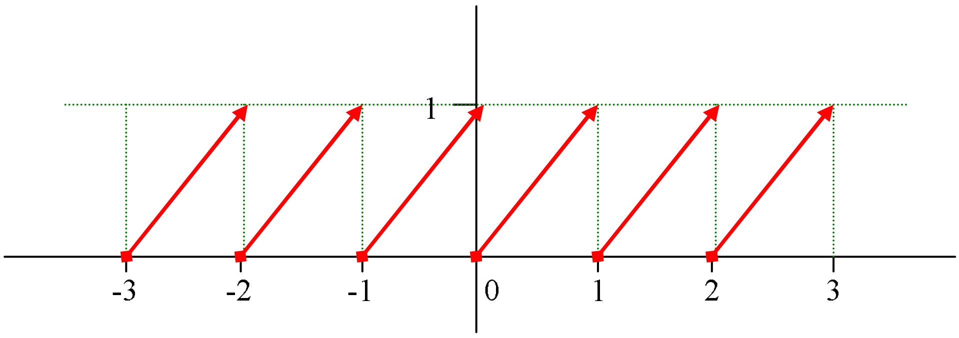
1 LÍMIT D'UNA FUNCIÓ EN UN PUNT I CONTINUÏTAT

1.1- Límit per l'esquerra de la funció D(x) en el punt x = 1

Considerem la funció "part decimal", estudiada en el capítol 2 de Iniciació a les funcions. Recordem que aquesta funció tenia per domini tot **R** i es definia com D(x) = x – E(x), on E(x) és la part entera de x. Així: D(2,25) = 2,25 – 2 = 0,25 i D(2) = 2 – 2 = 0 i D(-2,25) = -2,25 – (-3) = 0,75. La gràfica d'aquesta funció és:



Aquesta funció té uns punts "irregulars", són els valors enters del domini. Mireu la imatge d'1 és 0, però la imatge de 0,999 (que està mol a prop d'1) és 0,999 (molt lluny de 0). O sigui que dos punts que estan molt a prop entre sí tenen imatges que estan molt allunyades. Aquesta idea queda reflectida en els conceptes de límit per l'esquerra i per la dreta d'una funció en un punt i es veu en el "salt" que fa la gràfica en aquests punts.

Ara ens fixarem en la gràfica anterior però a l'entorn del punt x = 1. Mireu la gràfica següent.

Construirem una successió de valors del domini que tingui per límit 1 però amb valors menors que 1 (successió per l'esquerra), per exemple la successió :

$$x_n: \quad 0,\ {}^1\!/_2,\ {}^2\!/_3,\ {}^3\!/_4,\ {}^4\!/_5,\ {}^5\!/_6,\ \cdots,\ {}^{n-1}\!/_n,\ \cdots \quad \to 1$$

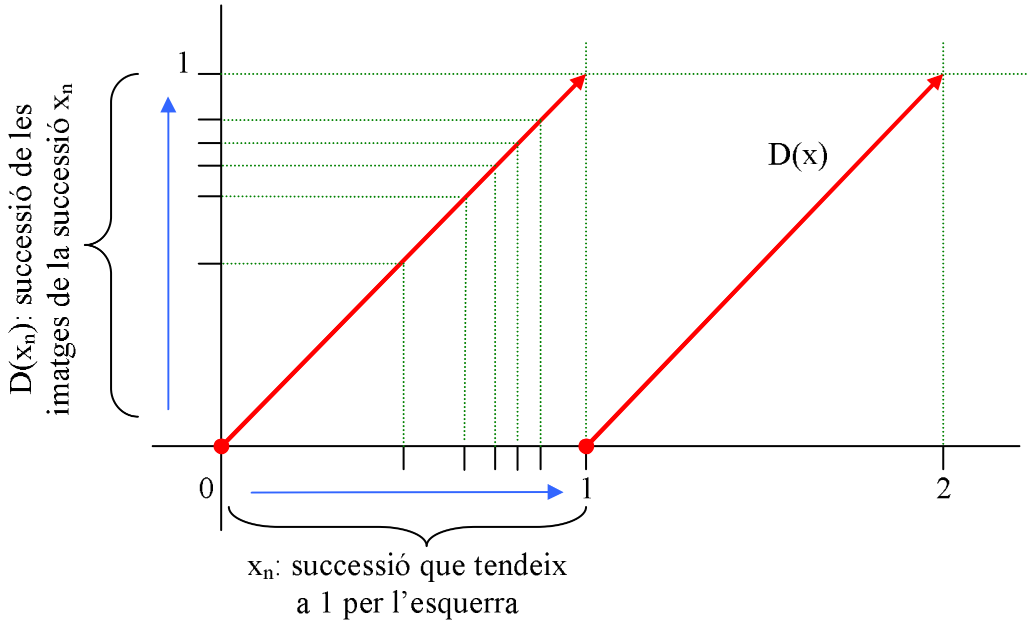
o amb decimals :

$$x_n: \quad 0,\ 0'5,\ 0'66..,\ 0'75,\ 0'8,\ 0'833..,\cdots,\ {}^{n-1}\!/_n,\ \cdots \quad \to 1$$

Les imatges de cada terme d'aquesta successió són exactament els mateixos termes :

$$\mathrm{D}(x_n): \quad 0,\ 0'5,\ 0'66..,\ 0'75,\ 0'8,\ 0'833..,\cdots,\ {}^{n-1}\!/_n,\ \cdots \quad \to 1$$

Departament de Matemàtiques
IES Jaume Balmes



Aquest últim límit s'anomena **límit per l'esquerra de la funció D en el punt 1,** i s'escriu:

$$\lim_{x \to 1^-} \mathrm{D}(x) = 1$$

En general:

> ***Límit per l'esquerra d'una funció f en un punt x = a.***
> *El límit per l'esquerra d'una funció f en un punt x = a és el límit, si existeix, de la successió de les imatges d' una successió de valors del domini que tingui per límit el valor a per l'esquerra (a^-)*

1.2 - Límit per l'esquerra de la funció 1/x en el punt x = 0

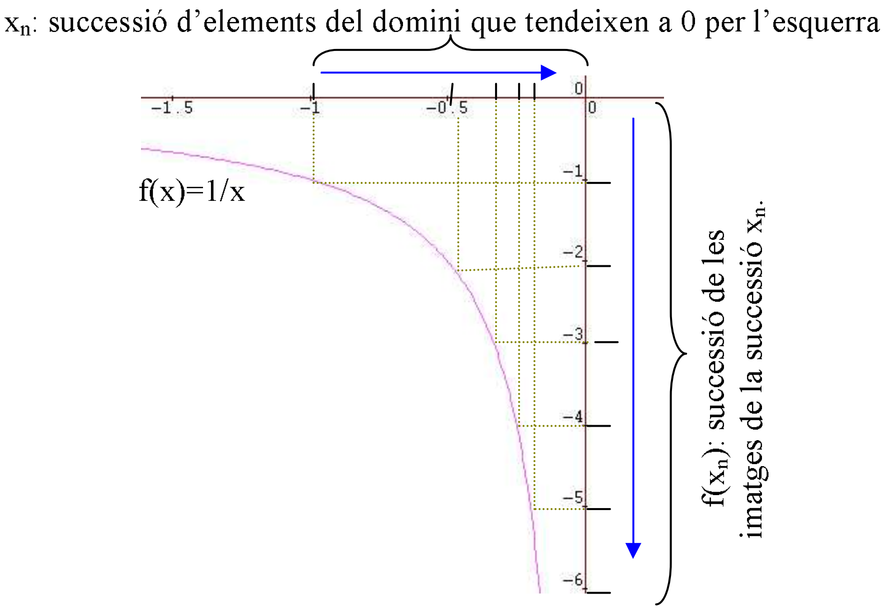
Anem a veure un altre exemple, el de la funció inversa f(x) = 1/x en el punt x = 0.

Per calcular el límit per l'esquerra en el punt zero construirem la successió d'elements del domini que tendeixi a 0 per l'esquerra i la corresponent successió de les imatges. Ho farem en forma de taula, així:

x_n:	-1	-1/2	-1/3	-1/4	...	-1/n	...	$\rightarrow$	0^-
f(x_n):	-1	-2	-3	-4	...	-n	...	$\rightarrow$	$-\infty$

Per això podem escriure: $$\lim_{x \to 0^-} 1/x = -\infty$$

Vegeu la gràfica, les successions, i la idea dels límits en el gràfic següent:

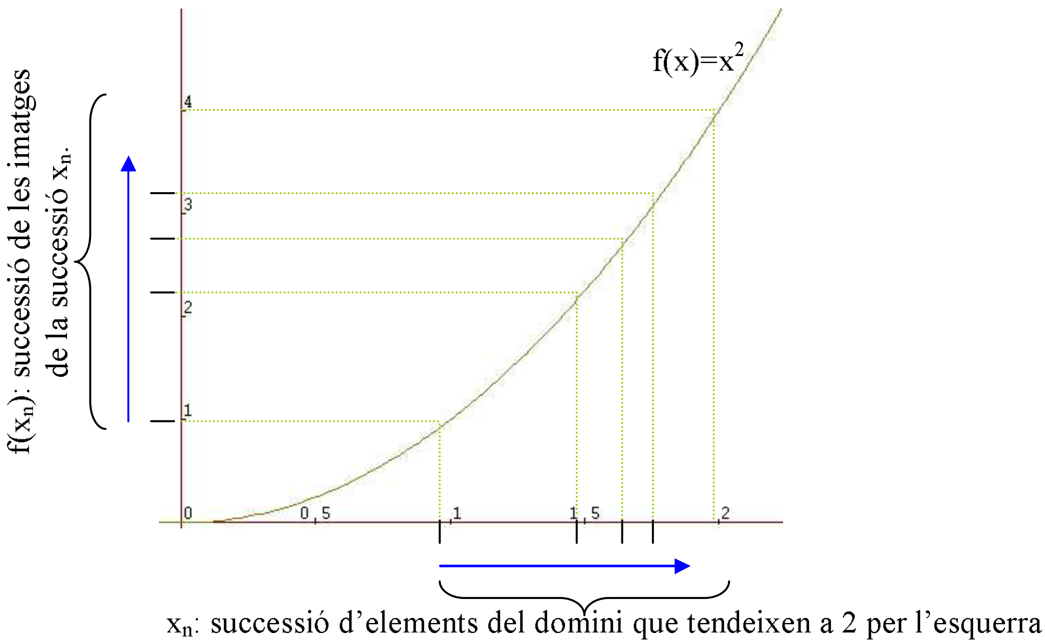


1.3 - Límit per l'esquerra de la funció x^2 en el punt x = 2

Vegem ara una funció més "regular", com la funció $f(x) = x^2$, que l'examinarem en el punt 2. Per això considerem la successió de punts del domini amb límit 2^- i la seva corresponent successió d'imatges escrites en la taula següent:

x_n:	2 - 1	2-1/2	2–1/3	...	2-1/n	...	$\rightarrow$	2^-
$(x_n)^2$:	$(2 – 1)^2$	$(2-1/2)^2$	$(2–1/3)^2$	...	$(2-1/n)^2$	...	$\rightarrow$	4

I tenim que: $\lim\limits_{x \to 2^-} x^2 = 4$



1.4 - Límit per la dreta de la funció D(x) en el punt x = 1

Igual al que s'ha dit en el paràgraf anterior, podem dir:

> ***Límit per la dreta d'una funció f en un punt x = a.***
> *El límit per la dreta d'una funció f en un punt x = a és el límit, si existeix, de la successió de les imatges d' una successió de valors del domini que tingui per límit el valor a per la dreta (a^+).*

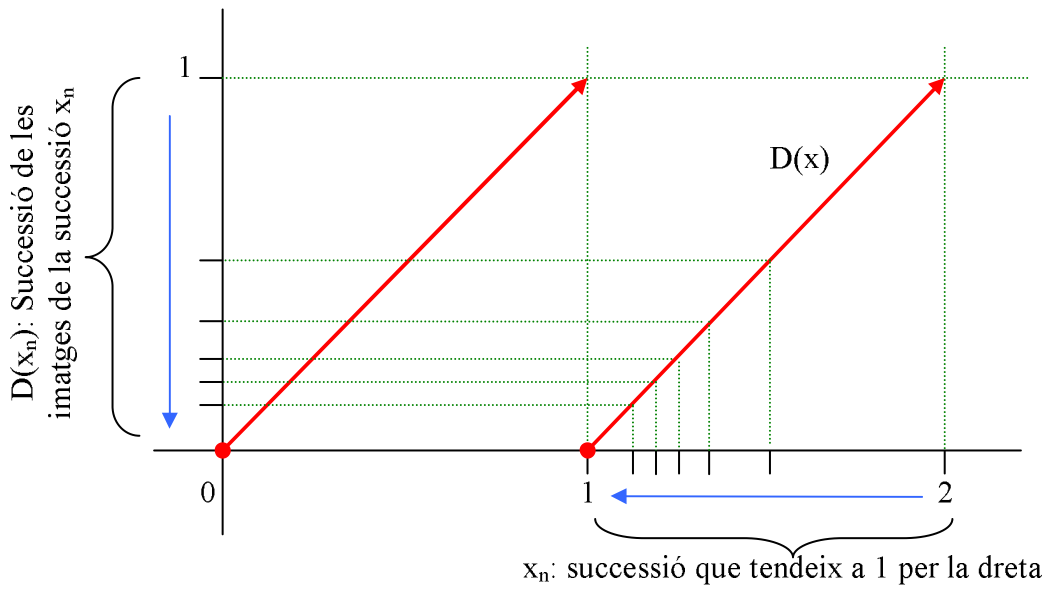
Repassem els mateixos exemples que en els paràgrafs anteriors, però ara farem els límits per la dreta. Comencem per la funció "part decimal" en el punt 1.

Agafem una successió d'elements del domini de la funció que tendeixi a 1 per la dreta i la seva corresponent successió d'imatges:

x_n:	1+1	1+1/2	1+1/3	...	1+1/n	...	→	1^+
$D(x_n)$:	0	1/2	1/3	...	1/n	...	→	0

El límit per la dreta de la funció "part decimal" en el punt 1 és 0, i s'escriu

$$\lim_{x\to 1^+} D(x) = 0$$



1.5 - Límit per la dreta de la funció 1/x en el punt x = 0

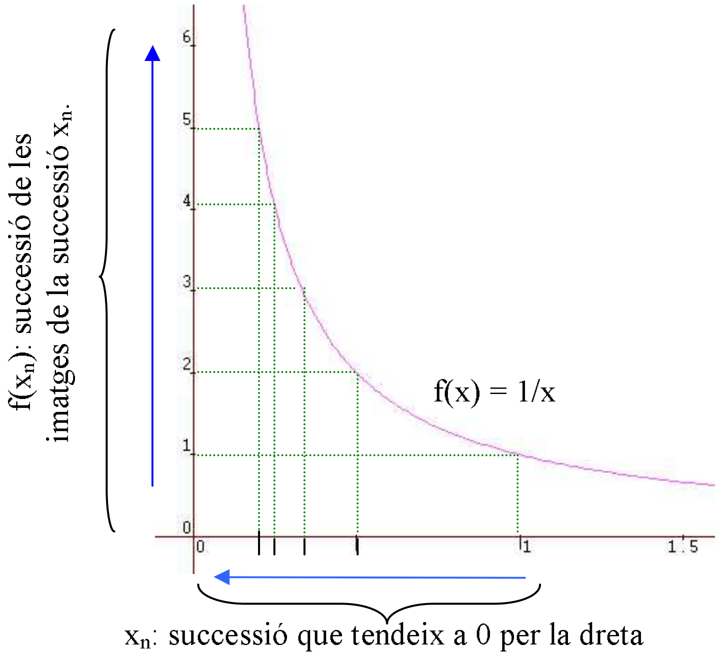
Continuem amb la funció inversa en el punt 0. Agafem les acostumades successions, una de valors del domini que tendeixi a 0 per la dreta, i l'altre de les corresponents imatges:

x_n:	0+1	0+1/2	0+1/3	...	0+1/n	...	$\rightarrow$	0^+
$1/x_n$:	1	2	3	...	n	...	$\rightarrow$	$+\infty$

Obtenim que el límit per la dreta de la funció 1/x en el punt 0 és

$$\lim_{x \to 0^-} {}^{1}\!/\!_{x} = +\infty$$

La corresponent interpretació gràfica és:



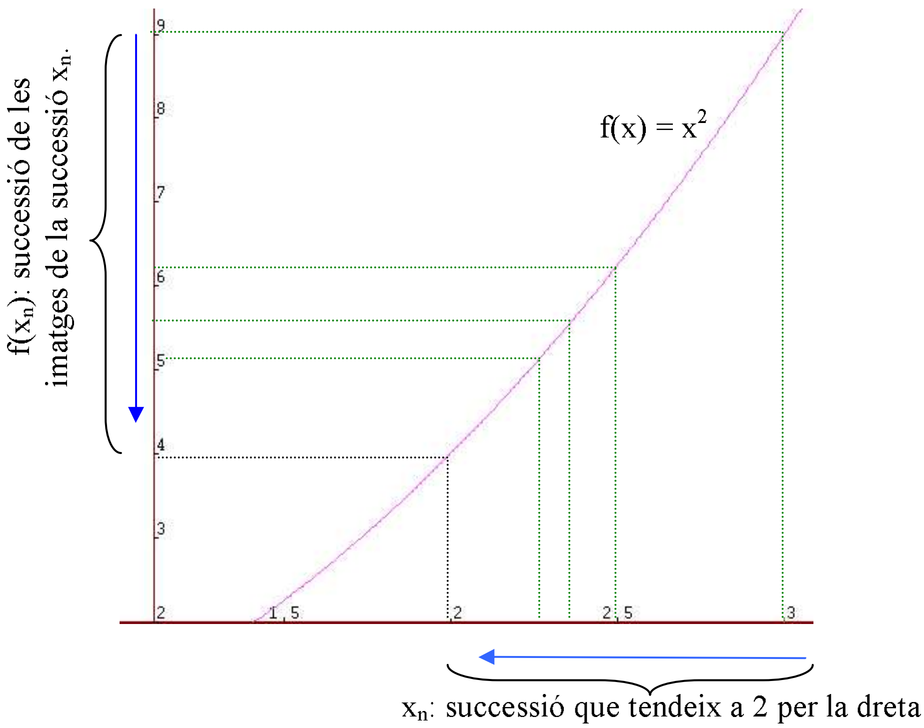
1.6 - Límit per la dreta de la funció x^2 en el punt x = 2

Tornem finalment a la funció “regular” i intentem de trobar el límit per la dreta de x^2 en el punt 2. Construïm la taula amb la successió de valors del domini de la funció que tendeixin a 2 per la dreta junt amb les seves corresponents imatges:

x_n:	2 + 1	2+1/2	2+1/3	...	2+1/n	...	$\rightarrow$	2^+
$(x_n)^2$:	$(2 + 1)^2$	$(2+1/2)^2$	$(2+1/3)^2$	...	$(2+1/n)^2$	...	$\rightarrow$	4

I d’aquesta forma obtenim que el límit buscat és 4: $\lim_{x \to 2^+} x^2 = 4$

La interpretació gràfica d’aquest límit és:



1.7 - Límits laterals d'una funció en un punt

> ***Límit lateral d'una funció en un punt***
> *Cada un del dos límit, per la dreta i per l'esquerra, d'una funció en un punt es diuen límits laterals de la funció en un punt.*

1.8 - Límits en punts fora del domini

Hem acabat de calcular el límit per la dreta i el límit per l'esquerra en el punt 0 de la funció 1/x. Però, fixeu-vos, que el punt 0 no és del domini de la funció. Això es pot fer solament en els casos que existeixi una successió d'elements del domini de la funció que tendeixin (per la dreta o per l'esquerra) al punt considerat.

En el nostre cas hem agafat la successió 1, 1/2, 1/3, 1/4, .. , que tots són del domini, i el seu límit és 0^+ (per la dreta), per això hem pogut calcular el límit per la dreta. I hem agafat la successió -1, -1/2, -1/3, -1/4, .. , que tots són del domini, que el seu límit és 0^- (per l'esquerra), i per això s'ha calculat el límit per l'esquerra de la funció.

D'aquesta forma, si el domini d'una funció f fos un interval obert com ara (a, b), encara que ni a, ni b, siguin del domini, es podria calcular el límit per la dreta de f en el punt a i el límit per l'esquerra de f en el punt b. Però no es podria calcular el límit per l'esquerra en el punt a ni el límit per la dreta en el punt b.

Si el domini d'una funció fos (a, b)$\cup$(b, c) tindríem que el punt b és molt especial, és l'únic del interval (a, c) que no és del domini, i com que es poden construir successions tant per la dreta com per l'esquerra que tendeixin a b, resulta que es poden calcular el dos límits de la funció, el de la dreta i el de l'esquerra en el punt b.

1.9- Límit d'una funció en un punt

> ***Límit d'una funció f en un punt x = a.***
> *En el cas de que el límit per la dreta coincideixi amb el límit per l'esquerra d'una funció f en un punt x = a, aquest valor se li diu límit de la funció f en el punt x = a.*
> *En el cas de que els dos límit (per la dreta i per l'esquerra) no coincideixin, o bé algun d'ells no existeixi, es diu que la funció no té límit en aquest punt.*

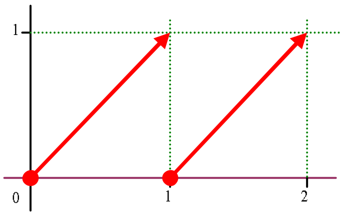
Segons la definició donada i en vistes de que $\lim\limits_{x\to 1^-} D(x)=1$ i $\lim\limits_{x\to 1^+} D(x)=0$ podem dir que la funció "part decimal" no té límit en el punt 1.

Com que $\lim\limits_{x\to 0^-} {}^{1}\!/_{x} = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to 0^-} {}^{1}\!/_{x} = +\infty$ la funció inversa tampoc té límit en el punt 0.

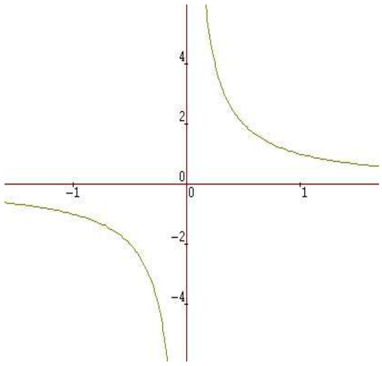
Finalment com que $\lim\limits_{x\to 2^-} x^2 = 4$ i $\lim\limits_{x\to 2^+} x^2 = 4$, ara sí que la funció x^2 té límit en el punt 2, i això s'escriu:

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

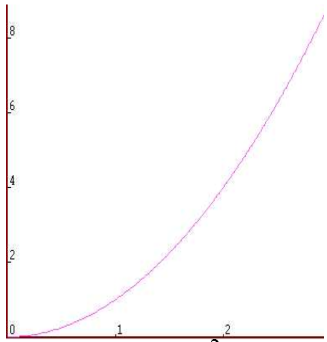
Cal fixar-se en aquestes funcions i en els punts estudiats. La funció 'part decimal' té una ruptura en el punt 1, aquesta funció té un salt. La funció inversa té un salt tant gran que passa del menys infinit al més infinit. En canvi la funció quadrat és completament 'uniforme'.



D(x)



f(x) = 1/x



f(x) = x^2

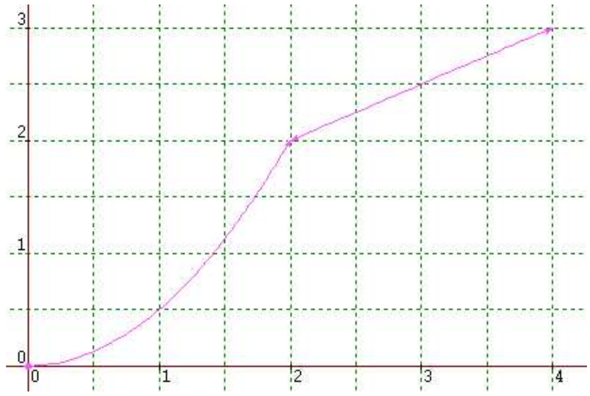
1.10 - Límit en una funció definida a trossos

Considerem la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2/2 & si \quad 0 \le x < 2 \\ x/2 + 1 & si \quad 2 < x < 4 \end{cases}$$

El domini de f és [0, 2) $\cup$ (2,4), veiem que el 2 no és del domini de f, però és aquell punt especial que està "rodejat" completament per punts del domini i per això es poden calcular tant el límit per la dreta com el de l'esquerra en aquest punt. Vegem-ho:

Primer de tot, per donar-nos una idea de com seran els límit representem la funció. És aquesta gràfica:



Per calcular el límit per la dreta en el punt 2 agafem una successió de valors del domini i que tingui per límit 2 per la dreta. Agafem aquesta:

2+1, 2+1/2, 2+1/3, 2+1/4, ...

tots aquests valors són més grans que 2, per això per trobar les seves imatges ho haurem de fer per la fórmula x/2 + 1, dóna això:

x_n:	2 + 1	2+1/2	2+1/3	...	2+1/n	...	$\rightarrow$	2^+
$x_n/2 + 1$:	2 + 1/2	2 + 1/4	2 + 1/6	...	2 + 1/(2n)	...	$\rightarrow$	2

Així:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$$

Fixeu-se que:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2$$

Per trobar el límit per l'esquerra, ho farem així

x_n:	2 - 1	2-1/2	2-1/3	...	2-1/n	...	$\rightarrow$	2^-
$(x_n)^2/2$:	$(2 - 1/2)^2/2$	$(2-1/2)^2/2$	$(2 - 1/3)^2/2$	...	$(2 - 1/n))^2/2$	...	$\rightarrow$	2

Així:

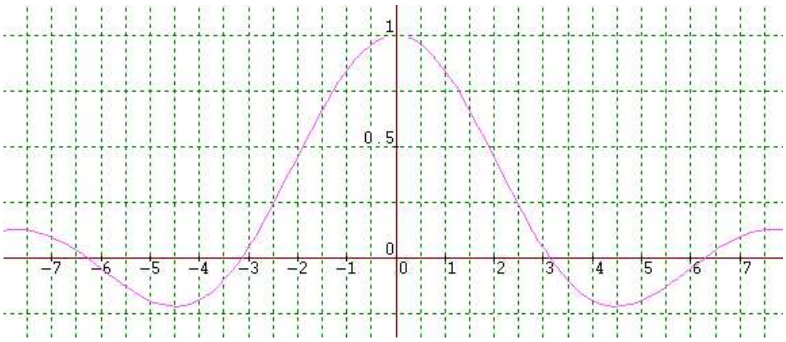
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{x^2}{2}\right) = 2$$

I com que els dos límits coincideixen podem dir que límit de f en el punt 2 és:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 2$$

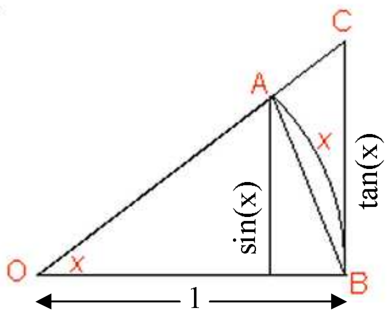
1.11 - Límit de sin(x)/x en el punt zero

Si donem valors a la x calculem les seves imatges ens resultarà la gràfica següent:



El 0 no és del domini de la funció, però, com serà la funció al entorn del punt x = 0? El tros de gràfica de la dreta del zero s'acostarà a 1? I el tros de l'esquerra? Els dos trossos es troben en el punt (0, 1)?

Per contestar a aquestes preguntes, mireu al gràfic següent:



Des del punt O s'ha dibuixat un sector circular d'angle x (en radiants) positiu menor que $\pi/2$ i de radi 1. Recordeu que la perpendicular a OB des de A és el sinus de *x*, que la perpendicular a OB que passa per B i arriba fins la prolongació del costat OA és la tangent de *x*, i que l'arc AB té de longitud el mateix valor que l'angle *x*.

És immediat veure que:

- l'àrea del triangle OAB és sin(*x*)/2
- l'àrea del sector OAB és *x*/2
- l'àrea del triangle OCB és tan(*x*)/2

També és fàcil de veure que cada una de les àrees anteriors està continguda en la següent. O sigui, es compleix:

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan(x)}{2}$$

O també: $\sin(x) < x < \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Si es fa les inverses: $\dfrac{1}{\sin(x)} > \dfrac{1}{x} > \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Multiplicant per sin(x) que és més gran que zero:

$$1 > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x)$$

Aquestes desigualtat es compliran per qualsevol angle x que estigui entre 0 i π/2.

Per anar a intentar calcular el límit per la dreta de $\dfrac{\sin(x)}{x}$ hem d'agafar una successió positiva d'angles x_n que tendeixin a 0, calcular les corresponent imatges $\dfrac{\sin(x_n)}{x_n}$ i finalment trobar el límit d'aquesta successió. Però tots els termes d'aquesta successió compliran amb les últimes desigualtats:

$$1 > \frac{\sin(x_n)}{x_n} > \cos(x_n)$$

Però, mireu el terme de l'esquerra és una constant, sempre és 1, o sigui els termes de $\dfrac{\sin(x_n)}{x_n}$ sempre seran menors que 1, però major que $\cos(x_n)$.

Ara bé, la funció *cos(x)* és una funció de les que direm "contínues", i que el seu límit coincideix amb la imatge de la funció, així es complirà $\underset{x\to 0^+}{lím} \cos(x) = \cos(0) = 1$. És intuïtiu, i es pot demostrar, que el límit de $\dfrac{\sin(x_n)}{x_n}$ ha d'estar comprès entre 1 i 1, el que ens diu que ha d'ésser 1:

$$\underset{x\to 0^+}{lím} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Deixem com un exercici pel usuari demostrar que el límit per l'esquerra també és 1:

$$\underset{x\to 0^-}{lím} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

I com que aquests dos límits coincideixen es pot dir que:

$$\underset{x\to 0}{lím} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Tornant a les preguntes de l'inici del paràgraf, podem dir que la funció $\dfrac{\sin(x)}{x}$ no està definida en el punt x = 0, però que els dos trossos de la gràfica, per la dreta i per l'esquerra de x = 0, s'acosten cap al punt (0, 1)

1.12- Continuïtat d'una funció en un punt

> ***Funció contínua en un punt***
>
> *Una funció f es diu que és contínua en un punt x = a si aquests tres valors:*
> - *Imatge de f en el punt a*
> - *Límit per la dreta de f en el punt a*
> - *Límit per l'esquerra de f en el punt a.*
>
> *existeixen i coincideixen tots tres.*

La coincidència dels tres conceptes anterior fa que la funció en el punt estudiat no tingui "irregularitats", acostant-se per la dreta o per l'esquerra s'arriba a la imatge de la funció.

Vegem-ne algun exemples:

a) La funció f(x) = x^2 vista anteriorment compleix les condicions esmentades en el punt x = 2. Es compleix:

$$f(2) = \underset{x\to 2^+}{lím}\ f(x) = \underset{x\to 2^-}{lím}\ f(x)$$

Es pot demostrar que aquesta funció és contínua en qualsevol punt del domini.

b) Pel que acabem de veure en l'últim paràgraf la funció $\frac{\sin(x)}{x}$, encara que els dos límits (per la dreta i per l'esquerra) coincideixin en el punt x = 0, passa que la funció no té imatge en aquest punt.

c) La funció D(x) també vista anteriorment, no és contínua en cap dels punt enters, per exemple l'estudiat x = 1, ja que els dos límits en aquests punts no coincideixen, un és 0 i l'altre 1.

d) La funció f(x) = 1/x no és contínua en el punt 0, perquè no hi ha imatge en aquest punt, i a més, encara que pogués tenir imatge, aquesta mai podria coincidir amb els dos límits laterals, ja que aquests són infinits i les imatges no ho poden ser mai.

1.13- Continuïtat d'una funció en una part del domini

> ***Funció contínua en un subconjunt del domini***
>
> *Una funció f es diu que és contínua en un subconjunt del domini si és contínua en cada un del punts d'aquest conjunt.*

Una funció contínua en un interval no pot presentar cap "irregularitat" en els seus punts. Per dibuixar un punt tant per la banda dreta com per l'esquerra els dos trossos han de convergir en la imatge del punt, i com que això ha de

passar per tots els punts, es pot dir que una funció és contínua en un interval si per dibuixar-la es pot fer tota la gràfica sense aixecar el llapis del paper
Alguns exemples intuïtius:

a) La funció D(x) ja vista molts cops, és contínua en tot **R** excepte els punts de coordenada entera.

b) La funció f(x) = 1/x és contínua en tot **R** excepte en el punt x = 0.

c) La funció f(x) = x^2 és contínua en tot el seu domini.

1.14- Discontinuïtat

> ***Funció discontínua en un punt***
> *Una funció f es diu que és discontínua en un punt si f no és contínua en aquest punt.*

Una funció serà discontínua en un punt si algun dels tres valors esmentats en el paràgraf 12, o no existeix, o no coincideix amb els altres.

La funció D(x) no és contínua en els valors enters, perquè els dos límits laterals en aquests punts no coincideixen.

La funció 1/x és discontínua en el punt 0 perquè la funció no té imatge en aquest punt. Encara que lla funció tingués imatge aquesta no podria ser mai igual al límit laterals que són infinits i també seria discontínua.

La funció definida a trossos en l'apartat 13.10 és discontínua en el punt 2 ja que, encara que els dos límits lateral coincideixen, aquest punt no té imatge.

La funció $\frac{\sin(x)}{x}$ vista en l'apartat 13.11 és discontínua en el punt 0 ja que no hi ha imatge en aquest punt.

1.15- Tipus de discontinuïtat

> ***Discontinuïtat de salt***
> *Es diu que f té una discontinuïtat de salt en un punt x = a si els dos límits laterals en aquest punt són reals i diferents.*

La funció D(x) és discontínua en tots els punts enters perquè el límit per la dreta és 0 i el límit per l'esquerra és 1 en tots aquests punts.

El mateix passa amb la funció E(x) vista en el capítol 2 de la "Iniciació a les funcions", també és discontínua en qualsevol punt enter, per exemple, pel punt x = 4 tenim que

$$\lim_{x \to 4^-} E(x) = 3 \qquad i \qquad \lim_{x \to 4^+} E(x) = 4$$

i així passa en tots el altres punts enters.

Discontinuïtat asimptòtica

Es diu que f té una discontinuïtat asimptòtica en un punt x = a si els dos límits laterals en aquest punt són infinits $(+\infty \text{ o } -\infty)$.

La funció 1/x té una discontinuïtat asimptòtica en el punt x = 0, ja que un límit lateral en aquest punt és $+\infty$ i l'altre és $-\infty$.

Discontinuïtat evitable

Es diu que f té una discontinuïtat evitable en un punt x = a si els dos límits laterals en aquest són reals i coincideixen però la imatge de la funció, o és diferent a la dels límits, o no existeix.

La funció definida a trossos en el paràgraf 13.10 té una discontinuïtat evitable en el punt x = 2, ja que els dos límits laterals en aquest punt són 2, però en canvi no hi ha imatge.

El mateix passa amb la funció $\frac{\sin(x)}{x}$ en el punt x = 0, doncs els dos límits laterals, ho hem vist en el paràgraf 13.11, són 1 i en canvi no hi ha imatge.

El "defecte" que presenten les funcions amb aquest tipus de discontinuïtat és molt lleu, només els cal a la funció, modificar, o col·locar un sol punt per tal de que sigui contínues. Els falta un punt només. És com si la funció hagués sofert una punxada i hagués quedat sense un del seus punt. Mireu les gràfiques de les dues funcions comentades en aquest paràgraf.

Es diu evitable la discontinuïtat perquè corregint el punt en qüestió obtindrem una funció contínua, sense tocar res més de la funció. Per exemple, la funció definida en el paràgraf 13.10 es podria haver definit així

$$f(x) = \begin{cases} x^2/2 & si \quad 0 \le x \le 2 \\ x/2 + 1 & si \quad 2 < x < 4 \end{cases}$$

en la que solament hem substituït un < per un $\le$, ara f ja té imatge en el punt 2 i aquesta imatge és igual als límit laterals.

I al funció $\frac{\sin(x)}{x}$ es podria "arreglar" definint-la d'aquesta forma:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x} & si \quad x\neq 0\\ 1 & si \quad x=0\end{cases}$$

Fent-ho d'aquesta forma els "forats" de les dues funcions discontínues queden tapats i les funcions esdevenen contínues.

1.16- Un cas de discontinuïtat evitable

Es tracte de cas d'un quocient de dues funcions en que el numerador i denominador tenen un factor comú i que aquest factor s'anul·la per algun valor.

Per exemple la funció $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x}$, per ser el quocient de dos polinomis f no estarà definida en els punts que s'anul·la el denominador: x = 0 i x = -1, ens els quals la funció no pot ser contínua.

Es pot veure fàcilment que x + 1 es un factor tant del numerador com del denominador:

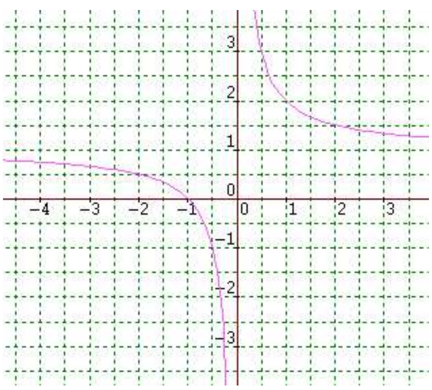
$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2+x}=\frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)x}$$

Comparem, ara, les dues funcions:

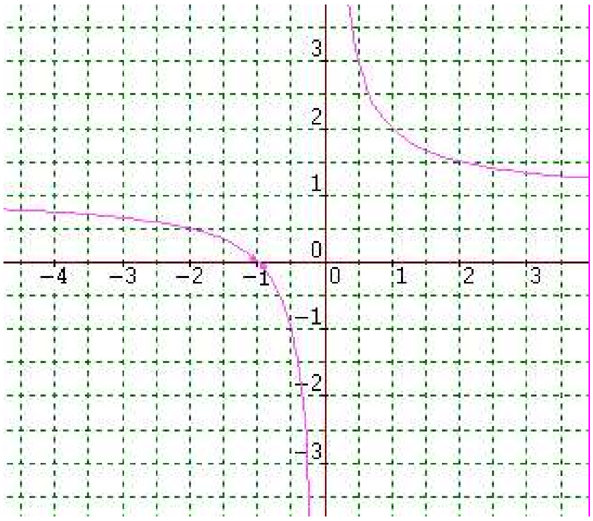
$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2+x} \qquad i \qquad g(x)=\frac{x+1}{x}$$

A primera vista sembla que les dues funcions siguin iguals, solament s'ha simplificat, però, recordeu que sols es pot simplificar si el terme anul·lat és diferent de 0, ja que per simplificar es divideix per aquest terme, en el nostre exemple es pot simplificar si $x+1\neq 0$, o sigui si $x\neq -1$. Dit d'una altre forma, les funcions f i g seran iguals si $x\neq -1$, però si x = -1 la funció f no té imatge mentre que la funció g sí que en té.

La gràfica de g és



Però com que f coincideix amb g en tots els punts excepte en x = -1, on f no està definida, la funció de f és:



Gràfica que té un forat en el punt (-1, 0) i així es pot veure que f té una discontinuïtat evitable en el punt x = -1, i els límit laterals de f serà els mateixos que els de g:

$$\underset{x\to -1^+}{lím}\frac{x^2+2x+1}{x^2+x}=\underset{x\to -1^+}{lím}\frac{x+1}{x}=g(-1)=0$$

I el mateix passarà en el límit per l'esquerra, i per això es pot dir que:

$$\underset{x\to -1}{lím}\frac{x^2+2x+1}{x^2+x}=0$$

Fixeu-vos que f és la funció g però punxada en el punt (-1, 0). Gairebé es pot dir que la definició de f està feta "amb trampa", doncs la funció g és pràcticament igual a f, però a més g és més "regular" (se l'hi ha evitat una discontinuïtat), perquè no es definia des d'un principi g en lloc de f?

1.17- Exercicis

1 – Tenim una successió d'imatges d'una funció f així:

$$f(1)=\frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},\ f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6},\dots,f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n},\dots$$

Quin és el $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$?. A partir de la successió anterior es pot dir quin és el $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$?

2 – Coneixem les següents imatges d'una funció g:

$$g(2)=2,\ g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2},\ g\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3},\dots,\ g\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{n+1}{n},\dots$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=1,\ g\left(\frac{2}{3}\right)=1,\ g\left(\frac{3}{4}\right)=1,\dots,\ g\left(\frac{n}{n+1}\right)=1,\dots$$

Què podem dir dels següents límits?

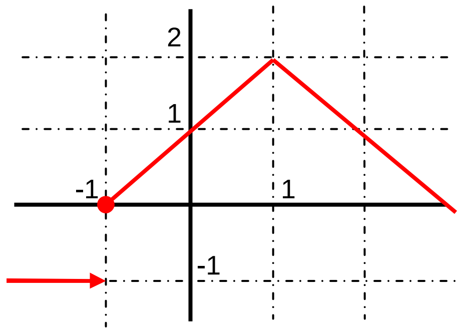
$\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)$ $\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)$ $\lim\limits_{x\to 1}g(x)$ $\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)$ $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$ $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$

3 – A la dreta hi ha representada la gràfica d'una funció *h*. Digues quins són aquests límits.

$\lim\limits_{x\to -1^-} h(x)$ $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x)$ $\lim\limits_{x\to -1} h(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$ $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$ $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$



4 – Dibuixa una possible gràfica cartesiana de la funció $j:[0,3]\to R$ que:

$\lim\limits_{x\to 1^-} j(x)=0$ $\lim\limits_{x\to 1^+} j(x)=2$ $\lim\limits_{x\to 2^-} j(x)=1$ $\lim\limits_{x\to 2^+} j(x)=1$

$\lim\limits_{x\to 3^-} j(x)=-1$ $\lim\limits_{x\to 0^+} j(x)=-1$

5 – De la funció *j* del exercici anterior, que té per domini a [0, 3], podem definir els límits $\lim\limits_{x\to 3^+} j(x)=-1$ $\lim\limits_{x\to 0^-} j(x)=-1$? Per què?

6 – Per cada una de les funcions donades així

$$f(x)=x,\quad f(x)=|x|,\quad f(x)=\sqrt{x},\quad f(x)=x^3,\quad f(x)=\log(x),\quad E(x)$$

$$f(x)=\sin(x),\quad f(x)=e^x,\quad f(x)=\cos(x),\quad f(x)=\tan(x),\quad D(x)$$

calcula si existeixen: el límit, el límit per la dreta i el límit per l'esquerra en els punts -1 , 0 i 1.

7 – Fes un esquema, a l'entorn del punt x = 2, de la gràfica de la funció *g* que:

$$\lim_{x\to 2^-} g(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x)=-\infty$$

8 – Coneixem els límits: $\lim\limits_{x\to \frac{1}{n}-1} f(x)=n^2$ $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{n}-1} f(x)=-n^2$, calcula:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) \quad i \quad \lim_{x\to -1^+} f(x)$$

9 – Estudia la continuïtat de la funció h de l'exercici 3 en els punts -1 i 1

10 – Una funció *f* té per domini [-1, 3] i està definida d'aquesta forma

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} \ si \ x\in[-1,1]-\{0\} \\ 1 \ si \ x=0 \\ x \ si \ x\in(1,2] \\ x \ si \ x\in(2,3] \end{cases}$$

Estudia la continuïtat de f en els punts 0, 1 i 2.

11 – Fes un esquema del gràfic d'una funció que en el punt 1 tingui una discontinuïtat evitable, que en punt 2 tingui una discontinuïtat de salt i que en el punt 3 tingui una discontinuïtat asimptòtica.

12 – Demostra que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ aleshores $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.Demostra-ho també pel cas de que el primer límit tendeixi a $-\infty$.

13 – Calcula els dos límits laterals de la funció $g(x) = \frac{|x|}{x}$ en els punt -1, 0 i 1.