Capítol 3, Aplicacions i operacions

3.1 Aplicacions

Una relació R definida en Ax B es diu **aplicació** *si cada element d' A (primer conjunt) es relaciona amb un, i solament un, element de B (segon conjunt).*

Una aplicació és doncs, una relació que compleixi aquestes dues propietats:

$$1. \quad \forall a \in A \quad \exists b \in B \mid aRb$$

$$2. \quad aRb \wedge aRc \Rightarrow b = c$$

La primera condició diu que tot element de A es relaciona amb algun de B. I la segona condició diu que solament es relaciona amb un (si es relacionés amb dos aquests hauran d'ésser iguals).

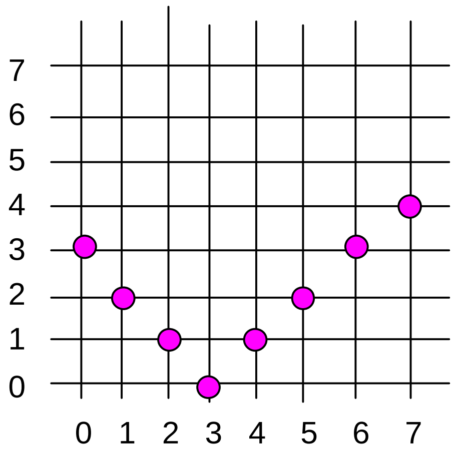
L'exemple de relació posat en el paràgraf 2.3 no és una aplicació ja que no compleix cap de les dues condicions. Hi ha un element, el δ, que no té ningú a qui relacionar-se, i els elements β i γ es relacionen en dos del conjunt B, en lloc d'un, com diu la propietat 2.

Si a **N** x **N** es defineix aquesta relació r = "un natural *n* del primer conjunt es relaciona amb el resultat d'aquesta operació |*n* - 3|". Tindrem:

Que el 0	es relaciona amb el	3
l'1	"	2
el 2	"	1
el 3	"	0
el 4	"	1
el 5	"	2
el 6	"	3

i així successivament. Per a cada element del primer conjunt es pot fer el càlcul |*n* - 3| (primera condició) i aquest càlcul solament dóna un resultat (segona condició), per això es tracta d'una aplicació.

Aquesta aplicació representada gràficament queda



La frase 'a es relaciona amb b' usada en les relacions binàries no es sol fer servir quan es tracte d'aplicacions, en lloc d'ella es pot dir:

a **té per imatge a** b
a **s'aplica a** b
b **és la imatge d'** a
a **és la antiimatge de** b

En lloc d'escriure *a* R *b*, que indica el mateix que les frases anteriors, quan es tracte d'aplicacions, es sol posar

$$R(a) = b$$

Una forma molt habitual d'indicar a una aplicació és la següent:

$$\begin{array}{rcl} R: A & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & R(a) \end{array}$$

en la que s'hi menciona el nom de l'aplicació R, el primer conjunt A, el segon conjunt B, un element indeterminat del primer conjunt *a*, i la imatge d'aquest últim element R(*a*), amb el queda definida l'aplicació, es diu que l'aplicació R està definida de A a B.

Per exemple, l'aplicació anterior, definida de **N** a **N**, es pot indicar:

$$\begin{array}{rcl} r:\mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & |n-3| \end{array}$$

Si els dos conjunts en els que està definida una aplicació són conjunts numèrics (naturals, racionals, reals, etc. o part d'ells) l'aplicació s'anomena **funció**.

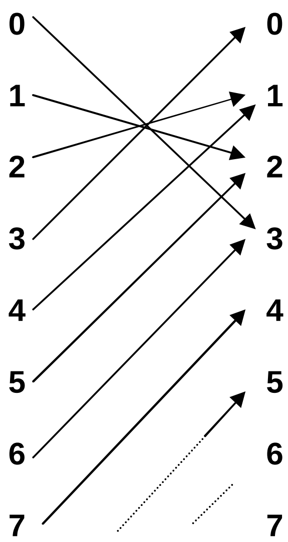
Les lletres més usuals per indicar a funcions són: *f, g, h*, etc.

3.2 Grafo d'una aplicació

En les relacions binàries els dos conjunts bàsics sobre les que estan definides han de ser iguals, això no passa en les aplicacions, en les que els conjunts poden coincidir o no. Per això no és possible representar les aplicacions en forma de grafo tal com ho hem fet per les relacions binàries.

Les representacions gràfiques de les aplicacions es faran sobre el producte cartesià, o bé de la forma que s'explica a continuació.

Es dibuixa els element del primer conjunt a l'esquerra i els del segon conjunt a la dreta. S'uneix cada element de l'esquerra, per mitjà duna fletxa, amb el corresponen element de la dreta que hi està relacionat. L'aplicació donada en el paràgraf anterior queda:



Mireu que a tots el nombres del primer conjunt el surt una, i només una, fletxa que són les dues condicions que han de complir les aplicacions.

3.3 Aplicacions exhaustives

Es diu que una aplicació és **exhaustiva** *si tots el elements del segon conjunt té com a mínim un element del primer conjunt que està relacionat amb ell.* També es podria dir d'aquesta forma: *si tots els elements del segon conjunt tenen antiimatges.*

Si A és el primer conjunt, B el segon, i *f* és una aplicació entre ells, es pot dir que *f* és exhaustiva sí:

$$\forall \ y \in B \quad \exists \ x \in A \mid f(x) = y$$

Deixem com exercici la interpretació d'aquest formulisme per poder veure que coincideix amb la definició expressada en començar el paràgraf.

Sobre el grafo d'una aplicació es pot veure que és exhautiva si a cada element del conjunt de la dreta els hi arriba alguna fletxa.

L'exemple que portem del paràgraf 3.1: r(*n*) = |*n* - 3|, és el d'una aplicació exhaustiva. L'aplicació definida entre **Z** i **Q** (enters i racionals) de forma que cada enter s'aplica a ell mateix no és una exhaustiva ja que hi ha molts racional que no són enters i no tindran antiimatge.

A vegades a les aplicacions exhautives també es diuen **suprajectives**.

3.4 Aplicacions injectives

Es diu que una aplicació és **injectiva** *si els elements del segon conjunt tenen com a màxim un element del primer conjunt que s'aplica a ell*. També es podria dir així: *si tots els elements del segon conjunt tenen com a màxim una antiimatge*.

Si A és el primer conjunt, B el segon, i *f* és una aplicació entre ells, es pot dir que *f* és injectiva sí:

$$f(x) = y \ \wedge \ f(z) = y \ \Rightarrow \ x = z$$

Que es pot interpretar com si l'element *y*, que ha d'ésser del segon conjunt, té dues antiimatges, la *x* i la *z*, aquestes han d'ésser iguals, o sigui que *y* sols pot tenir una antiimatge.

En el grafo es pot veure que l'aplicació és injectiva si als elements del segon conjunt els hi arriba una o cap fletxa.

L'exemple que portem comentant: r(*n*) = |*n* - 3|, no és injectiva ja que hi ha elements del segon conjunt, l'1, el 2 i el 3, que tenen dues antiimatges.

L'aplicació definida entre **Z** i **Q** de forma que cada enter s'aplica a ell mateix és una aplicació injectiva, ja que els elements de **Q** tenen una sola antiimatge si són enters i no en tenen cap si no són enters.

3.5 Aplicacions bijectives

Es diu que una aplicació és **bijectiva** *si és a la vegada exhaustiva i injectiva*.

Sobre el grafo es pot veure que una aplicació es bijectiva si a cada element del segon conjunt arriba una i solament una fletxa.

Un exemple d'aplicació bijectiva pot ser la definida en **R**x**R** de forma que a un valor *x* qualsevol li correspon 2*x* - 5. Per demostrar que és bijectiva s'ha de veure primer que és exhaustiva, tal com es fa a continuació i després que és injectiva.

És exhaustiva:
Si y és un element del segon conjunt hem de demostrar que té alguna antiimatge x, o sigui, que

$$2x - 5 = y, \text{ ens diu que}$$
$$x = (y + 5)/2$$

Sempre hi ha una solució per a x, sumar 5 a un valor i dividir-ho per 2, dóna un sol resultat, per això la x sempre existeix i l'aplicació és exhaustiva.

És injectiva:
Suposarem que un element y té dues antiimatges la x i la z, es complirà que

$$2x - 5 = y \quad \text{i} \quad 2z - 5 = y$$
$$2x - 5 = 2z - 5$$
$$2x = 2z$$
$$x = z$$

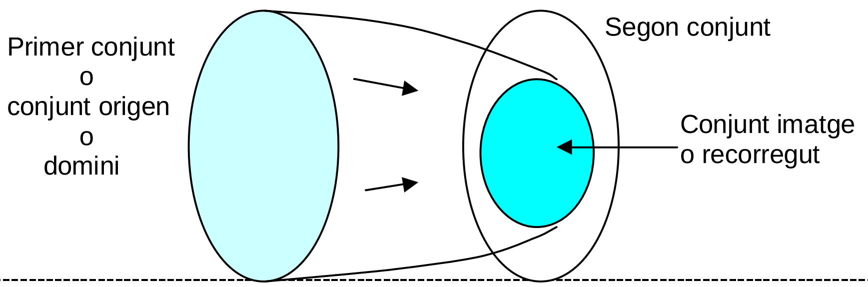
O sigui, no hi pot haver dos elements diferents que s'apliquin a una mateixa imatge, això diu que l'aplicació és injectiva.

3.6 Conjunt imatge i conjunt origen o domini

En una aplicació el primer conjunt també rep el nom de **conjunt origen,** o també el de **domini.**

El **conjunt imatge** *està format per tots el elements del segon conjunt que tenen alguna antiimatge.* A vegades, al conjunt imatge, també es diu **recorregut***.*

El conjunt imatge no sempre coincideix amb el segon conjunt, només coincideixen quan l'aplicació és exhautiva.



3.7 Funció identitat i funció recíproca.

Una aplicació en la que els primer conjunt i el conjunt imatge coincideixen, es diu **identitat** *si aplica cada element amb ell mateix*, o sigui, si:

$$\begin{aligned} f : A &\to A \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

És molt normal expressar per una I a la funció identitat, i si es vol especificar el conjunt on està definida, aquest es posa com a subíndex: I_A.

Suposem que *f*:A -----> B és una aplicació bijectiva, i en ser bijectiva cada element de B té una i solament una antiimatge. Definirem a una altre aplicació f^{-1}:B---->A fent-li correspondre a cada y de B l'antiimatge de y per l'aplicació *f*, que existeix i és única. A la funció f^{-1} s'anomena **recíproca** de *f.*

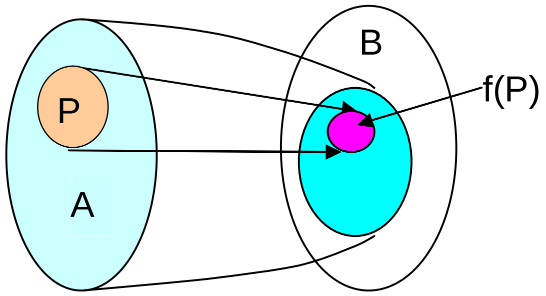
Si *f*:A ----> B és bijectiva, és fàcil comprovar que la composició de les aplicacions *f* i f^{-1} dóna la identitat en el conjunt B. I que la composició de f^{-1} i *f* dóna la identitat en el conjunt A.

$$f^{-1} \text{ o } f = I_B$$
$$f \text{ o } f^{-1} = I_A$$

3.8 Imatge i antiimatge d'un conjunt

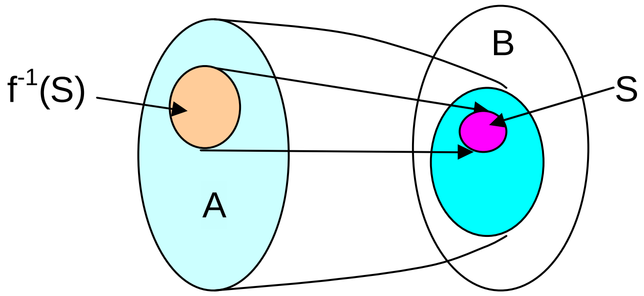
Si tenim una aplicació *f* :A -------> B i P és un subconjunt de A, anomenarem **imatge de P**, i ho escriurem com *f*(P) al *subconjunt de B format pels elements que tenen antiimatges en P.* D'una forma formalitzada es pot escriure:

$$f(P) = \{ y \in B \mid (\exists\ x \in P \mid f(x) = y)\}$$



Si S és un subconjunt del conjunt imatge, anomenarem **antiimatge de S**, i s'escriurà f^{-1}(S), al *subconjunt de A format pels elements que tenen les seves imatges en S,* que es pot formalitzar com:

$$f^{-1}(S) = \{x \in A \mid f(x) \in S\}$$



3.9 Operació interna

Una **operació interna** definida en un conjunt C *és qualsevol aplicació de* C*x*C *a* C*,* així:

$$\begin{aligned} *: C\text{x}C &\longrightarrow C \\ (a,b) &\longmapsto a*b \end{aligned}$$

On * és el nom, o símbol, de l'operació i *a*b* representa la imatge del parell (*a*,*b*).

Hi ha el costum d'anomenar simplificadament **operació** a les operacions internes. A vegades a les operacions internes també es diuen **lleis de composició interna**.

Les operacions és solen indicar per un símbol en lloc d'una lletra, els símbols més usuals són: +, $\cdot$, *, o, $\div$, $\otimes$, $\oplus$, o altres de similars.

En les operacions cada imatge es diu **resultat** de l'operació i es sol escriure posant els dos elements del parell origen separats pel nom de l'operació: *a*b*, que es pot llegir com '*a* **operat** amb *b*'. En casos concrets es substitueix la paraula operat pel nom de l'operació: sumat, restat multiplicat, etc.

Per exemple una operació θ definida el conjunt C = {0, 1, 2, 3} pot estar definida així:

$$x \theta y = \begin{cases} x+y & \text{si } x+y<4 \\ x+y-4 & \text{si } x+y>3 \end{cases}$$

D'aquesta forma tindrem les operacions:

$$0 \theta 1 = 1, \;\; 1 \theta 2 = 3, \;\; 2 \theta 2 = 0, \quad 3 \theta 2 = 1$$

Com que per cada parella de valors obtenim un resultat es tracte d'una operació.

Si C és el conjunt de totes les funcions contínues en (a,b) es pot definir l'operació

$$\begin{aligned} +: C x\, C &\text{----> } C \\ (f,g) &\text{ |------> } f+g \end{aligned}$$

entenen com a $f+g$ la suma normal de funcions, que recordem-ho, és

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

Doncs bé, com que la suma de dues funcions contínues dóna una altre funció contínua, l'aplicació anterior és, efectivament, una operació.

Recordem que $\mathcal{P}$(A) és el conjunt format per tots el subconjunts de A. La intersecció i la reunió de conjunts, veure paràgrafs 1.10 i 1.11, són operacions definides en el conjunt $\mathcal{P}$ (A), ja que es tracten d'aplicacions d'aquest tipus:

$$\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \text{------>} \mathcal{P}(A)$$

Si Vés el conjunt de tots els vectors del pla la suma de vector és una operació definida en V: donats dos vectors sempre s'obté un altre com a resultat de la suma.

3.10 Taules d'operacions

És freqüent presentar les operacions definides en conjunts finits, i no gaire grans, en forma de taula. Sembla que posant un exemple d'una d'elles quedarà clar com s'ha de fer. La taula de l'operació θ definida en el paràgraf 3.6 queda d'aquesta forma:

θ	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Fixeu-vos que en la cel·la superior esquerra si col·loca el símbol de l'operació. En la primera fila i en la primera columna s'hi posa els elements del conjunt. A l'interior de la taula si posarà els resultats de l'operació entre els valors que li correspon per l'operació.

3.11 Operacions en Z_n

S'ha estudiat els conjunts $\mathbf{Z}_n$ en el paràgraf 2.14, ara definirem dues operacions que els direm suma, +, i producte. ·.

Si a^* i b^* són dues classes de $\mathbf{Z}_n$ definim com a suma $a^* + b^*$ a la classe $(a+b)^*$.

$$a^* + b^* = (a+b)^*$$

Naturalment aquesta última suma ($a+b$) és la suma normal d'enters. Es tracta, efectivament d'una operació, ja que aquesta regla es pot aplicar a qualsevol parella de classes.

Per exemple si estem a $\mathbf{Z}_4$, alguns casos de suma poden ser:

Classe 1 + classe 2 = classe (1+2) = classe 3
Classe 1 + classe 3 = classe (1+3) = classe 4 = classe 0
Classe 2 + classe 3 = classe (2+3) = classe 5 = classe 1

Fixeu-vos que aquestes operacions coincideixen amb l'operació $\ominus$ donat en els paràgrafs 3.7 i 3.8

De la mateixa forma es defineix un producte, així:

$$a^* \cdot b^* = (a \cdot b)^*$$

Per exemple, el producte en $\mathbf{Z}_3$ en forma de taula és:

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

3.12 Operació commutativa

Una operació & definida en un conjunt C es diu que és commutativa si:

$$a \;\&\; b = b \;\&\; a \qquad \forall\, a, b \in C$$

O sigui, l'operació serà **commutativa** *si en operar un element amb un altre, el resultat és independentment de l'ordre dels dos elements, siguin quins siguin aquests.*

La suma entre funcions contínues en (a,b) és òbviament commutativa, ja que

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x)$$

el que ens diu que $f+g = g+f$.

La suma definida per la taula anterior és commutativa, solament s'ha de veure que aquesta taula és simètrica respecte de la diagonal de va de dalt a l'esquerra a baix a la dreta.

La suma i el producte definit en els enters, racionals, reals i complexos són totes commutaves.

La resta o la divisió no són mai commutatives. Recordeu també que la composició de funcions tampoc és commutativa.

Tant la reunió com la intersecció de conjunts són commutatives.

La suma de vectors és una altre operació commutativa.

La suma i el producte definits en $\mathbf{Z}_n$ són commutatives ja que

$$a^* + b^* = (a+b)^* = (b+a)^* = b^* + a^*$$
$$a^* \cdot b^* = (a \cdot b)^* = (b \cdot a)^* = b^* \cdot a^*$$

3.13 Operació associativa

Una operació & definida en un conjunt C es diu que és associativa si

$$(a \,\&\, b) \,\&\, c = a \,\&\, (b \,\&\, c) \quad \forall\ a, b, c \in C$$

O sigui, una operació serà associativa *si en efectuar dues operacions, una sobre el resultat de l'altre, tant dóna que s'operin els dos primers element i el seu resultat s'operi amb el tercer, com que si el primer element s'opera amb el resultat d'operar el segon amb el tercer.*

Ja heu estudiat que la suma de funcions és associativa i també ho és la composició de funcions, repassa-ho.

Si d'una operació solament es coneix la seva taula resulta difícil comprovar si és associativa. Per comprovar-ho s'hauria d'examinar totes les possibilitats, procés que, a vegades, pot ser molt llarg.

Si d'una operació es coneix la forma d'obtenir el seu resultat pot ser més fàcil la comprovació de l'associativitat. Per exemple, si entre els enter es defineix l'operació $x\$b = 3x + b$, ho comprovarem fent:

$(x\$y)\$z = (3x+y)\$z = 3(3x+y)+z = 9x+3y+z$
$x\$(y\$z) = 3x+(y\$z) = 3x+(3y+z) = 3x+3y+z$

i en donar diferent resulta que tal operació no és associativa.

Tant la reunió com la intersecció de conjunts, paràgraf 1.15, són operacions associatives.

La suma de vectors és també operació associativa.

Tant la suma com el producte definits en **Z**n són associatives:

$a^* + (b^*+c^*) = a^* + (b+c)^* = (a + (b+c))^* =((a+b) + c)^* = (a+b)^* + c^* =(a^*+b^*) + c^*$
$a^* \cdot (b^*\cdot c^*) = a^* \cdot (b\cdot c)^* = (a \cdot (b\cdot c))^* =((a\cdot b) \cdot c)^* = (a\cdot b)^* \cdot c^* =(a^*\cdot b^*) \cdot c^*$

3.14 Tenir element neutre

L'**element neutre** d'una operació $\otimes$ definida en un conjunt C és un element *e* que compleixi aquestes dues condicions:

$$1. \quad e \otimes a = a \quad \forall a \in C$$
$$2. \quad a \otimes e = a \quad \forall a \in C$$

Aquestes condicions ens diuen que si s'opera l'element neutre amb un altre element, o si aquest altre element s'opera amb l'element neutre, el resultat és sempre l'altre element, qualsevol que aquest sigui.

Naturalment, aquestes dues condicions es converteixen en una sola en els casos d'operacions commutatives.

Una operació es diu que compleix amb la propietat de **tenir element neutre** si, evidentment, aquesta operació té element neutre. Noteu que *'element neutre'* és un objecte, mentre que *'tenir element neutre'* és una propietat.

Si l'operació és una multiplicació o semblant a una multiplicació, a l'element neutre se li sol dir **element unitat**.

És fàcil veure que una operació no pot tenir dos elements neutres diferents, ja que si *e* i *e'* fossin dos elements neutres de l'operació &, passaria que

$e\&e' = e'$, ja que e és element neutre
$e\&e' = e$, ja que e' és element neutre

I es dedueix que $e = e'$.

L'element neutre de la suma, tant definida en els enters, com en el racionals, com en els reals, com en el complexos, és el nombre 0 (zero).

En canvi l'element neutre per la multiplicació, en els mateixos conjunts que s'han mencionat, és el nombre 1.

L'element neutre de l'operació o definida a la taula del paràgraf anterior és el 0. Solament cal mirar la taula, segona fila i segona columna, per adonar-se'n.

L'element neutre de la suma de funcions és la funció que *f(x)* = 0, és la que aplica tots els valors *x* del domini al zero.

L'element neutre de la reunió de conjunts és el conjunt buit ϕ. L'element neutre de la intersecció de conjunts és el conjunt universal Ω. Vegeu el paràgraf 1.13

El vector (0,0), o sigui el vector que té l'origen i extrem coincidents, és l'element neutre de la suma de vectors.

L'element neutre de la suma en Z_n és la classe del 0 i l'element unitat és la classe del 1. Com que les dues operacions són commutaves es pot comprovar fent:

$$a^* + 0^* = (a + 0)^* = a^*$$
$$a^* \cdot 1^* = (a \cdot 1)^* = a^*$$

3.15 Element simètric

Si $\otimes$ és una operació en el conjunt C, *e* és l'element neutre, i a és un element de C, direm que *a*' de C **és el simètric** d'*a* si

$$a \otimes a' = e \quad \wedge \quad a' \otimes a = e$$

Si l'operació $\otimes$ fos commutativa les dues condicions de la definició anterior coincideixen.

En les operació associatives un element no pot tenir dos simètric diferents, ja si *a*" i *a*' fossin simètrics d'*a*, passaria

$$a'' = a'' \otimes e = a'' \otimes (a \otimes a') = (a'' \otimes a) \otimes a' = e \otimes a' = a'$$

que els dos simètric serien el mateix element.

Directament de la mateixa definició de simètric es desprèn que si *a*' és el simètric d' *a*, *a* ha d'ésser el simètric de *a*', Si l'operació és una multiplicació o semblant a una multiplicació a l'element simètric se li sol dir **element invers**. És freqüent anomenar **invertible** als elements que tenen invers.

El simètric de qualsevol element per l'operació suma, definida en els enters, etc., es troba canviant de signe al nombre. Si l'operació és el producte l'invers d'un nombre *a*, diferent de zero, es troba, doncs, fent l'invers 1/*a*. Per això es normal indicar als simètrics, segons els casos així:

Simètric de $x = -x$
Invers de $x = x^{-1} = 1/x$

3.16 Tenir elements simètrics

Direm que una operació $\otimes$, definida en un conjunt C, **té la propietat de tenir simètrics** *quan tots els elements de C tenen simètric*.

Per exemple la suma definida en els nombres enters té la propietat de tenir simètrics, ja tots els enters es poden canvia de signe i el simètric del 0 és el propi 0. En canvi el producte en els nombres enters no té aquesta propietat ja que el 0 no té simètric, invers en aquest cas, doncs no hi ha cap nombre que multiplicat per 0 doni 1. l'1 i el -1 són inversos de sí mateixos, els altres enters, diferents de 1 i de -1, no tenen invers.

El l'operació $\ominus$ definida per la taula en el paràgraf 3.7 es pot veure que

El simètric del 0 és el 0
" de l'1 és el 3
" del 2 és el 2
" del 3 és l'1

com que cada element té simètric, l'operació té la propietat de tenir simètrics.

L'element simètric d'una funció *f* per la suma de funcions és una altre funció *f'* que *f'(x)* = -*f(x)*, d'aquesta forma (*f'*+*f*)(*x*)=0, i *f'*+*f* és l'element neutre.

La operació suma definida entre les funcions contínues en (*a,b*) té la propietat de tenir simètrics ja que la funció *f'*, tal com s'ha vist a dalt, existeix sempre i també és contínua.

Ni la intersecció ni la reunió tenen la propietat de tenir simètrics. El lector hauria de demostrar-ho.

La suma de vectors té la propietat de tenir simètrics, doncs, canviant de el signe de les coordenades d'un vector passem al seu simètric, i això ho podem fer a tots els vectors.

La suma en $\mathbf{Z}_n$ té elements simètrics: la classe simètrica de a^* és $(-a)^*$ ja que

$$a^* + (-a)^* = (a - a)^* = 0^*$$

El producte en $\mathbf{Z}_n$ no té la propietat de tenir inversos. La classe 0 no té mai invers, No hi ha cap classe que multiplicada per 0 doni 1. A més hi ha altres valors que no tenen invers.

3.17 Operació distributiva respecte d’una altre

Si tenim dues operacions & i @ definides en un mateix conjunt C, es diu que & és distributiva respecte de @ si es compleix

$$a \,\&\, (b \,@\, c) = (a \,\&\, b) \,@\, (a \,\&\, c) \quad \forall\, a, b, c \in C$$

Per exemple, el producte en els nombres enters és distributiva respecte de la suma ja que qualsevol que siguin els valors a, b i c es compleix

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$

En canvi el producte no és distributiu respecte de la suma, ja que

$$a+(b\cdot c) \neq (a+b)\cdot(a+c)$$

Pel que s'ha vist en el paràgraf 1.13, la reunió es distributiva respecte de la intersecció i la intersecció es distributiva respecte de la reunió.

La multiplicació definida en $\mathbf{Z}$n és distributiva respecte de la suma:

$$a^*\cdot(b^* + c^*) = a^*\cdot(b+c)^* =(a\cdot(b+c))^* = (a\cdot b + a\cdot c)^* = (a\cdot b)^* + (a\cdot c)^* = a^*\cdot b^* + a^*\cdot c^*$$

3.18 Operació externa

Una **operació externa** definida en un conjunt C sobre un altre conjunt K *és qualsevol aplicació de KxC a C,* així:

$$\begin{aligned} {*}:K\times C &\longrightarrow C \\ (k,b) &\longmapsto k*b \end{aligned}$$

On * és el nom, o símbol, de l'operació i $k*b$ representa la imatge del parell (k,b).

A vegades a les operacions externes també es diuen **lleis de composició externa**.

Igual que en les operacions internes, cada imatge *k*b* es diu **resultat** de l'operació.

Fixeu-vos que en les operacions internes solament hi intervenia un sol conjunt, paràgraf 3.9, es tracta d'una aplicació de CxC a C. Mentre que en les operacions externes intervenen dos conjunts, es tracten d'aplicacions de KxC en C. Ara, per trobar el resultat d'una operació, s'ha de 'combinar' dos elements, un de K i un de C, per donar un resultat de C. Es diu que l'operació **està definida** en C **sobre un conjunt** K.

El elements del conjunt extern se'ls solen dir **escalars**.

Podem donar com exemples d'operacions externes a: el producte d'un real per un polinomi, el producte d'un real per una matriu, el producte d'un vector per un escalar, el producte d'un complex per un real, el producte d'un real per una funció.

Proposem al lector que detecti, per cada un dels exemples anteriors, quin és el conjunt on es defineix l'operació i quin és el conjunt extern.