4 CÁLCUL EFECTIU DE LÍMITS

4.1- Càlcul del límit d'una funció a $+\infty$ i a $-\infty$

Com s'ha comentat en el paràgraf 2.1 per tal de calcular el límit a $+\infty$ sols cal mirar si el domini abasta fins el $+\infty$, substituir la x de la fórmula de la funció per n i calcular el límit de la successió obtinguda, tal com s'ha explicat a la lliçó 12.

Per calcular el límit a $-\infty$, amés de mirar si el domini ho permet, s'ha de substituir la x de la fórmula per –n i calcular el límit de la successió obtinguda. Així:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim f(n) \quad i \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim f(-n)$$

Tant per aquests límits com per a qualsevol altre, s'ha d'aplicar, sempre que es pugui, les operacions indicades en començar la lliçó anterior.

Veieu com exemples:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}(2-4x+2x^2-4x^3) = \lim(2-4n+2n^2-4n^3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{1-2x} = \lim\frac{-3n}{1+2n} = -\frac{3}{2}$$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}) = \lim(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}) = \lim\frac{(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}} =$$

$$\lim\frac{-2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}} = \frac{-2}{+\infty} = 0^-$$

$$c)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x}{1-2x}\right)^{3x-1} = \lim\left(\frac{2n}{1+2n}\right)^{-3n-1} = e^{3/2} = \sqrt{e^3} \quad \text{doncs:}$$

$$\lim\left(\frac{2n}{1+2n}-1\right)(-3n-1) = \lim\frac{-1(-3n-1)}{1+2n} = \lim\frac{3n+1}{1+2n} = \frac{3}{2}$$

4.2- Càlcul del límit en un punt

En primer lloc s'ha de mirar si la funció és contínua, o no, en aquell punt, mireu la lliçó 15 anterior. Si la funció és contínua solament cal trobar la imatge de la funció en aquell punt, aquesta serà el límit.

D'una forma general per calcular el límit per la dreta en el punt x = a, tal com s'ha dit en el primer capítol, solament hem de substituir la x de la fórmula per a+ 1/n i calcular el límit de la successió obtinguda. De la mateixa forma, per calcular el mateix límit per l'esquerra, s'ha de substituir la x per a-1/n i calcular el límit de la successió:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim f\left(a+\frac{1}{n}\right) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim f\left(a-\frac{1}{n}\right)$$

Per exemple:

$$\lim_{x\to 1^+}(x\cdot\ln(x-1)) = \lim\left((1+\frac{1}{n})\cdot\ln(\frac{1}{n})\right) = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim\ln\left(\frac{1}{n}\right) = 1\cdot(-\infty) = -\infty$$

Hi haurà molts casos que aquest mètode serà poc pràctic, pot ser llarg i complicat, però podem intentar altres vies com comentarem a continuació

4.3- Càlcul del límit d'una funció racional tipus $\frac{0}{0}$

Aquest cas pràcticament ja està explicat en l'apartat 13.16. Una funció racional, és el quocient de dos polinomis, ara estem examinant el cas en que el valor del numerador i el del denominador és 0 en el punt on es fa el límit:

$$\lim_{x\to a} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Si el valor del dos polinomis és 0, vol dir (Teorema del Residu) que els polinomis es poden descompondre com a producte de (x – a) per un altre polinomi.

La descomposició dels dos polinomis es pot fer realitzant la divisió del polinomi per x –a, fent-ho pel algoritme clàssic o per la regla de Ruffini.

Un cop feta la descomposició el límit quedarà d'aquesta forma:

$$\lim_{x\to a} \frac{(x-a)(a'_{n-1}x^{n-1} + a'_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a'_1 x + a'_0)}{(x-a)(b'_{m-1}x^{m-1} + b'_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b'_1 x + b'_0)}$$

Sembla, tal com es va comentar en el paràgraf 1.16 que es tracta d'una discontinuïtat evitable, el límit serà igual al de la funció que queda un cop es simplifica el factor x – a .

$$\lim_{x\to a} \frac{a'_{n-1}x^{n-1} + a'_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a'_1 x + a'_0}{b'_{m-1}x^{m-1} + b'_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b'_1 x + b'_0}$$

Si ara tornés a donar 0/0, procediríem un altre cop exactament igual fins que la funció ens quedés contínua o tingui límit infinit.

Exemple:

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{3x^3 + 7x^2 + 5x + 1}$$

Substituint la x del numerador i del denominador per -1 dóna en el dos casos 0. Podem fer, doncs:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+3x^2-1 & x+1 \\ \hline -2x^3-2x^2 & 2x^2+x-1 \\ \hline x^2-1 & \\ -x^2-x & \\ \hline -x-1 & \\ x+1 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3x^3+7x^2+5x+1 & x+1 \\ \hline -3x^3-3x^2 & 3x^2+4x+1 \\ \hline 4x^2+5x+1 & \\ -4x^2-4x & \\ \hline x+1 & \\ -x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Així el límit anterior es pot escriure:

$$\lim_{x\to-1} \frac{2x^3+3x^2-1}{3x^3+7x^2+5x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(2x^2+x-1)}{(x+1)(3x^2+4x+1)} = \lim_{x\to-1} \frac{2x^2+x-1}{3x^2+4x+1}$$

Tornant a substituir la x per -1 torna a donar 0/0. Fent les divisions corresponent, tindrem:

$$\lim_{x\to-1} \frac{2x^2+x-1}{3x^2+4x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(2x-1)}{(x+1)(3x+1)} = \lim_{x\to-1} \frac{2x-1}{3x+1} = \frac{1}{4}$$

4.4- Càlcul del límit indeterminat d'una funció amb radicals

Es tracte de calcular límits com ara $\lim_{x\to3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$ que com veieu ens dóna, en substituir, 0/0. Tal com fèiem en les successions, paràgraf 12.6, multiplicarem i dividirem per $\sqrt{x+6}+3$, així:

$$\lim_{x\to3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} = \lim_{x\to3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x\to3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{x-3}$$

Ara estem en una situació semblant a la del paràgraf anterior, es repeteix un factor en el numerador i en el denominador, així:

$$\lim_{x\to3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{x-3} = \lim_{x\to3}(\sqrt{x+6}+3) = \sqrt{3+6}+3 = 6$$

4.5- Càlcul del límits del tipus e

Es tracte del casos que en substituir el valor del punt a la x de la fórmula dóna 1^{∞}. El procediment, també és igual al que fèiem en el mateix cas en les successions, paràgraf 12.7 i 12.8. Vegem aquest exemple

$$\lim_{x\to1}\left(x^{\frac{1}{x-1}} \right) = e^1 = e, \quad \text{ja que} \quad \lim_{x\to1}(x-1)\frac{1}{x-1} = 1$$

o, aquest altre:

$$\underset{x\to 5}{lím}\left(\frac{3x-5}{x^2-4x+5}\right)^{\frac{1}{x-5}}=e^{-\frac{3}{10}}$$ ja que:

$$\underset{x\to 5}{lím}\left(\frac{3x-5}{x^2-4x+5}-1\right)\frac{1}{x-5}=\underset{x\to 5}{lím}\frac{-x^2+7x-10}{(x^2-4x+5)(x-5)}=\underset{x\to 5}{lím}\frac{(-x+2)(x-5)}{(x^2-4x+5)(x-5)}=$$

$$\underset{x\to 5}{lím}\frac{-x+2}{x^2-4x+5}=\frac{-3}{10}$$

4.6- Càlcul del límits amb composició de funcions

Recordem el que dèiem en el paràgraf 15.9 pels límits d'una composició de funcions. Recordem també, paràgraf ...... , en el que es deia que les funcions elementals: sinus, cosinus, logaritme, potencial i exponencial són funcions contínues en els seus dominis.

Dons bé si volem calcular el límit de, per exemple:

$$\underset{x\to 1}{lím}\sin\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=\sin\left(\underset{x\to 1}{lím}\frac{x-2}{x+1}\right)=\sin\left(-\frac{1}{2}\right)$$

o bé:

$$\underset{x\to 0}{lím}\ln\left(\sqrt{2^x}\right)=\ln\left(\underset{x\to 0}{lím}\sqrt{2^x}\right)=\ln\sqrt{\underset{x\to 0}{lím}\left(2^x\right)}=\ln\sqrt{2^{\underset{x\to 0}{lím}\,x}}=\ln\sqrt{2^0}=\ln\sqrt{1}=\ln 1=0$$

ja que la funció exponencial és contínua en el punt 0 i les funcions arrel quadrada i logaritme són contínues en el punt 1.

4.7- Exercicis

1- Calcula els límits següents:

$\lim_{x\to 3}(-5+3X-X^2-2X^3)$ $\quad \lim_{x\to +\infty}(-5+3X-X^2-2X^3)$ $\quad \lim_{x\to -\infty}(-5+3X-X^2-2X^3)$

$\lim_{x\to a}(-5+3X-X^2-2X^3)$ $\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x}$ $\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-2x+1}$

$\lim_{x\to a}(x^2-1)^{(x+3)}$ $\quad \lim_{x\to -2}\frac{3x-2}{x^3-4}$ $\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{5x^2-3x+4}{x^3-1}$ $\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{5x3-3x+4}{x^3-1}$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{4-3x-5x3}{x^3-1}$ $\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{4-3x-5x3}{x^3-1}$ $\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}+4}{x+5}$ $\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}+4}{x+5}$

$\lim_{x\to 1/2}\frac{2x^2+3x-2}{2x^2-7x+3}$ $\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-8x^2+20x-16}$ $\quad \lim_{x\to -2}\frac{5x-15}{(x+2)(x-3)}$

$\lim_{x\to 3}\frac{5x-15}{(x+2)(x-3)}$ $\quad \lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{x-4}$ $\quad \lim_{x\to 3}\frac{2-\sqrt{x+1}}{x-3}$ $\quad \lim_{x\to 2^-}\frac{4}{\sqrt{x-2}}$

$\lim_{x\to 2+}\frac{4}{\sqrt{x-2}}$ $\quad \lim_{x\to 3}\frac{8}{|x-3|}$ $\quad \lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$ $\quad \lim_{x\to -1}\frac{4x^3+x+5}{3x^4-x-4}$

$\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{2x^2-x-1}{x^2-3x+2}}$ $\quad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-x-1}-\sqrt{x+2}}{2x-6}$ $\quad \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x^2-ax+a^2}$

$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{5-x}-2\right)}{x^2-6x+5}$ $\quad \lim_{x\to +\infty}\left[\left(\frac{2x+1}{x}-2\right)\sqrt{x}\right]$ $\quad \lim_{x\to -\infty}\left[\left(\frac{2x+1}{x}-2\right)\sqrt{x}\right]$

$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2x+1}\right)$ $\quad \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2x+1}\right)$

$\lim_{x\to 4}\frac{\frac{2x}{x-4}}{2+\frac{1}{x-4}}$ $\quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{1}{1-\frac{x}{x+1}}\right)$ $\quad \lim_{x\to 2^+}\log\,(x-2)$ $\quad \lim_{x\to +\infty}\log\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to +\infty}2^x$ $\quad \lim_{x\to -\infty}2^x$ $\quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\quad \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\quad \lim_{x\to +\infty}2^{\frac{1}{x}}$ $\quad \lim_{x\to -\infty}2^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to 2}\sqrt{\log_4 2^x}$ $\quad \lim_{x\to -\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad \lim_{x\to \pi}\cos\,(2x)$ $\quad \lim_{x\to -\infty}\tan\frac{\pi x}{2x-1}$

$\lim_{x\to +\infty}\tan\frac{\pi x}{2x-1}$ $\quad \lim_{x\to 1}\log\left(\cos\left(x^2-1\right)\right)$ $\quad \lim_{x\to 2}\frac{2}{|x-2|}$ $\quad \lim_{x\to 2}\left|x^4-4\right|$

$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ $\quad {}^3\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x-2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ $\quad \lim_{x\to 5}(\log(2x))^{\frac{5}{(x-5)^2}}$

$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x^2-4x+2}{1+3x^2}\right)^{2x-1}$ $\quad \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{x}{x^3-2x-2}\right)^{x^2}$ $\quad \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}\ (a\neq 0)$

$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{3x}{x^2-1}}$ $\lim_{x\to 2}\sqrt[x-2]{3x-5}$ $\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$ $\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-1}}$

2 – De la funció definida com $f(x)=\begin{cases}1-x & si\ \ x<0\\ 1/2 & si\ \ x=0\\ x^2 & si\ \ x>0\end{cases}$ calcula els límits per la dreta i per l'esquerra de f en el punt x=0. Quina és la imatge de f en el punt 0?

3 – Troba tots els punts de continuïtat i de discontinuïtat de la funció *f* definida per tot **R**

$$f(x)=\begin{cases}5 & si\ \ x\le -2\\ x^2 & si\ \ -2<x<3\\ x+6 & si\ \ 3\le x\end{cases}$$

4 – Calcula el valor que ha de tenir *a* per què la funció *f* sigui contínua en tot el seu domini

$$f(x)=\begin{cases}ax & si\ \ x<0\\ x^2-2 & si\ \ x\ge 0\end{cases}$$

5 – Calcula el valor que han de teni *a*, *b* i *c* per què la funció següent sigui contínua en tot $\mathbf{R}^+$

$$f(x)=\begin{cases}a\sqrt{x} & si\ \ 0\le x<1\\ b(x-2)+2 & si\ \ 1\le x\le 3\\ c & si\ \ x>3\end{cases}$$

6 -