de la bisectriu no són de la relació.

Per tal de que un grafo representi una relació antireflexiva no hi pot haver cap 'bucle' d'un element a ell mateix.

2.10 Relació binària transitiva

Una relació binària R definida en el conjunt A es diu que és **transitiva** si es compleix:

$$a\,R\,b \;\text{ i }\; b\,R\,c \;\Rightarrow\; a\,R\,c$$

que es pot interpretar com: *si un element esta relacionat amb un segon element i aquest segon element està relacionat amb un tercer ha de passar que el primer element també ha d'estar relacionat amb el tercer.*

Siguin quins siguin els conjunts on estiguin definides, les relacions d'igualtat són relacions transitives, també ho és la semblança entre figures, la propietat de ser múltiple o de ser submúltiple, etc.

És difícil veure que una relació és transitiva si es mira el gràfic cartesià però és molt fàcil veure-ho en un grafo: si hi ha dues fletxes seguides n'hi ha d'haver una altre que passi del primer al tercer element.

2.11 Relació d'equivalència

Una relació binària és d'**equivalència** si *és reflexiva, simètrica i transitiva.*

Imagineu-se el conjunt format per tots el triangles del pla, la relació de semblança entre aquests triangles compleix les tres propietats esmentades, per això és una relació d'equivalència.

Si n és un natural major que 1 i en els nombres enters es defineix la relació següent "dos enters estaran relacionats si la seva resta és múltiple de n". Fixeu-vos que aquesta relació és una generalització de l'exemple del paràgraf 2.2. Mireu també, que és reflexiva, simètrica i transitiva, o sigui és tracta d'una relació d'equivalència.

Ara considerarem el conjunt format per totes les funcions definides en un interval (a,b) i la relació definida en aquest conjunt: " una funció *f* està relacionada amb una funció *g* si existeix una constant k diferent de zero que *f* = k*g*". És fàcil veure que també és una relació d'equivalència.

I un altre exemple, considerem que **Z*** és el conjunt dels enters sense el nombre zero. Construïm el conjunt **Z**x**Z*** que està format per tots els parell ordenats d'enters que el segon terme no és zero. A **Z**x**Z*** s'hi defineix la relació R següent: "un parell (a,b) està relacionat amb un altre (c,d) si ad=cb". És fàcil comprovar que es tracta d'una relació d'equivalència. Què passaria si la relació s'hagués definit a **Z**x**Z**?

2.12 Classe d'equivalència

Suposem que en un conjunt A està definida una relació ~ d'equivalència. Si x és un element d'A anomenarem **classe d'equivalència** de x, i ho escriurem com x*, a *un subconjunt d'A format per tots els elements que es relacionen amb x*

Tornem al exemple donat en el paràgraf 2.3, recordem el conjunt és A= {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4} i la relació és "dos nombres estan relacionats si al dividir-los per 3 donen el mateix residu". En aquest cas és fàcil veure que:

$$0^* = \{-3, 0, 3\}, \quad 1^* = \{-2, 1, 4\}, \quad 2^* =\{-4, -1, 2\}$$

Totes les altres classes que es poden formar coincidiran amb alguna d'aquestes, per exemple

$$-1^* = \{-4, -1, 2\} = 2^* = -4^*, \qquad 4^* = \{-2, 1, 4\} = 1^* = -2^*, \quad \text{etc.}$$

Fixeu-se que aquestes tres classes que surten són els tres grup 'independents' que s'han format en el seu corresponent grafo.

El grups de totes les classes d'equivalència formen una partició del conjunt A (vegeu el paràgraf 1.15), o sigui compleixen que:

No hi ha cap element que pertanyi a dues classes diferents
No hi ha cap element que no estigui dins d'alguna classe

Demostrem que es compleix la primera condició:

Suposem que hi ha un element a que pertany a dues classe x* i y*, o sigui

$$a \in x^* \text{ i } a \in y^*$$

Pel fet de ser de cada classe tindrem que a ~ x i que a ~ y, i per la propietat simètrica x ~ a i y ~ a. Suposem que z és un element qualsevol de x*, per això z ~ x i com que x ~ a, per la propietat transitiva z ~ a. Però a ~ y, i per la propietat transitiva z ~ y, cosa que ens diu que $z \in y^*$. Hem vist que qualsevol element de x* també ho és de y*. Això ens diu que x* és subconjunt de y*.

De la mateixa forma es demostra que y* és un subconjunt de x*, i per tant han d'ésser iguals x*= y*.

O sigui, si hi un element comú entre dues classe, aquestes han d'ésser les mateixes, i queda demostrada la condició 1.

La demostració de la segona propietat és encara més fàcil ja que tot element pertany com a mínim a la seva classe.

Amb aquestes dues propietats es demostra que les classes d'equivalència formen una partició (paràgraf 1.17) del conjunt on estan definides. O sigui formen una col·lecció de subconjunts de forma que entre tots engloben a tot el conjunt (condició 2) i no n'hi ha cap subconjunt que tingui alguna part comú amb un altre (condició 1).

Pensem ara amb el tercer exemple del paràgraf anterior, a veure si podem veure per quins parells està formada la classe del (0,1).

Sí $(a,b) \in (0,1)^*$ vol dir que
(a,b) està relacionat amb (0,1), o sigui
a.1 = b.0, que és el mateix que
a = 0

Es dedueix que la classe del (0,1) està formada per tots el parells que tenen com a primera component el 0.

I la classe (1,2)? De quins elements està formada?
Si $(a,b) \in (1,2)^*$, vol dir
(a,b) està relacionat amb (1,2), o sigui
2a = b

Que ens diu que la classe del (1,2) està formada per tot els parells que el segon element és el doble que el primer.

En lloc d'escriure aquestes classe de la forma general es sol fer en forma de trencats, així:

$$(0,1)^* = \frac{0}{1} = 0$$
$$(1,2)^* = \frac{1}{2}$$

2.13 Conjunt quocient

Suposem que en A està definida una relació d'equivalència r, naturalment, pel que s'ha dit en el paràgraf anterior en el conjunt A hi ha d'aparèixer una partició formada per totes les classes d'equivalència.

El conjunt que els seus elements són les classes d'equivalència d'A per la relació r es diu **conjunt quocient** i s'indica per

A/r

Tornem a l'exemple del paràgraf 2.5 en que el conjunt A= {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4} i la relació r = "dos nombres estan relacionats si dividint-los per 3 donen el mateix residu". Per tot el que ha estat explicat tindrem

A/r = {0*, 1*, 2*}

Mirant l'exemple donat en els paràgrafs 2.12 i 2.13, en el que es definia la relació d'equivalència ~ = " un parell (a,b) està relacionat amb un altre (c,d) si ad = bc" en el conjunt **Z**x**Z*** es pot comença a entendre que el conjunt quocient és precisament els nombres racionals.

Zx**Z***/~ = **Q**

Si al conjunt de totes les rectes del pla L es defineix la relació d'equivalència p = "una recta està relacionada amb una altre si són paral·leles" resulta que el conjunt quocient L/p són totes les direccions del pla!

En molts llibres de text defineixen entre els 'segments orientats' del pla la relació següent e = "un segment orientat està relacionat amb un altre, si existeix una translació que transforma el primer amb el segon". Aquesta relació compleix totes les propietats d'equivalència. I el seu conjunt quocient està format per tots els vectors del pla.

2.14 El conjunt Zn

Ja s'ha vist anteriorment la relació en els nombres enters ~ = "dos enters estaran relacionats si la seva resta és múltiple de n". Es pot comprovar que aquesta relació divideix els nombres enters en n classes d'equivalència, la del classe del 0, la del 1, ... ,i la del n-1.

Per demostrar l'asseveració anterior, demostrarem primer que entre les classes 0*, 1*, 2*, ... , (n-1)*, no n'hi cap de repetida, o sigui no hi ha cap parella, d'aquestes classes, que coincideixin. Si hi hagués dues classes repetides els seus nombres haurien d'estar relacionats, o sigui que restant-los hauria de donar múltiple de n, l'única possibilitat és que la resta doni 0 (la màxima diferència és n-1), i això no és possible ja que tots el nombres són diferents. Podem afirmar doncs que totes les n classes són diferents.

Abans de comprovar que no hi ha més classes que les n explicitades, vegem que per un nombre m qualsevol tots els membres de les successions:

$$m, m-n, m-2n, m-3n, ...$$
$$m, m+n, m+2n, m+3n, ...$$

estan relacionats per ~ (tots són de la classes del m), ja que la diferència entre qualsevol parella d'ells és un múltiple d'n.

La distància entre cada terme de les successions anteriors és n, per això no hi pot haver un interval de Z de n , o de més , elements que no tingui un element d'alguna de les successions anteriors. En particular l'interval 0, 1, 2, 3, ... , n-1, ha de tenir, a la força un element d'alguna de les succions, o sigui ha de tenir algun element que està relacionat amb m (que és qualsevol enter). O sigui, la classe m és una de les classes 0*, 1*, 2*, 3*, ... , (n-1)*. O sigui, no es pot trobar cap més classe diferent que les esmentades.

Per tot el que s'ha vist, es pot dir que

$$\mathbf{Z}/\sim\ = \{0^*, 1^*, 2^*, 3^*, ... , (n-1)^*\}$$

Moltes vegades a aquest conjunt s'indica com $\mathbf{Z}_n$. Molt sovint a les classes s'indiquen, per simplificar, simplement amb el nombre, sense indicar que són classes, així:

$$\mathbf{Z}_n = \{0, 1, 2, 3, ... ,n-1\}$$

2.15 Relació d'ordre

Si una relació binària és antisimètrica i transitiva es diu que és una **relació d'ordre**.

Indiquem per P(A) al conjunt de tots els subconjunts d'A. Definim en P(A) la relació següent, r = 'X està relacionat amb Y si X Y". $\subset$

Es tracta d'una relació antisimètrica ja que si $X \subset Y$ i $Y \subset X$, es que X=Y, tal com s'ha vist en el paràgraf 1.11.

També és una relació transitiva ja que si $X \subset Y$ i $Y \subset Z$, passa que $X \subset Z$, ja que tot element de X és de Y, i per ser de Y és de Z.

En el nombres natural positius N^+ es defineix la relació r = "n està relacionat amb m si m és múltiple d'n". És fàcil comprovar que és una relació antisimètrica i transitiva. O sigui és tracte d'una relació d'ordre.

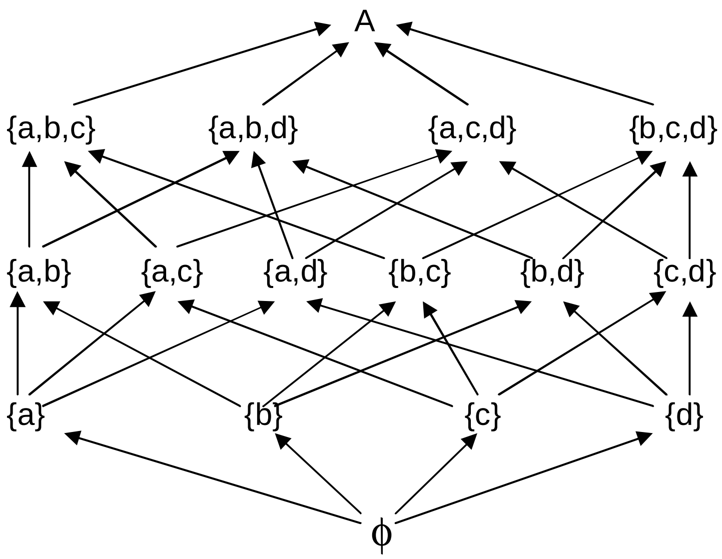
Les relacions de "major que", "menor que", "major o igual que" i "menor o igual que" definides en el enters, racionals o reals també són relacions d'ordre.

2.16 Grafo d'una relació d'ordre

Les relacions d'ordre són relacions binàries, per això, els grafos es poden fer de la mateixa forma que s'ha explicat en el paràgraf 2.5. Tot i així, és una costum presentar el grafos de les relacions d'ordre més simplificats que els binaris en general.

La simplificació consisteix en treure algunes fletxes, amb el criteri que es dona a continuació: si hi ha una fletxa de x a y, i una altre de y a z, segur que n'hi haurà una altre de x a z, doncs bé, aquesta última no cal dibuixar-la, ja es dóna per suposada.

Per exemple, si P(A) fos el conjunt explicat en el paràgraf anterior i el conjunt A fos A={a,b,c,d}, passaria que P(A) = { Φ, {a}, {b}, {c}, {d}, {a,b}, {a,c},{a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}, {a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,d}, {b,c,d}, A} i la relació d'ordre "ser subconjunt" quedaria:



2.17 Relació d'ordre total

Una relació # d'ordre definida en un conjunt A és diu d'**ordre total** si

$$a, b \in A \wedge a \neq b \Rightarrow a \# b \vee b \# a$$

O sigui, que *per qualsevol parell d'elements diferents, a i b d'A, ha de passar que a està relacionat amb b, o bé, que b està relacionat amb a.*

La relació de subconjunt no és una relació d'ordre total, ja que hi ha moltes parelles d'element, per exemple {a} i {c,d} que no estan relacionades, ni amb un sentit ni amb l'altre.

Pel mateix motiu tampoc és total la relació de submúltiple on les parelles de nombre primers entre sí, no estan relacionades de cap forma.

Sí que són ordres totals les relacions "menor que", "major que", etc., expressades en el paràgraf 2.14.

Ara penseu, com quedaria el grafo d'una relació d'ordre total? Podeu veure per què es diu total?