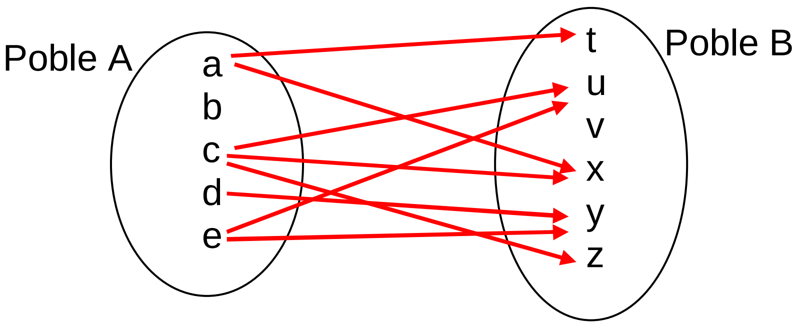
1 FUNCIONS, conceptes general

1.1- Relacions

Considerem dos conjunts, un està format pels ciutadans d'un poble A, l'altre té per elements els ciutadans d'un poble veí B. Establirem una relació entre els dos conjunts d'aquesta forma: els ciutadans del poble A estaran relacionats amb els ciutadans del poble B que hi tingui amistat i no estarà relacionat amb els ciutadans del poble B que no hi tinguin amistat..

En una relació hi intervenen dos conjunts que juguen un paper diferent, es parla del primer conjunt (el poble A) i del segon conjunt (el poble B). També se'ls anomenen conjunt origen i conjunt final respectivament.

Per simplificar pensarem que el poble A està format per cinc persones, i que el poble B està format per sis persones: A = {**a, b, c, d, e**} i B = {**t, u, v, x, y, z**}
La relació esmentada es pot expressar amb aquest esquema:



A la vista de l'esquema podem dir que el ciutadà a es relaciona amb els ciutadans t i x, o que el ciutadà b no es relaciona amb ningú del poble B, etc.

Tal com hem dit són els ciutadans del poble A que es relacionen amb els del B. Si volguéssim que els ciutadans de B es relacionessin amb els d'A hauríem de definir una altre relació.

Encara que sigui poc formal podem dir

> ***Una relació entre dos conjunt***
> *Es disposa de dos conjunts, un que es diu primer conjunt i un altre que es diu segon conjunt. Una relació és una propietat que permeti formar parelles d' elements del primer conjunt amb elements del segon conjunt.*

1.2- Funcions

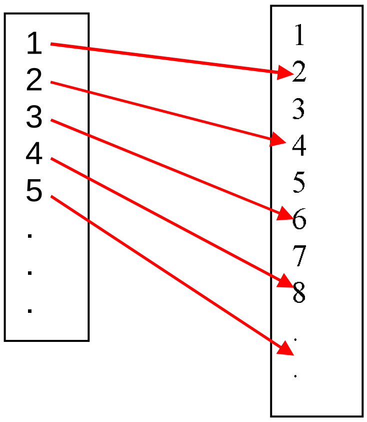
Funció
A les relacions que compleixen amb aquestes condicions:

- *Els dos conjunts són numèrics.*
- *Tots els elements del primer conjunt es relacionen amb un i solament amb un element del segon conjunt.*

se les denomina funció

Com que tots els conjunts numèrics estudiats fins ara estan continguts dins del nombres reals, es pot dir que qualsevol subconjunt dels reals poden ser el primer i segon conjunt d'una funció.

Per exemple la relació entre els nombres naturals (1r conjunt) i els nombres naturals (2n conjunt) de forma que a cada natural del primer conjunt li correspongui el seu doble, és una funció. L'esquema d'aquesta funció és:



Aquesta relació es tracte d'una funció ja que compleix les condicions requerides, els dos conjunts són numèrics i cada un del elements del primer conjunt es relaciona amb un i solament un element del segon conjunt (dels elements del primer conjunts els hi surt una i solament una fletxa).

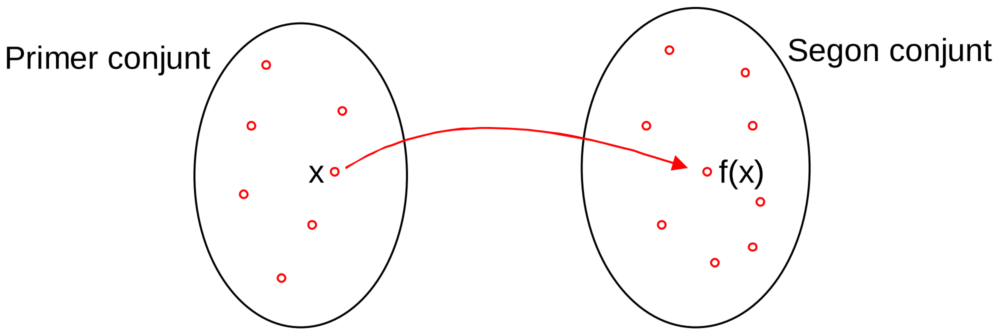
Un altre exemple de funció és la que té per primer conjunt l'interval (0, 1) i té com a segon conjunt a tots els reals, de manera que cada element del primer conjunt es relacioni amb el seu invers. Aquesta relació és una funció ja que compleix amb les condicions exigides.

Hem de fer notar que per definir correctament a una funció, tal com s'ha fet en els dos exemples anteriors, s'ha de donar els dos conjunts i la forma de trobar els elements relacionats.

1.3- Nom d'una funció, element imatge i element antiimatge

Per simplificar el llenguatge es sol indicar a una funció per una lletra, pot ser qualsevol lletra, però les més usades són f, g, h, . . Així es pot dir *la funció f està definida entre l'interval [-1, 1] i els reals positius* R^+ *de forma que a cada* *element li correspon el seu quadrat*. Un cop dit això es parlarà de *la funció f* sense haver de fer esment, un altre cop, de totes les seves característiques. Direm que f és el **nom** de la funció.

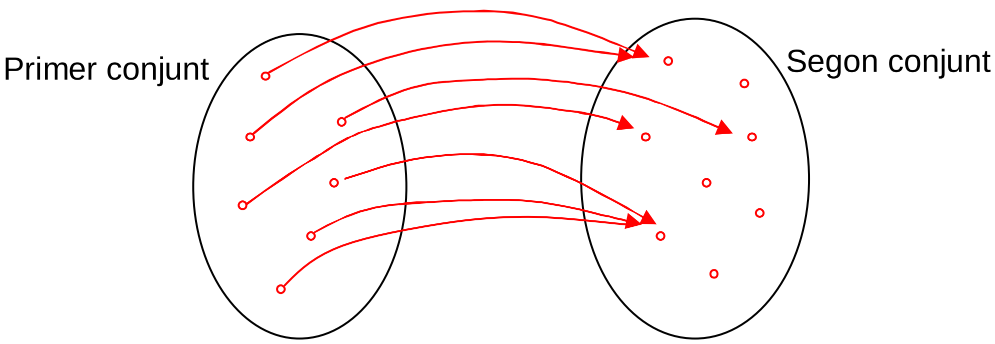
Si x és un element del primer conjunt d'una funció f, x ha de tenir un sol element del segon conjunt que si relaciona, a aquest element s'anota com f(x). D'una forma esquemàtica



L'element f(x) es diu que és la **imatge** de x i que l'element x és la **antiimatge** de f(x). Noteu que un element x del primer conjunt ha de tenir una sola imatge, en canvi un element del segon conjunt pot tenir, cap, una o més d'una antiimatge.

Si f(x) és la imatge de x, molt freqüentment es diu que la funció f **aplica** x a f(x).

L'esquema següent representa una funció en que cada element del primer conjunt té una única imatge i en canvi hi ha elements del segon conjunt que no tenen cap antiimatge, d'altres que en tenen una, i d'altres que en tenen més d'una.



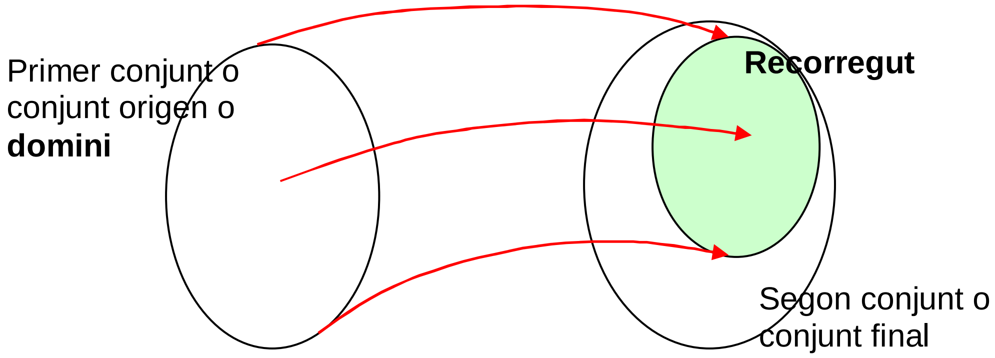
1.4- Domini i recorregut

El primer conjunt d'una funció també es diu **domini** de la funció. O sigui, tenim tres noms que designen al mateix concepte: primer conjunt, conjunt origen i domini.

En el segon conjunt d'una funció hi ha elements que no tenen antiimatge i hi ha elements que en tenen alguna. La part del segon conjunt format per els elements que tenen alguna antiimatge es diu **recorregut** de la funció.

Com es pot veure el recorregut d'una funció pot coincidir amb el segon conjunt, o bé, pot ser un subconjunt estricte d'aquest.

El següent esquema representa aquests conjunts acabats de definir.



1.5- Fórmula d'una funció

> ***Fórmula d'una funció***
> *Són els càlculs, o passos, que s'han d'efectuar per trobar la imatge d'un valor genèric x del domini.*

Si una funció f aplica x al seu doble, la fórmula d'aquesta funció és *el doble,* que abreujadament s'expressa així: f(x) = 2x

Pel cas de que la funció f aplica un valor al seu quadrat, la fórmula s'expressa: $f(x) = x^2$.

Pel cas que la funció f apliqui un nombre al seu invers, la fórmula s'expressa: f(x) = 1/x.

És freqüent expressar la fórmula de la funció escrivint y com a imatge de x, d'aquesta forma, les fórmules anteriors s'escriurien:

$$y = 2x, \qquad y = x^2 \qquad \text{i} \qquad y = 1/x$$

1.6- Expressió sintètica d'una funció

Usant els conceptes que acaben d'introduir, recordem que per definir correcta i completament a una funció cal donar el seu domini, el seu conjunt final i la seva fórmula. Una forma d'expressar a una funció i que dóna una idea molt visual de la funció és:

$$\begin{aligned} f:(0,1) &\to \mathbf{R}^+ \\ x &\mapsto {}^1\!/_x \end{aligned}$$

en la que hi ha tots el elements necessaris per la definició:

domini conjunt final

nom $f:(0,1) \to \mathbf{R}^+$

$x \mapsto {}^1\!/_x$ fórmula

Altres exemples de definició de funcions fets d'aquesta forma són:

$$g:\mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad h:[0,2\pi] \to [-1,1] \qquad j:(0,+\infty) \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto 3x-6 \qquad x \mapsto \sin x \qquad x \mapsto \log x$$

1.7- Gràfica cartesiana

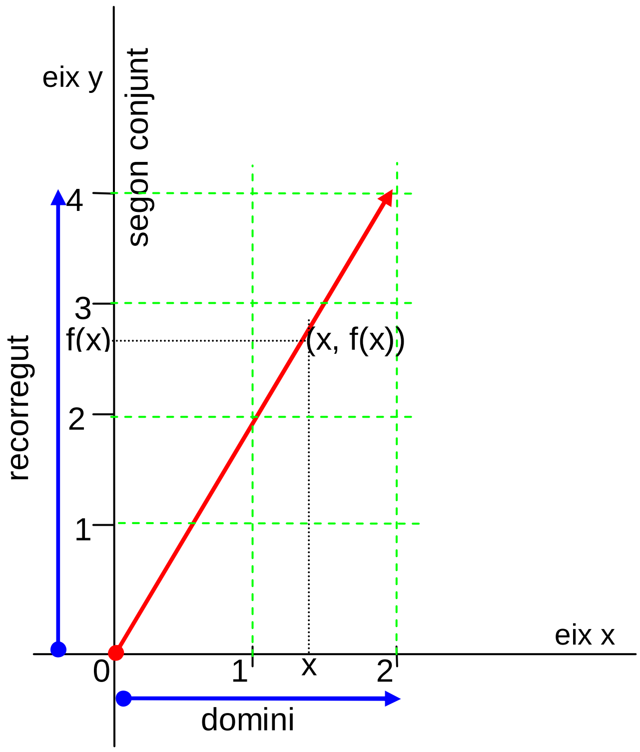
En paràgrafs anteriors hem vist uns esquemes gràfics per representar funcions, ara farem un altre representació gràfica dins un pla de coordenades cartesianes determinat per dos eixos, l'eix horitzontal representarà al domini i l'eix vertical al conjunt final. Cada un dels punts del pla, o bé cada una de les parelles (x , f(x)), formades per un valor del domini x com a primera coordenada i la seva imatge f(x) com a segona coordenada, formarà un punt de la gràfica. El conjunt de tots els punts construïts d'aquesta forma formarà la gràfica de la funció.

L'eix horitzontal també s'anomena eix x, o també es diu eix de les abcises. L'eix vertical també es diu eix y, o també eix de les ordenades.

Per exemple, la gràfica de la funció

$$f : [0, 2) \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto 2x$$

és:



En aquest exemple, el domini és un interval tancat per l'esquerra i obert per la dreta, això vol dir que el 0 pertany al domini però no el 2. Aquest fet s'ha indicat amb un punt a l'esquerra (sobre el 0) i una punta de fletxa a la dreta (sobre el 2). El recorregut també és un interval tancat pel 0 i obert pel 4 i ho hem representat de la mateixa forma.

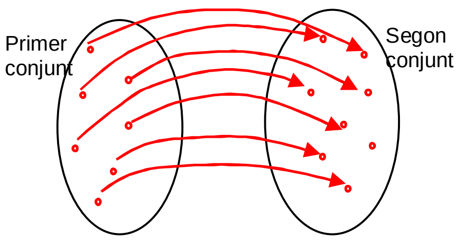
La gràfica de la funció, el segment de color vermell també és un segment de la mateixa forma que el domini o el recorregut. El punt (0, 0) pertany a la gràfica de la funció, per això l'hem representat amb un punt. L'altre extrem, el (2, 4) no pertany a la gràfica, ja que el 2 no és del domini, per això hem acabat el segment amb una punta de fletxa.

El domini d'aquesta última funció és tot **R**, o sigui que no es pot representa fins el final, ni per la dreta ni per l'esquerra, aquí s'ha agafat els valors des del -6 al 6.

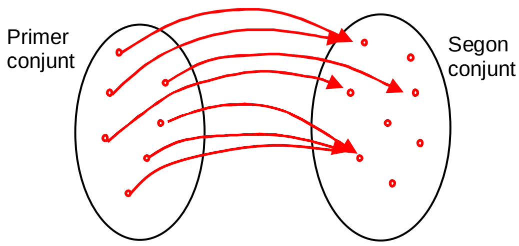
1.8- Funcions injectives

> ***Funció injectiva***
>
> *Una funció és injectiva si tots els elements del segon conjunt tenen com a màxim una antiimatge.*

Per l'esquema vist anteriorment es veu molt fàcilment la condició d'injectiva:

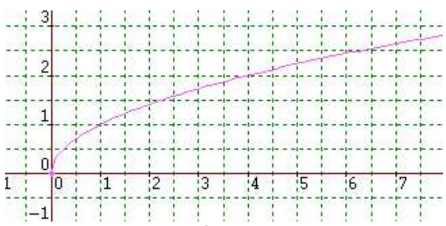


Funció injectiva

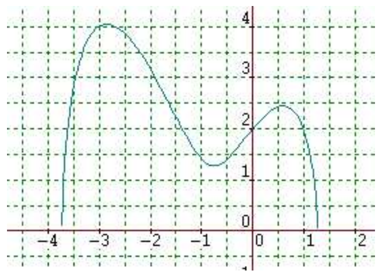


Funció no injectiva

Amb les gràfiques cartesianes es veu quan una funció és injectiva si qualsevol recta horitzontal que es pugui fer des de qualsevol punt del recorregut solament talla a la gràfica en un punt. Si alguna d'aquestes rectes horitzontals tallen a la gràfica en més d'un punt, la funció, no és injectiva.



Funció injectiva



Funció no injectiva

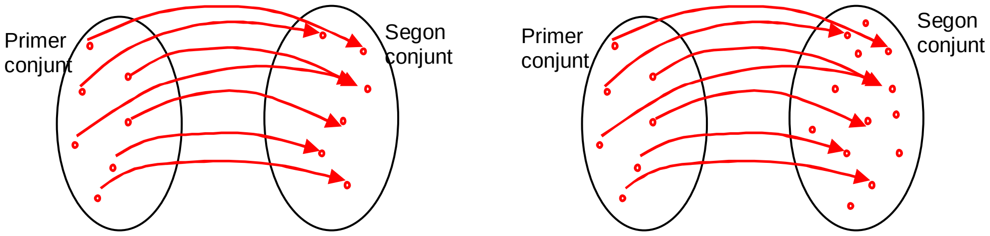
Si coneixem la fórmula de la funció, i des d'un punt de vista algebraic, podem veure que la funció és injectiva si hi ha dos elements del domini que tinguin la mateixa imatge es que el dos elements han d'ésser el mateix, o sigui d'una altre forma, no hi pot haver dos elements diferents del donimi amb la mateixa imatge:

> ***Funció injectiva***
> *Una funció és injectiva si es compleix:* $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

1.9- Funcions exhautives

> ***Funció exhaustiva***
> *Una funció és exhaustiva si tots els elements del segon conjunt tenen alguna antiimatge.*

En l'esquema es pot veure clarament que en el primer cas tots els elements del segon conjunt tenen antiimatges (una o més), en canvi, en el segon cas no:

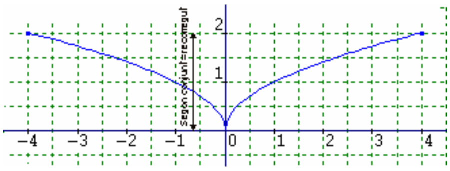


Funció exhaustiva *Funció no exhaustiva*

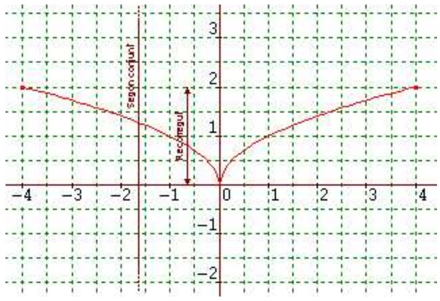
Una altre forma de definir a una funció exhaustiva és:

> ***Funció exhaustiva***
> *Una funció és exhaustiva si el segon conjunt coincideix amb el recorregut.*

En les gràfiques cartesianes es veurà que una funció és exhaustiva si per una recta horitzontal que passi per qualsevol punt del segon conjunt sempre talla a la gràfica com a mínim en un punt:



Funció exhaustiva



Funció no exhaustiva

La primera funció es pot definir com
$$\begin{array}{l} f:[-4,4] \to [0,2] \\ \quad x \quad \mapsto \sqrt{|x|} \end{array}$$
mentre que la segona es pot definir:
$$\begin{array}{l} f:[-4,4] \to \mathbf{R} \\ \quad x \;\mapsto \sqrt{|x|} \end{array}$$

Fixeu-vos que es pot passar d'una funció no exhaustiva a una altre que ho sigui solamant canviant el segon conjunt pel seu recorregut i mantenint la mateixa fórmula. Per això podem dir que la importància del segon conjunt és escassa, a vegades ni es menciona en la definició, i en aquests casos es considera com a segon conjunt un que inclogui a totes les imatges del domini, o a vegades més gran.

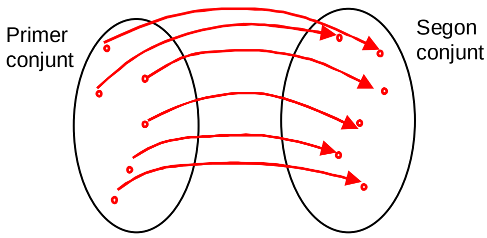
1.10- Funcions bijectives

> ***Funció bijectiva***
> *Una funció és bijectiva és a la vegada injectiva i bijectiva.*

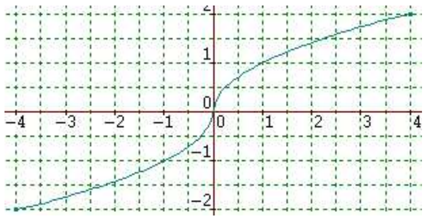
Tenint en compte les últimes definicions, es pot dir

> ***Funció bijectiva***
> *Una funció és bijectiva si cada element del segon conjunt té una i solament una antiimatge.*

Un esquema d'una funció bijectiva és:



I en coordenades cartesianes d'una funció de domini [-4, 4] i de conjunt final [-2, 2].



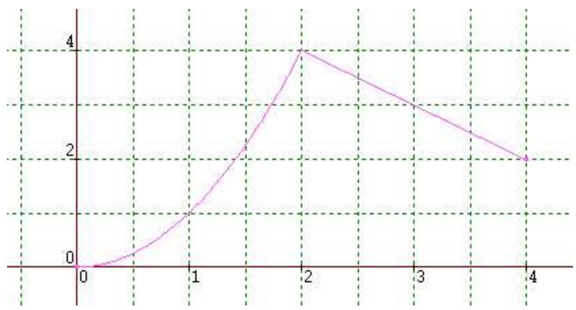
Noteu que una funció bijectiva fa correspondre a cada un del elements del domini un, i sols un, del conjunt final. I al revés, a cada element del conjunt final té una, i solament una, antiimatge en el domini.

1.11- Funcions definides a trossos

A vegades una funció té el domini dividit a trossos i per a cada un d'ells la funció té una fórmula diferent. Per exemple podem definir una funció en el domini [0, 4] de manera que a [0,2] tingui la fórmula x^2 i que a (2, 4] tingui la fórmula 6 – x. Aquesta funció l'expressarem així:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \in [0,2] \\ 6-x & si \quad x \in (2,4] \end{cases}$$

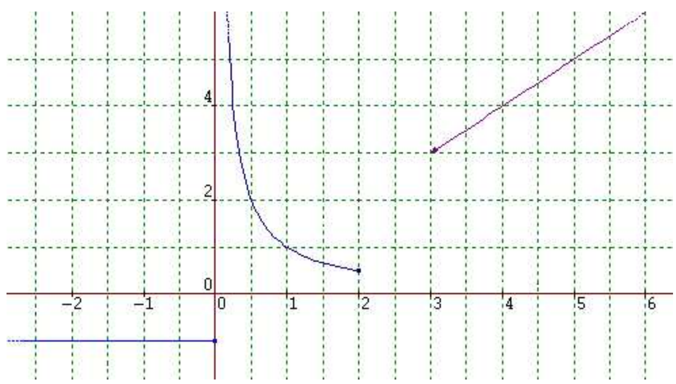
La seva gràfica cartesiana és:



Si considerem ara la funció:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad -2 < x \le 0 \\ 1/x & si \quad 0 < x \le 2 \\ x & si \quad x > 3 \end{cases}$$

la seva gràfica és:



Fixeu-vos que les parts de domini no tenen perquè ser adjacents ni els trossos de gràfica tenen que enllaçar.

1.11- Exercicis

1. Digues una frase, per cada parella de conjunts A i B, que sigui una relació entre els dos conjunts:

A="alumnes del teu centre"	B="professors del teu centre"
A="tots els possibles segments d'un pla"	B="tots els punts d'un pla"
A="tots els rius europeus"	B="tots els països europeus"
A="els nombres naturals"	B="els nombres enters"
A="els nombres reals"	B="els nombres naturals"

2. De les següents relacions digues quines són funcions, quines no ho són i el perquè:
a) Entre els nombres naturals i els nombres naturals, "a cada nombre li correspon el seu triple"
b) Entre els nombres naturals i els nombres naturals, "a cada nombre li correspon deu unitats menys que ell mateix"
c) Entre els nombres racionals i els nombres enters, "a cada racional li correspon el menor de tots els enters majors que ell mateix"
d) Entre els 22 jugadors d'un equip de futbol i els nombres naturals de l'1 al 22, "a cada jugador li correspon el seu número de camiseta"
e) Entre els nombres reals no negatius i els reals, "a cada número li correspon la seva arrel quadrada"

3. Expressa de la forma sintètica cada una de les funcions que has trobat en l'exercici anterior.

4. Un garatge cobra 3 euros per cada hora o fracció d'aparcament. Dibuixa la funció que dóna el preu del aparcament a partir del temps d'estacionament. Agafa un temps de entre 0 i 4 hores.

5. Una certa funció té per fórmula a $f(x) = 2x^2 - 3$. Calcula les imatges dels valors: -3, -1, 0, 1, i 3. Calcula també totes les antiimatges de: 47, 29, 5, -3 i -5.

6. Tant el domini com el recorregut de les següents funcions són una part dels nombres reals, calcula el màxim domini possible de cada una d'elles:

$$f(x) = 5 - 2x, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad j(x) = \frac{2x-1}{x}, \quad k(x) = \frac{1}{x^2 - 4},$$

$$m(x) = \sqrt[2]{4 - x^2}, \quad n(x) = \ln\,(x) \quad , \quad p(x) = \tan\,(x) \quad , \quad q(x) = \log_2(25 - x^2) \quad ,$$

$$r(x) = \sqrt{2x^2 + 5x - 3}, \quad s(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)},$$

$$t(x) = \frac{x-4}{(x-1)(x-2)(x-3)}, \quad u(x) = \sin\,(-x)$$

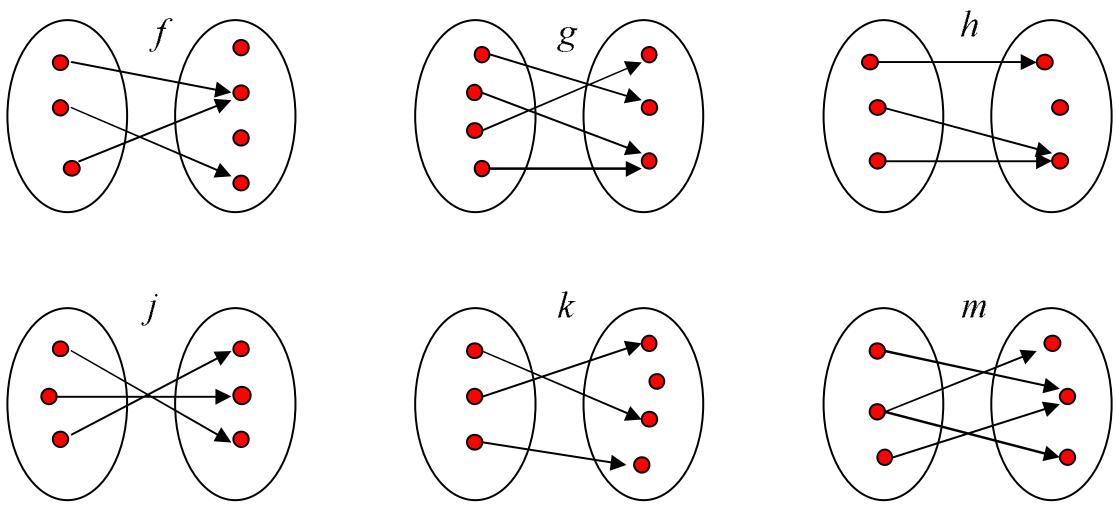
7. Indica quin és el domini i el recorregut de les funcions següents:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad -2<x<0 \\ 1/x & si \quad 0<x<2 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} \cos x & si \quad x<\pi \\ x & si \quad x\geq 4 \end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases} |x-4| & si \quad x>2 \\ x^2 & si \quad x\leq 2 \end{cases}$$

$$j(x)=\begin{cases} -x & si \quad -2<x\leq 1 \\ \sqrt{x} & si \quad 1<x\leq 4 \\ 2 & si \quad x\geq 5 \end{cases} \qquad k(x)=\begin{cases} -8 & si \quad -5<x<3 \\ x^3 & si \quad -2<x<2 \\ 8 & si \quad 3<x<5 \end{cases}$$

8. Representa gràficament de forma cartesiana cada una de les funcions de l'exercici anterior.

9. Els esquemes següents volen indicar funcions, digues quines són les funcions injectives, les exhaustives, les bijectives, les que no tenen cap d'aquestes propietats i les que no són ni funcions



10. Dibuixa les gràfiques cartesianes de 4 funcions de forma que el domini sigui [0,2] i el recorregut [0, 4], de manera que una sigui injectiva però no exhaustiva, una altre sigui exhaustiva però no injectiva, una altre sigui bijectiva i l'última que no sigui ni injectiva ni exhaustiva.

11. Demostra que les funcions del tipus $\begin{array}{l} f:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \\ x\mapsto ax+b \end{array}$ amb $a\neq 0$ sempre són bijectives.

12. Les següents funcions no són exhaustives, canvia el seu segon conjunt per un altre a fi de que sense canviar res més quedin exhaustives.

$$\begin{array}{l} f:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \\ x\mapsto x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} g:\mathbf{R}-\{0\}\to\mathbf{R} \\ x\mapsto 1/x \end{array} \qquad \begin{array}{l} h:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \\ x\mapsto \sin x \end{array} \qquad \begin{array}{l} j:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \\ x\mapsto (x+2)(x-3) \end{array}$$

13. Un cop adaptat el segon conjunt de les quatre funcions anteriors retalla els dominis de manera que les quatre quedin bijectives.

14. Un cop hagin quedat bijectives representa gràficament les quatre funcions anteriors.

15. Defineix una funció de forma sintètica de manera que la imatge del 1 sigui el 2, que la imatge del 2 sigui el 0 i que no hi hagi imatges pels valors negatius.

16. Defineix una funció amb les mateixes característiques que la del problema anterior, però ara defineix-la a trossos.

17. Les gràfiques següent representen funcions definides a trossos, troba les seves fórmules.