3 LÍMITS I OPERACIONS ENTRE FUNCIONS

3.1- Operacions entre els reals ampliats

Com que els límits en funcions es tradueixen a límits de successions, convindrà tenir present totes les propietats del límits en operacions entre successions. Per això és important que repassis aquests conceptes vistos en la lliçó ....
Recordeu que hi ha alguns casos que el límit queda indeterminat.

Per simplificar el lèxic considerarem que podem fer operacions dins del conjunt dels reals ampliat, que és $\mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, o sigui els números reals junt amb dos nous elements, el $+\infty$ i el $-\infty$. Les operacions, dins d'aquest nou conjunt, entre reals són les mateixes que ja coneixem, i les operacions entre reals i infinits, o bé les operacions entre infinits, són les indicades entre els límits de les successions, tal com es veu en les taules del capítol corresponent i que a continuació mostrem.

Algunes operacions no es poden fer, recordeu que en els límits de successions dèiem que eren un casos indeterminats, aquests casos són semblants a la operació de "dividir per zero" que encara que és una operació entre reals també és un cas dindeterminació.

Suma	a real	$+\infty$	$-\infty$
b real	a + b	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

		Primer terme		
	Resta	a real	$+\infty$	$-\infty$
Segon terme	b real	a - b	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

Producte	$+\infty$	a >0	**0**	a < 0	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
b > 0	$+\infty$	a b	**0**	a b	$-\infty$
0	?	**0**	**0**	0	?
b< 0	$-\infty$	a b	**0**	a b	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

		Numerador				
	Quocient	$+\infty$	a >0	0	a < 0	$-\infty$
Denominador	$+\infty$	?	0	0	0	?
	b > 0	$+\infty$	a/b	0	a/b	$-\infty$
	0^+	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
	0^-	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$
	b< 0	$-\infty$	a/b	0	a/b	$+\infty$
	$-\infty$	?	0	0	0	?

		Exponent				
	Potència	$+\infty$	e >0	0	e < 0	$-\infty$
Base	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	0	0
	b > 1	$+\infty$	b^{e}	1	b^{e}	0
	1	e^{λ}	1	1	1	e^{λ}
	0< b <1	0	b^{e}	1	b^{e}	$+\infty$
	0^+	0	0	?	$+\infty$	$+\infty$

Els casos 1 elevat a més, o menys, infinit, d'aquesta última taula, són casos especials i ja estan tractats en el tema de les successions. Com que els límit en funcions s'han reduït a límits en successions, aquí donarà el mateix resultat. Recordem que la λ dels dos casos es calculava per:

$$\lambda = \textit{lím}\ (b_n - 1)e_n$$

que traduït a funcions serà :

$$\underset{x\to a}{\textit{lím}}\,(\text{base}-1)\cdot\text{exponent}$$

3.2- Límit en un punt d'una suma i una resta de funcions

Considerem dues funcions f i g que en el punt x = a per la dreta tenen els límits:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lambda \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to a^+} g(x)=\mu$$

Tal com hem definit aquests límit tindrem:

x_n:	a +1	a+1/2	a+1/3	...	a+1/n	...	$\to$	a^+
***f*(x_n):**	*f*(a+1)	*f*(a+1/2)	*f*(a+1/3)	...	*f*(a+1/n)	...	$\to$	λ

I per la funció g:

x_n:	a +1	a+1/2	a+1/3	...	a+1/n	...	$\to$	a^+
***g*(x_n):**	*g*(a+1)	*g*(a+1/2)	*g*(a+1/3)	...	*g*(a+1/n)	...	$\to$	μ

I recordant la definició de suma de funcions i el límit d'una suma de successions tindrem:

x_n:	a +1	a+1/2	a+1/3	...	a+1/n	...	$\to$	a^+
(*f*+*g*)(x_n):	*f*(a+1)+ *g*(a+1)	*f*(a+1/2)+ *g*(a+1/2)	*f*(a+1/3)+ *g*(a+1/3)	...	*f*(a+1/n)+ *g*(a+1/n)	...	$\to$	$\lambda+\mu$

Aquí hem de fer notar que si un límit és $+\infty$ i l'altre és $-\infty$, no quedaria definit, de moment, el límit de la suma, veure l'estudi de successions.

Exactament igual podríem fer amb el límit de l'esquerra i com a conseqüència amb el límit en general, atenint-se a la taula de l'operació suma del paràgraf anterior podem dir que:

$$\lim_{x\to a^+}(f+g)(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)+\lim_{x\to a^+} g(x)$$

$$\lim_{x\to a^-}(f+g)(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)+\lim_{x\to a^-} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

I exactament per la resta de funcions, i d'acord amb la taula de la resta del paràgraf anterior, resulta:

$$\lim_{x\to a^+}(f-g)(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)-\lim_{x\to a^+} g(x)$$

$$\lim_{x\to a^-}(f-g)(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)-\lim_{x\to a^-} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f-g)(x)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$$

Límit en un punt d'una suma de funcions

El límit (tant per la dreta com per l'esquerra com el general) d'una suma de funcions és igual a la suma dels límits de cada funció , sempre que aquesta estigui definida.

> ***Límit en un punt d'una diferència de funcions***
> *El límit (tant per la dreta com per l'esquerra com el general) d'una diferència de funcions és igual a la diferència dels límits de cada funció, sempre que aquesta estigui definida.*

Exemple:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\mathrm{D}(x)+x^2\right)=\lim_{x\to 1^+}\mathrm{D}(x)+\lim_{x\to 1^+}x^2=0+1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\mathrm{D}(x)+x^2\right)=\lim_{x\to 1^+}\mathrm{D}(x)-\lim_{x\to 1^+}x^2=1+1=2$$

3.3- Límit en un punt del producte d'una constant per una funció

Procedint com en el paràgraf anterior i suposant que una funció f té per límit per la dreta a λ, tindrem:

x_n:	a +1	a+1/2	a+1/3	...	a+1/n	...	$\rightarrow$	a^+
$f(x_n)$:	f(a+1)	f(a+1/2)	f(a+1/3)	...	f(a+1/n)	...	$\rightarrow$	λ

I per la funció $k{\cdot}f$, essent k un real, tindrem:

x_n:	a +1	a+1/2	a+1/3	...	a+1/n	...	$\rightarrow$	a^+
$(k{\cdot}f)(x_n)$:	kf(a+1)	kf(a+1/2)	kf(a+1/3)	...	kf(a+1/n)	...	$\rightarrow$	$k\lambda$

Aquí hem de dir que si el límit és infinit, aleshores el límit del producte depèn del signe de k. Si k és positiu, el límit del producte té el mateix signe que el límit de f. però si k és negatiu el límit del producte canvia de signe respecte del límit de la funció.

Igual podríem fer amb el límit de l'esquerra i com a conseqüència amb el límit en general, i aplicant la taula del producte del paràgraf primer, obtindríem que:

$$\lim_{x\to a^+}(k\cdot f)(x)=k\lim_{x\to a^+}f(x)$$

$$\lim_{x\to a^-}(k\cdot f)(x)=k\lim_{x\to a^-}f(x)$$

$$\lim_{x\to a}(k\cdot f)(x)=k\lim_{x\to a}f(x)$$

> ***Límit en un punt del producte d'una constant per una funció***
> *El límit (tant per la dreta com per l'esquerra com el general) del producte d'una constant per una funció és igual al producte de la constant pel límit de la funció, sempre que aquest estigui definit.*

Exemple:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{2}\cdot \mathrm{E}(x)\right) = \sqrt{2}\cdot \lim_{x\to 0^+} \mathrm{E}(x) = \sqrt{2}\cdot 0 = 0$$
$$\lim_{x\to 0^-} \left(\sqrt{2}\cdot \mathrm{E}(x)\right) = \sqrt{2}\cdot \lim_{x\to 0^-} \mathrm{E}(x) = \sqrt{2}\cdot(-1) = -\sqrt{2}$$

3.4- Límit en un punt del producte de dues funcions

Fent exactament igual com ho hem fet en el paràgraf 1 per la suma ho podem fer pel producte de funcions, i entenen que ens els casos de límits infinits es compleix la regla dels signes convencionals, i en els casos que un límit sigui 0 i l'altre infinit no es coneix pel moment el límit resultant, en general i d'acord amb la taula del producte del primer paràgraf, podem dir que:

$$\lim_{x\to a^+} (f\cdot g)(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)\cdot \lim_{x\to a^+} g(x)$$

$$\lim_{x\to a^-} (f\cdot g)(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)\cdot \lim_{x\to a^-} g(x)$$
$$\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Límit en un punt d'un producte de funcions

El límit (tant per la dreta com per l'esquerra com el general) d'un producte de funcions és igual al producte dels límits de cada funció, sempre que aquest estigui definit.

Un exemple:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(e^{x}\cdot \ln(x)\right) = 1\cdot(-\infty) = -\infty$$

3.5- Límit en un punt del quocient de dues funcions

Si el límit per la dreta d'una funció f en el punt x = a és λ i el de la funció g és μ. podem procedir com en els paràgrafs anteriors:

x_n:	a +1	a+1/2	a+1/3	...	a+1/n	...	$\rightarrow$	a^+
***(f/g)*(x_n):**	*f*(a+1)/ *g*(a+1)	*f*(a+1/2)/ *g*(a+1/2)	*f*(a+1/3)/ *g*(a+1/3)	...	*f*(a+1/n)/ *g*(a+1/n)	...	$\rightarrow$	λ/μ

És evident que si el límit μ fos 0 el límit de f/g no existiria. També s'ha d'observar que si algun terme de la successió *g*(a+1/n) dels denominadors fos 0, no es podria construir la segona successió de la forma que està feta, Però aquest cas no és una restricció pel càlcul del límit del quocient, doncs si l'últim terme nul és *g*(a+1/r)=0, hauríem de començar la primera successió amb el terme a+1/(r+1) , així:

a+1/(r+1), a+1/(r+2), a+1/(r+3), ...

i el procés es pot acabar exactament igual.

Tampoc queda definit el cas en que els dos límits siguin infinit, tal com s'havia dit en successions, en aquests casos s'haurà d'intentar calcular el límit per altres mètodes.
Així doncs, sempre d'acord amb la taula de divisió del paràgraf 1, tindrem:

$$\lim_{x \to a^+} (f/g)(x) = \frac{\lim_{x \to a^+} f(x)}{\lim_{x \to a^+} g(x)}$$

$$\lim_{x \to a^-} (f/g)(x) = \frac{\lim_{x \to a^-} f(x)}{\lim_{x \to a^-} g(x)}$$

$$\lim_{x \to a} (f/g)(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Límit en un punt d'un quocient de funcions
El límit (tant per la dreta com per l'esquerra com el general) d'un quocient de funcions és igual al quocient dels límits de cada funció, sempre que aquest estigui definit.

Un exemple:

$$\lim_{x \to \pi/2^+} (\tan(x)) = \lim_{x \to \pi/2^+} \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \text{i}$$

$$\lim_{x \to \pi/2^-} (\tan(x)) = \lim_{x \to \pi/2^-} \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

I un altre:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

3.6- Límit en un punt d'una potència de funcions

Exactament igual que en el anteriors casos, el límit d'una potència entre funcions queda reduït al límit d'una potència entre successions, ja estudiat i que respondrà a la taula de potència del primer paràgraf.

Recordeu que per aquests límits puguin existir és necessari que la funció que fa de base ha d'ésser positiva. Així doncs, tenint en compte la taula de potències esmentada, podem dir:

$$\lim_{x\to a^+} \left(b(x)\right)^{e(x)} = \left(\lim_{x\to a^+} b(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a^+} e(x)}$$

$$\lim_{x\to a^-} \left(b(x)\right)^{e(x)} = \left(\lim_{x\to a^-} b(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a^-} e(x)}$$

$$\lim_{x\to a} \left(b(x)\right)^{e(x)} = \left(\lim_{x\to a} b(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} e(x)}$$

És a dir:

Límit en un punt d'una potència entre funcions

El límit (tant per la dreta com per l'esquerra com el general) d'una potència de funcions és igual a la potència del límit de la funció base elevat a al límit de la funció exponent, sempre que aquesta operació estigui definida.

Un exemple:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x^2\right)^{1/x} = (0^+)^{+\infty} = 0 \qquad \text{en canvi} \qquad \lim_{x\to 0^-} \left(x^2\right)^{1/x} = (0^+)^{-\infty} = +\infty$$

O, un altre:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^x = \left(tipus\ 1^\infty\right) = \quad e^\lambda = e, \quad \text{ja que} \quad \lambda = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{x-1} - 1\right)x = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right) = 1$$

3.7- Suma, resta i producte de funcions contínues

Suma, resta i producte de funcions contínues

La suma, la resta i el producte de dues funcions contínues en un punt també és una funció contínua en aquest punt.

Si f i g són dues funcions contínues en el punt x = a, es que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

Però, tal com s'ha dir en paràgrafs anteriors i per la definició de suma de funcions:

$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)$$

ens dóna que el límit de la funció suma coincideix amb la seva imatge, resultant que f + g també és contínua en el punt a.

De la mateixa forma observaríem que la resta i el producte de funcions contínues en un punt també és contínua.

El producte d'una constant per una funció contínua en un punt també és contínua en aquest punt, ja que la constant es pot considerar com una funció, la funció constant, que evidentment és contínua en tots els punts.

Evidentment, si fes funcions que es sumen, o resten, o multipliques, són contínues en una zona més gran que un punt, la funció resultant de l'operació també serà contínua en la mateixa zona.

3.8- Quocient de funcions contínues

> ***Quocient de funcions contínues***
>
> *El quocient de dues funcions contínues en un punt és una funció contínua si la funció divisor no s'anul·la en aquest punt.*

Si f i g són dues funcions contínues en x = a es que

$$\underset{x\to a}{lím}\, f(x) = f(a) \quad \text{i} \quad \underset{x\to a}{lím}\, g(x) = g(a)$$

però tal com s'ha dit en paràgrafs anteriors si g(a) no és zero i per la definició de quocient entre funcions:

$$\underset{x\to a}{lím}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\underset{x\to a}{lím}\, f(x)}{\underset{x\to a}{lím}\, g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

ens dóna que el límit de la funció quocient coincideix amb la seva imatge, o sigui la funció quocient també en contínua en el punt a.

Generalitzant, si les dues funcions són contínues en un espai més ampli que el d'un punt, resultarà que la funció quocient de les dues primeres funcions serà contínua en tot l'espai excepte en els punts en que la funció divisor s'anul·li.

3.9- Límit en un punt d'una composició de funcions

Per simplificar suposarem que la funció *g* és contínua en *x* = a, i que *f* és contínua en el punt *x* = *g*(a).

Considerem les successions $a \pm \frac{1}{n}$ que tendeixen a, una per la dreta i l'altre per l'esquerra.

Per ser g contínua tindrem: *lím g*($a \pm \frac{1}{n}$) = *g*(a), això ens diu que g($a \pm \frac{1}{n}$) és una successió (per la dreta o l'esquerra) que tendeix a g(a), per això, com que f és contínua, tindrem:

$$f\left(\text{lím} g(a\pm\frac{1}{n})\right)=\lim_{x\to a}\left(f(g(x)\right)=\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)$$

Però tal com acabem de dir *lím* $g(a\pm\frac{1}{n}) = g(a)$, que substituint a l'última igualtat:

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=f(\lim_{x\to a}g(x))=f(g(a))$$

Podem dir que si f és contínua el límit pot entrar dins el primer parèntesi, i si g és contínua el límit pot passar dins el segon parèntesi (límit de x és a). I si les dues funcions són contínues la composició també ho serà.

3.10- Continuïtat de les funcions polinòmiques i racionals

És molt fàcil demostrar que la funció identitat f(x) = x és contínua per a qualsevol punt. Com que les imatges de qualsevol successió del domini dóna la mateixa successió, els límits de les dues coincidiran, i coincidiran amb la imatge de la funció. Per això el límit per la dreta, i per l'esquerra, en un punt qualsevol coincideixen amb el valor de la funció, o sigui f és contínua en qualsevol punt.

La funció $f(x) = x^n$ (n natural) també serà contínua en tots el punts, ja que es pot considerar com el producte de n funcions contínues: $x^n = x\cdot x\cdot \ldots \cdot x$ i pel que acabem de dir en el paràgraf 15.7 aquesta també serà contínua.

La funció $f(x) = a\,x^n$ (n natural) en ser el producte d'una funció contínua per una constant també serà contínua, paràgraf 15.7.

Una funció polinòmica , $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, és pot considerar com la suma de funcions, vistes a dalt, contínues en tots els punts. Pel que s'ha dit en el paràgraf 15.7, les funcions polinómiques també seran contínues en tots els punts.

Una funció racional, $f(x)=\dfrac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1x + b_0}$, és el quocient de dues funcions polinòmiques, per això i en vistes del que s'ha comentat en el paràgraf anterior, es pot dir que les funcions racionals són contínues en tots els punts en que no s'anul·la el denominador.

3.11- Continuïtat de les funcions potencials, exponencials i logarítmiques.

Les funcions potencials simples són les que tenen per fórmula a $f(x) = x^r$, on r és un número real. Aquesta funció es pot considerar que é la potència de dues funcions la x i la constant r, ambdues contínues, per això i pel que s'ha vist en el paràgraf 15.6, es compleix

$$\lim_{x\to a} x^r = \lim_{x\to a} x^{\lim_{x\to a} r} = a^r$$

i resulta que la funció potencial és contínua en tot el seu domini.

Per exemple les funcions: $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$, o bé $f(x)=\sqrt[n]{x^m}$ són contínues en tots els seus dominis.

Exactament igual procediríem per les funcions exponencial, recordem que són les que f(x) = r^x, on r és un real. Resultant que les funcions exponencials també són contínues en tot el seu domini.

Per exemple les funcions $f(x)=2^x, f(x)=e^x$ o bé $f(x)=\left(\sqrt{3}\right)^x=\sqrt{3^x}$ són funcions contínues.

Es pot demostrar que la inversa d'una funció contínua també és contínua en els seu corresponen domini, així la funció logaritme que és la inversa de la funció exponencial també és contínua

Per exemple les funcions: $f(x)=\ln x, f(x)=\log x$ o bé $f(x)=\log_b x$ són funcions contínues a $\mathbf{R}^+$.

3.12- Continuïtat de les funcions trigonomètriques

Es pot demostrar que la funció sinus és contínua en tot el seu domini, com que *cos(x) = sin(x + p/2)* es tracta d'una composició de funcions contínues, per això la funció cosinus també és contínua en tot el domini.

Com que $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ es tracte d'un quocient de funcions contínues, per això la funció tangent és contínua en tot el domini excepte en els punt on s'anul·la la funció cosinus (*cos(x)* = 0) que són els punts

$$\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots = \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$$