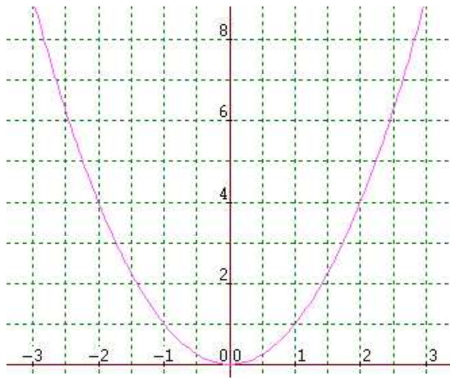
2 ALGUNES FUNCIONS SIMPLES

2.1- Funció x^2

El domini de la funció f(x) = x^2 està format per tots els reals, i les imatges es troben elevant al quadrat. Calculem algunes imatges:

x:	-3	-2	-1	-0,5	-0,25	-0,1	0	0,1	0,25	0,5	1	2	3
4-x^2:	9	4	1	0,25	0,0625	0,01	0	0,01	0,0625	0,25	1	4	9

que si es col·loquen en un pla de coordenades dóna la gràfica



El recorregut d'aquesta funció és la semirecta $[0,+\infty)$ ja que totes les imatges són positives i la imatge del 0 és 0. No és una funció injectiva ja que tot els valors positius del recorregut tenen dues antiimatges. Aquest tipus de gràfica d'aquesta funció es diu paràbola.

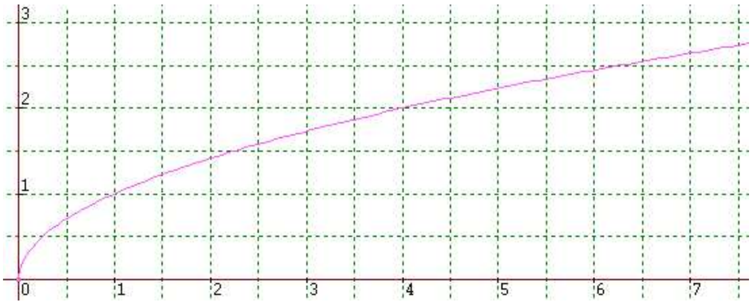
El punt (0, 0) es diu vèrtex de la paràbola, La gràfica és simètrica, ja que $x^2 = (-x)^2$ i l'eix y és l'eix de simetria de la gràfica. El vèrtex divideix la gràfica en dues parts completament simètriques, cada una d'aquestes parts es diu branca.

2.2- Funció $\sqrt{x}$

El domini de la funció f(x) = $\sqrt{x}$ és la semirecta $[0,+\infty)$ doncs no es pot calcular les arrels quadrades de valors negatius. Calculem algunes imatges:

x:	0	0,2	0,25	0,49	1	2	4	6	9
$\sqrt{x}$ **:**	0	0,4	0,5	0,7	1	1,41	2	2,449	3

i col·locades en un pla, dóna una gràfica semblant a una de les branques d'una paràbola però tombada. En realitat és exactament igual que la branca de la paràbola, només que ha girat 90º, tal com es veurà més endavant.



$f(x) = \sqrt{x}$

Aquesta funció és injectiva ja que per cada valor del recorregut solament té una antiimatge. Si y és un valor del recorregut la antiimatge és y^2 i no nhi ha cap més. L'antiimatge del 1 és 1, la del 2 és 4, la del 3 és 9, etc..

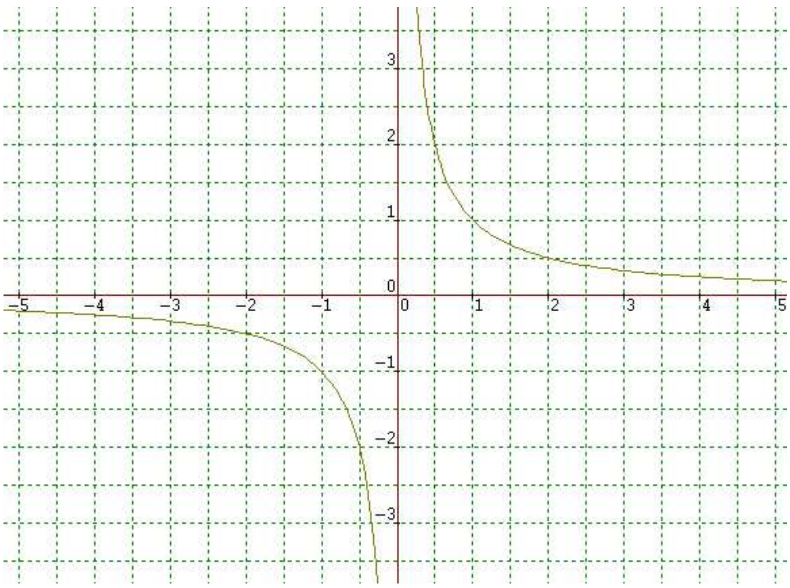
2.3- Funció 1/x

Per qualsevol valor real x es pot fer la divisió 1/x, excepte pel valor 0. Es po considerar que el domini de la funció f(x) = 1/x és tot **R** excepte el valor 0.

Fixem-se que, per valors positius, quant més gran sigui x més petit serà la imatge 1/x, i quan més a prop del zero sigui x més gran serà la imatge 1/x. Una situació semblant passa pel valors negatiu però amb imatges negatives. Calculem algunes imatges:

x::	-5	-4	-3	-2	-1	-0,5	-0,25	-0,1	0,1	0,25	0,5	1	2	3	4	5
1/x::	-0,2	-0,25	-0,33	-0,5	-1	-2	-4	-10	10	4	2	1	0,5	0,33	0,25	0,2

que representades donen:



$f(x) = 1/x$

Aquest tipus de gràfica es diu hipèrbola. Mireu que té dues parts separades, es diu que la hipèrbola té dues fulles. Fixeu-se el que passa a l'entorn del punt 0: a mida que els valors de x es van acostant a 0 les corresponent imatges es van fent més grans (més grans i negatives si s'acosta al 0 amb valors negatius).

El recorregut d'aquesta funció és el conjunt del reals excepte el 0, cada un d'aquests valors té una antiimatge si y és un valor del recorregut, la seva antiimatge és 1/y, ja que 1/1/y = y. I com que aquesta antiimatge és única es pot dir que la funció és injectiva.

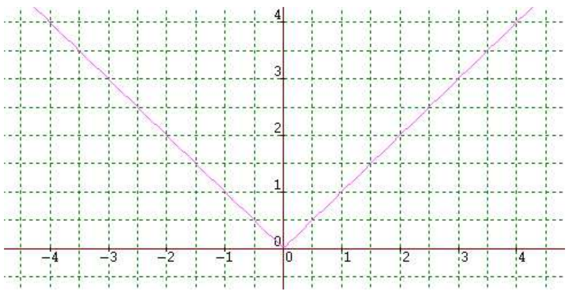
2.4- Funció valor absolut

Recordem que el valor absolut d'un número positiu és el mateix número, que el valor absolut d'un número negatiu és el mateix canviat de signe, i que el valor absolut de 0 és 0. El valor absolut de x s'indica com |x|.

La funció valor absolut té per domini tot **R** i aplica a cada número el seu valor absolut i la seva fórmula s'escriu:

$$f(x) = |x|$$

Aquesta funció aplica tots el positius i el zero en el mateix i aplica el negatius en el seu simètric. Per això el recorregut de la funció és la semirecta $[0, +\infty)$. La funció no és injectiva ja tots els valors positius del recorregut tenen dues antiimatges. La seva gràfica és:



$f(x) = |x|$

Pot ser que el absolut d'una fórmula sigui més complicat que el de la funció anterior, per exemple estudiem la funció

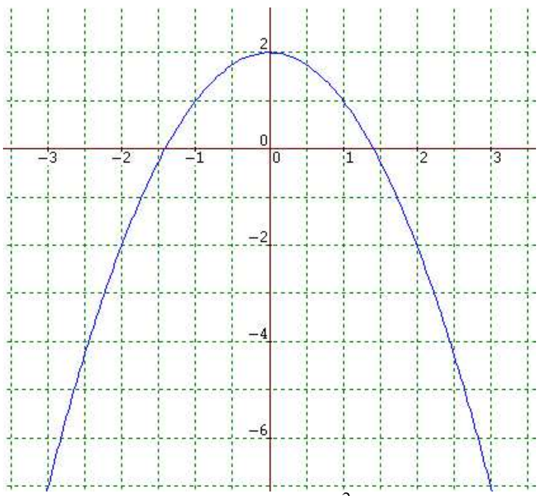
$$f(x) = |2 – x^2|$$

En primer lloc, per simplificar, representem gràficament la funció $g(x) = 2 – x^2$ de la mateixa fórmula que f però sense el valor absolut. Per fer-ho calculem les imatges d'uns quants valors:

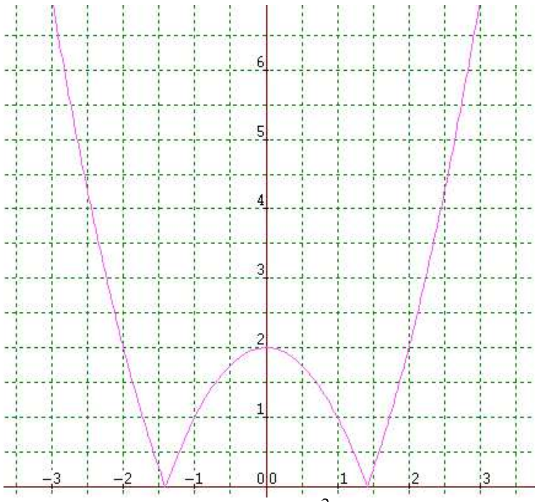
x:	-3	-2	-1	-0,5	-0,25	-0,1	0	0,1	0,25	0,5	1	2	3
4-x^2:	-7	-2	1	1,75	1,9375	1,99	2	1,99	1,9375	1,75	1	-2	-7

Que representats gràficament resulta la primera gràfica que ve a continuació.

La gràfica de f coincidirà amb la de g en les parts on g tingui imatges positives, en canvi en les parts on g tingui les imatges negatives f tindrà les imatges simètriques, o sigui positives. Fixeu-vos en les dues següents gràfiques; les branques que en la primera gràfica cauen cap avall (valors negatius), en la segona estan girats cap amunt (valors positius).



$g(x) = 2 - x^2$



$f(x) = |2 - x^2|$

2.5- Funció part entera

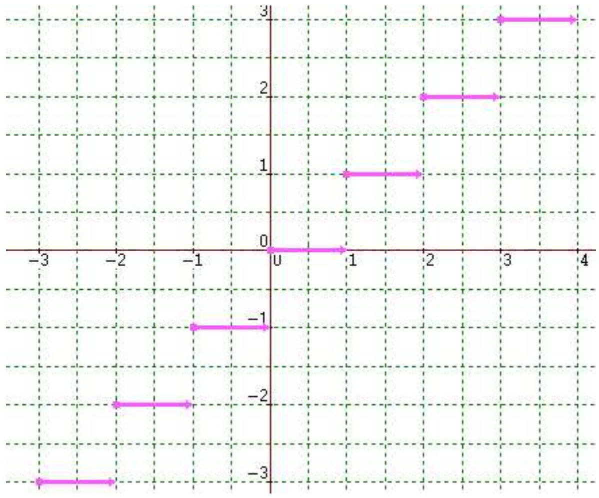
Es pot definir com a funció entera, i la indicarem amb la lletra E, la que té per domini tots els reals i la imatge d'un valor x qualsevol és *el major de tots els enters que són menors o iguals a x.*

Si x és 3,65, tots els enter menors o iguals que x són: 3, 2, 1, 0, -1, ...El més gran de tots ells és 3. O sigui E(2,65) = 3.

Si x és 4, tots els enter menors o iguals que x són: 4, 3, 2, 1, ...El més gran de tots ells és 4. Tenim que E(4) = 4.

Si x és -2,15, tots els enter menors o iguals que x són: -3, -4, -5, -6, ... El més gran de tots ells és -3. Per això E(-3,15) = -3

Tos els reals de l'interval [0,1) tenen per imatge a 0, tots els de [1, 2) tenen per imatge a 1, etc. I per la banda dels negatius, tots els reals de [-1, 0) tenen per imatge a -1, tots els de [-2, -1) tenen per imatge a -2, etc. El recorregut de la funció part entera és doncs els nombres enters. I la seva gràfica és espècie d'escala:



E(x)

2.6 – Funció part decimal

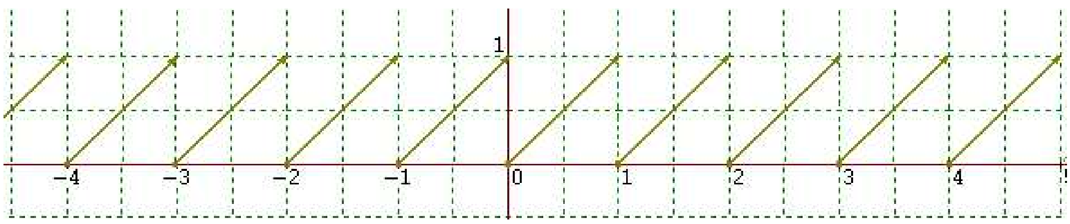
La funció *part decimal* té com a domini a tots els reals i la imatge d'un real qualsevol x és la diferència entre el propi x i la seva part entera.

Si x és 3,65, la part decimal serà 3,65 – 3 = 0,65. O sigui D(3,65) = 0,65

Si x és 4, la part decimal serà 4 – 4 = 0. O sigui D(4) = 0.

Si x és -2,15, la part decimal serà -2,15 – (-3) = -2,15 + 3 = 0,85. Tenim que D(-2,15) = 0,85.

Si x és positiu i està expressat en forma decimal, D(x) és realment els decimals de x . Però si x és negatiu D(x) és el complementari a 1 dels decimals de x. El recorregut de D és l'interval [0,1). I la seva gràfica és



D(x)

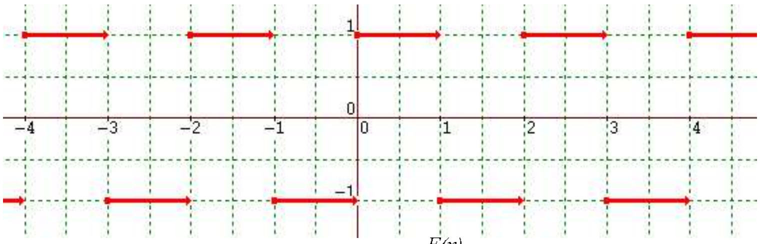
A vegades a aquesta funció se li diu funció dents de serra.

2.7 – Funció dentada

La funció dentada té com a domini tots els reals i es pot definir així:

$$f(x) = (-1)^{E(x)}$$

Com que part entera té com a imatges els enters, les imatges de la funció dentada seran -1 elevat a un enter, si l'enter és parell el resultat és 1, però si l'enter és imparell el resultat és -1. O sigui que el recorregut d'aquesta funció solament són dos valors {-1, 1}. La gràfica de la funció és:



$f(x) = (-1)^{E(x)}$

2.8 – Exercicis

1. Dibuixa pel domini [-3, 3] les funcions: funcions:
$f(x)=4x^2,\quad g(x)=2x^2,\quad h(x)=x^2,\quad j(x)=\frac{1}{2}x^2 \quad \text{i} \quad k(x)=\frac{1}{4}x^2$

2. Dibuixa amb el domini [-3, 3] les funcions:
$f(x)=-4x^2,\quad g(x)=-2x^2,\quad h(x)=-x^2,\quad j(x)=-\frac{1}{2}x^2 \quad \text{i} \quad k(x)=-\frac{1}{4}x^2$

3. Representa les següents funcions de manera que tinguin per recorregut l'interval [0,3]:
$$f(x)=\sqrt{x-3},\quad g(x)=\sqrt{x},\quad h(x)=\sqrt{x+3}$$

4. Agafant com a domini l'interval [-4, 4]-{0} representa les funcions:
$f(x)=\frac{4}{x},\quad g(x)=\frac{1}{x},\quad h(x)=\frac{1}{4x},\quad f(x)=-\frac{4}{x},\quad g(x)=-\frac{1}{x} \quad \text{i} \quad h(x)=-\frac{1}{4x}$

5. Dibuixa les gràfiques de les funcions següents en l'interval [-4, 4]:
$$f(x)=|x-2|,\quad g(x)=|x| \quad \text{i} \quad h(x)=|x+2|$$

6. Prenent el domini de [-6,6] representa les gràfiques de $E\left(\frac{x}{2}\right)$ i $D(2x)$

7. Prenent per domini l'interval [-4, 4] representa la gràfica de la funció $f(x) = (-1)^{E(x)/3}$.