2 LÍMIT D'UNA FUNCIÓ A L'INFINIT

2.1- Límit d'una funció en el $+\infty$

Es tracte de veure com es comporta una funció per valors molt, molt, grans de x en el suposat que el seu domini hi arribi. Podria ser que per a valors molt grans de x les imatges es fessin també molt grans. O podria ser les imatges s'estabilitzessin i s'anessin acostant moltíssim a un valor. O podria ser que les imatges anessin oscil·lant, pujant i baixant, sense estabilitzar-se. O les imatges podrien prendre altres actituds.

Naturalment serà impossible dibuixar les gràfiques de les funcions quan la x s'acosta a $+\infty$**,** per això aquests conceptes mirant les gràfiques s'hauran d'intuir per veure què passarà més enllà de la gràfica.

Considerem una funció, per exemple l'ultima que hem vist en paràgraf anterior 13...., la funció g(x) = (x+1)/x.

Agafem una successió de valors de x que tendeixi a $+\infty$**.** La successió més senzilla és x_n: 1, 2, 3, 4, 5, ... i calculem la corresponent successió d'imatges. Tal com ho hem fet en la lliçó anterior ho representarem en una taula:

x_n:	1	2	3	...	n	...	$\to$	$+\infty$
$g(x_n)$:	2	3/2	4/3	...	(n+1)/n	...	$\to$	1

Això ens diu que les imatges de la funció g, quant els valors de x es fan molt grans, es van acostant a 1, tal com s'ha dit en el curs de successions. Es diu que el límit de la funció (x+1)/x a l'infinit és 1, i s'escriu:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

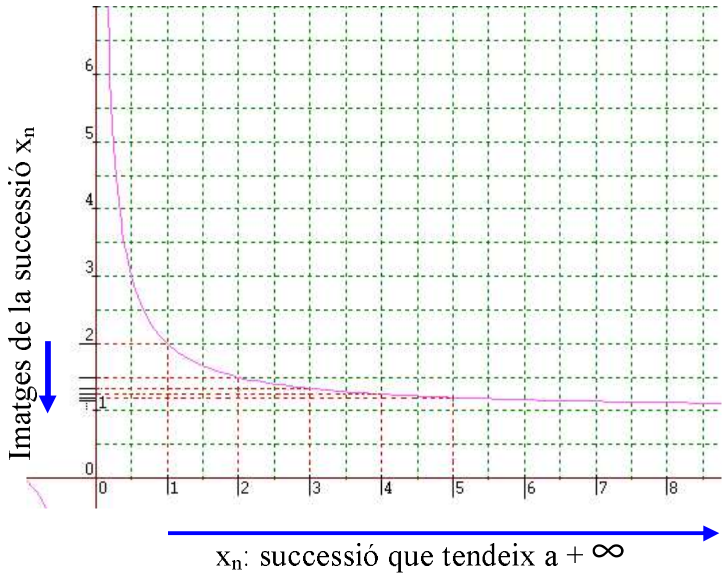
És obvi que el límit a l'infinit d'una funció es troba buscant el límit de la successió que dóna en substituir la x de la fórmula de la funció per una n:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = \lim \frac{n+1}{n} = 1$$

Vegeu la lliçó de càlcul de límits de successions ....

Aquest últim procediment de passar del límit d'una funció al límit d'una successió es compleix sempre que la funció sigui suficient regular, hi ha casos, molt excepcionals que no es compleix

Les gràfiques de la funció g, de la successió x_n i de les seves corresponents imatges es poden veure en el gràfic següent:



Fixeu-vos que la forma de trobar el límit de g al $+\infty$ és exactament igual a la forma que fèiem per trobar el límit en un punt: Una successió que tendeixi a aquest punt, ara és $+\infty$, la seva corresponent successió d'imatges i el càlcul del seu límit, aquest és el límit que cercàvem.

Límit d'una funció f a $+\infty$

El límit d'una funció f a $+\infty$ és el límit, si existeix, de la successió de les imatges d' una successió de valors del domini que tingui per límit $+\infty$.

El límit d'una funció a $+\infty$ pot ser $+\infty$ o $-\infty$, mirem ràpidament la funció f(x) = x^2. Construint les successions requerides

x_n:	1	2	3	...	n	...	$\rightarrow$	$+\infty$
$f(x_n)$:	1	4	9	...	n^2	...	$\rightarrow$	$+\infty$

que ens indica que

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

2.2- Límit d'una funció en el $-\infty$

Anàlogament al que s'ha fet en el paràgraf anterior ara hem de veura com es comporta la funció per valors molt grans i negatius, per això agafarem una successió d'elements del domini que tendeixi a $-\infty$, el límit de la successió de les imatges d'aquesta primera successió serà el límit de la funció a $-\infty$.

La successió més simple que tendeix a $-\infty$ és -1, -2, -3, -4, ... , -n, ...

Calculem el límit de la funció $f(x) = e^x$ a $-\infty$, tal com hem dit:

x_n:	-1	-2	-3	...	-n	...	$\rightarrow$	$-\infty$
e^{x_n} :	e	e^{-2}	e^{-3}	...	e^{-n}	...	$\rightarrow$	0

El límit de la segona successió és 0 doncs: $e^{-n} = 1/e^n = 1/+\infty = 0$

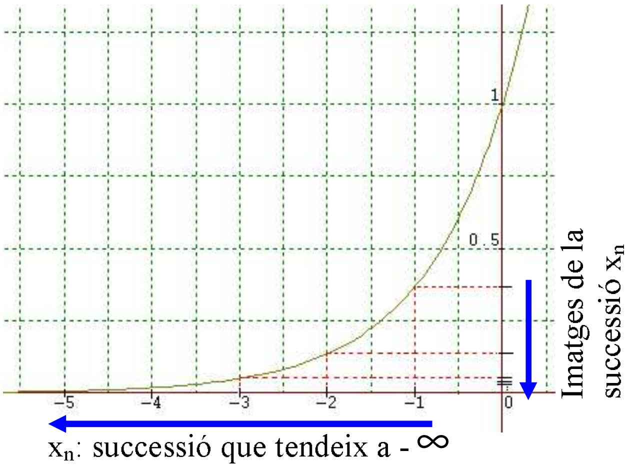
Per això el límit que busquem és:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

D'una forma pràctica es pot dir que el límit d'una funció al $-\infty$ és el límit de la successió que es troba substituint la x de la fórmula de la funció per –n, així:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim(e^{-n}) = \lim \frac{1}{e^n} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Un esquema de la funció i les successions esmentades és:



Límit d'una funció f a $-\infty$

El límit d'una funció f a $-\infty$ és el límit, si existeix, de la successió de les imatges d' una successió de valors del domini que tingui per límit $-\infty$.

2.3- Observació sobre els límits definits

Les definicions donades de límit per la dreta i per l'esquerra d'una funció en un punt i els límits a l'infinit (+ i -) que acabem de definir, tot i que són diguem didàcticament molt bones, no són tècnicament perfectes. Fixeu-vos en aquest cas

Agafem la funció “part decimal” que hem escrit D(x), mireu el paràgraf 13.1. Intentem de calcular el límit a $+\infty$.

x_n:	1	2	3	...	n	... $\rightarrow$	$+\infty$
$D(x_n)$:	0	0	0	...	0	... $\rightarrow$	0

Sembla que aquest límit és 0. Però fem-ho amb una altre successió:

x_n:	0,5	1,5	2,5	...	n - 0,5	... $\rightarrow$	$+\infty$
$D(x_n)$:	0,5	0,5	0,5	...	0,5	... $\rightarrow$	0,5

Ara sembla que el límit és 0,5. Ja es veu que aquí hi ha d’haver un error.

Per veure una altre exemple senzill definim el conjunt $\mathrm{C}=\left\{1\pm\frac{1}{n}, n\in \mathbf{N}\right\}$, o sigui que C = { . . . 1-1/3, 1-1/2, 1-1, 1+1, 1+1/2, 1+1/3, . . . }. Mireu que tots els valors de C són racionals. Ara definim la funció següent:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x\in C \\ x & si \quad x\notin C \end{cases}$$

Si intentem calcular el límit per la dreta de f en el punt 1, ho podem fer així:

x_n:	1+1	1+1/2	1+1/3	...	1+1/n	... $\rightarrow$	1^+
$f(x_n)$:	2	2	2	...	2	... $\rightarrow$	2

Com que cada valor de la successió x_n pertany al conjunt C, ens dóna per límit a 2. Però si ho fem així:

x_n:	$1+0,\widehat{1}$	$1+0,0\widehat{1}$	$1+0,00\widehat{1}$	$\cdots$	$1+0,0...0\widehat{1}$	$\cdots$ $\rightarrow$	1^+
$f(x_n)$:	$1+0,\widehat{1}$	$1+0,0\widehat{1}$	$1+0,00\widehat{1}$	$\cdots$	$1+0,0...0\widehat{1}$	$\cdots$ $\rightarrow$	1

Tots els valors de x_n són irracionals, per això cap d’ells pertany al conjunt C, i segons la definició de f, les seves imatges són els mateixos valors i, ara, el límit de la funció dóna 1.

La dificultat està en les definicions donades a tots aquests límits, s’ha dit que el *límit de la funció és el límit de les imatges d’**una** successió de valors del domini*... En realitat s’hauria de dir *límit de la funció és el límit de les imatges, **quant aquestes coincideixen**, de **qualsevol** successió de valors del domini...* Aquesta nova manera d’enfocar les definicions presenta dificultats que pel nivell d’aquests apunts resultaria massa elevats.

Seguint aquest concepte, la funció D(x) no té límit al $+\infty$, ni al $-\infty$. Tampoc la funció *f(x)* acabada de definir no té límits en el punt 1.

De totes formes el mètode explicat és una bona forma d’entendre, i en la majoria dels casos, és una bona forma de calcular els límits de les funcions.

2.4 Exercicis

1 - Fes un esquema d'una gràfica possible d'una funció *f* que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

2 - Coneixem les següents imatges d'una funció g:

$$g(1) = 1,\ g(2) = \frac{8}{3},\ g(3) = \frac{9}{2},\ldots,\ g(n) = \frac{2n^2}{1+n},\ldots$$

$$g(-2) = -8,\ g(-3) = -9,\ g(-4) = \frac{-32}{3},\ldots,\ g(-n) = \frac{2n^2}{1-n},\ldots$$

Què podem dir d'aquets límits?

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x)$$

3 - Per cada un del casos següents fes un esquema d'una gràfica d'una funció *f* que compleixi amb aquests límits:

$$a)\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$b)\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$c)\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$d)\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

4 – Si una funció *f* és simètrica, o sigui que *f*(-x) = *f*(x), i $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 10$, quin serà el límit $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Per què?. I si *f* fos simètrica d'aquest forma, que *f*(-x) = -*f*(x) ?

5 – Si E, D i T són les funcions "part entera", "part decimal" i "dentada" vistes en el capítol 1 de la sèrie Iniciació a les funcions. Calcula, justificant les respostes, els límits a més infinit i a menys infinit, si existeixen, de cada una d'elles.

6 – Demostra que si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ aleshores $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$. Fes el mateix pel cas que $x \to -\infty$.