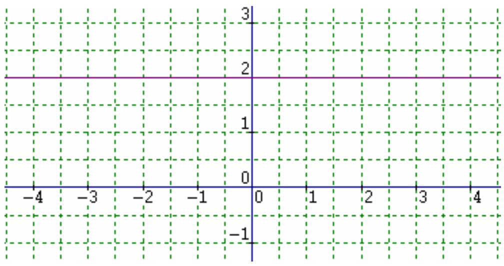
3 FUNCIONS LINEALS I QUADRÀTIQUES

3.1- Funcions constants

Les funcions que apliquen a tots els elements del domini la mateixa imatge es diu funció constant, evidentment han d'ésser del tipus f(x) = k (k$\in$ **R**)

> ***Funció constant***
> *La funció de fórmula f(x) = k* (k$\in$ **R**), *sigui quin sigui el domini, es diu funció constant.*

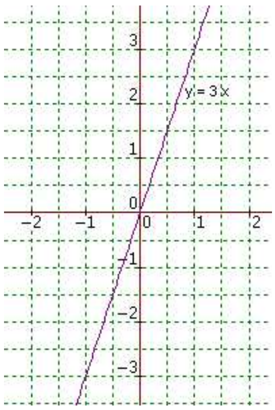
La gràfica d'una funció constant és una recta horitzontal



3.2- Funcions del tipus f(x) = ax (a$\neq$0)

Considerem que totes aquestes funcions estan definides entre **R** i **R .** El domini màxim és tot **R,** ja que a tots el valors reals x se'ls pot multiplicar per **a**.

La gràfica de la funció f(x) = 3x és



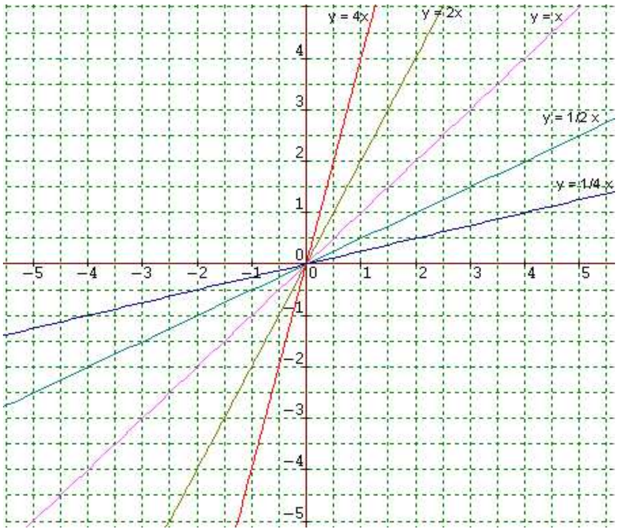
Fixeu-vos que per cada unitat que avança la x del domini les seves corresponent imatges n'avancen 3 (**a** = 3), i que el valors de les imatges són proporcionals als valors del domini: y/x = 3, essent **a** la raó de proporcionalitat.

Per aquest motiu a aquestes funcions se'ls diu funcions de proporcionalitat i les seves gràfiques són rectes.

Funció de proporcionalitat

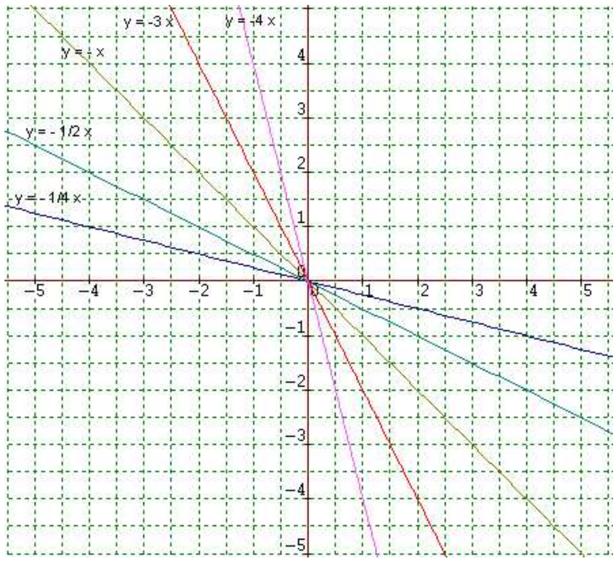
*Tota funció que tingui per fórmula a **f(x) = ax**, amb a diferent de zero, es diu funció de proporcionalitat.*

La gràfica d'aquestes funcions per valors d'**a** igual a 1/4, 1/2, 1, 2 i 4 són:



Fixeu-vos que totes aquestes rectes passen pel punt (0, 0) i que quan més gran és el coeficient **a** més gran és la seva inclinació. Si **a** fos zero obtindríem una recta horitzontal coincidint amb l'eix horitzontal. Fixeu-vos també que totes les rectes passen del primer quadrant al tercer, això es diu que tenen un pendent positiu.

La gràfica funcions de proporcionalitat per valors d'**a** igual a -1/4, -1/2, -1, -2 i -4 són:

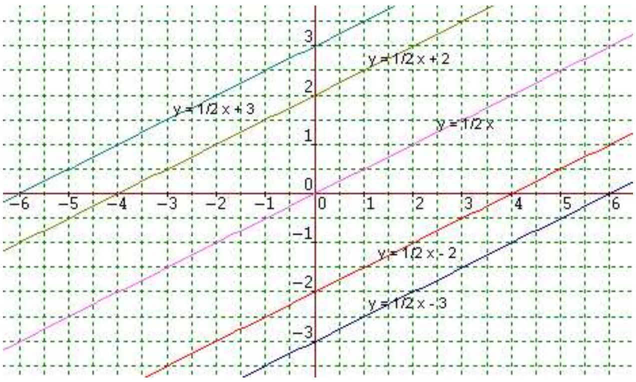


Ara, també, les rectes passen totes pel punt (0, 0) i que quan més gran, en valor absolut, és el coeficient **a** més inclinació té la recta. Totes les rectes passen del segon quadrant al quart, es diu que tenen pendent negatiu, i per això:

Pendent d'una funció de proporcionalitat
*El coeficient **a** d'una funció del tipus **f(x) = ax** es diu pendent.*

3.3- Funcions lineal f(x) = ax + b (a ≠ 0)

Les funcions lineals es poden considerar com la suma d'una funció de proporcionalitat (**ax**) més una constant (**b**). Per això la gràfica d'una funció lineal serà igual que la seva funció proporcional desplaçada en **b** unitats cap amunt o cap avall (depenen del signe de **b**). mireu les gràfiques de les següents funcions que mostren el que s'acaba de dir.



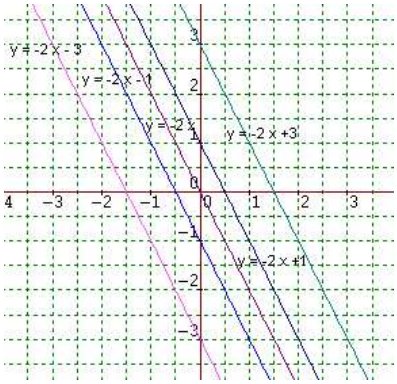
Fixeu-vos que la gràfica de y = 1/2 x + 2 talla a l'eix vertical en el punt (0, 2), la gràfica de y = 1/2 x - 3 el talla en el punt (0, -3). En general la funció y = ax + b tallarà a l'eix en el punt (0, b), per això el terme b es diu "ordenada a l'origen"

Com en el apartat anterior el coeficient **a** dóna la inclinació de la recta i per això es continua dient pendent.

Pendent i ordenada a l'origen d'una funció lineal
*El coeficient **a** d'una funció del tipus **f(x) = ax + b** es diu pendent, i el terme **b** es diu ordenada a l'origen.*

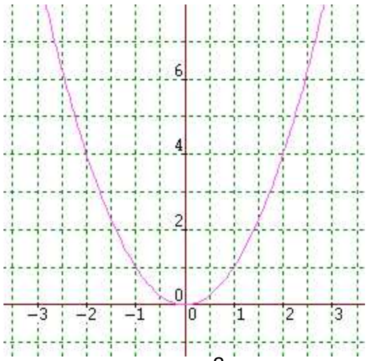
Fixeu-vos en les gràfiques següents de funcions lineals de pendent negativa, totes tenen la inclinació (el pendent) negativa (-2), i cada una talla a l'eix vertical en els punt corresponents al seu terme "ordenada a l'origen".

És fàcil comprovar que les funcions lineal definides de **R** a **R** són funcions bijectives.



3.4- Funció $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

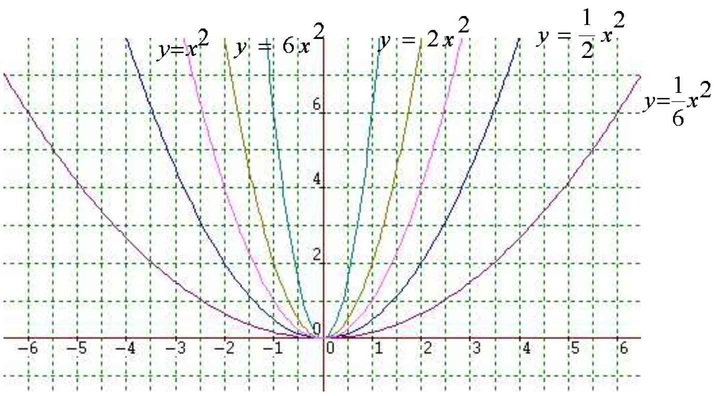
Només cal donar un quant valors per veure que la funció $y = x^2$, que suposarem amb domini tot **R**, té per gràfica a:



$y = x^2$

Es tracte d’una gràfica que passa pel punt (0, 0). Cada una de les parts d’aquesta gràfica separades pel punt (0, 0) se li diu branca. O sigui, una paràbola té dues branques, aquestes dues branques són simètriques respecte de l’eix y. El punt (0, 0) és el vèrtex de la paràbola i l’eix y és l’eix de la paràbola.

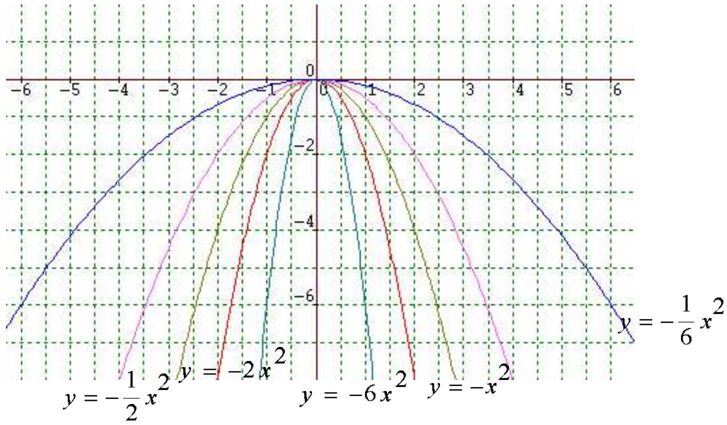
Observem ara les diferents gràfiques per les funcions **$y = ax^2$** per a diferents valors d’**a** positius



Totes aquestes paràboles tenen el punt (0, 0) com a vèrtex i l’eix y com a eix.
El coeficient **a** fa com de compressió o expansió de la paràbola, per valors

grans d'**a** la paràbola és molt tancada, per valors petits d'**a** la paràbola és molt oberta. Totes les paràboles tenen les branques dirigides cap amunt.

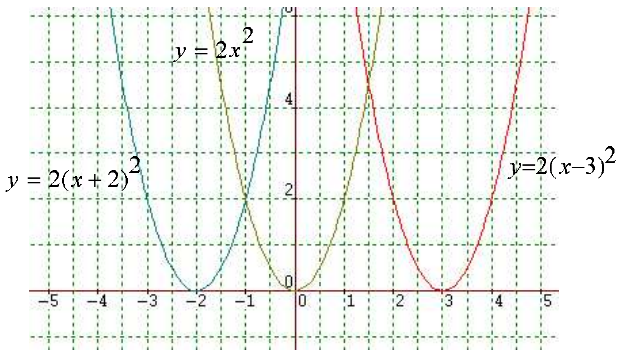
Observem ara les paràboles però amb el coeficient a negatiu:



Ara les branques estan dirigides cap avall. Totes continuen tenint el vèrtex en el punt (0, 0) i el seu eix és l'eix y. Les paràboles són més tancades o obertes segons si **|a|** (valor absolut) és més gran o petit.

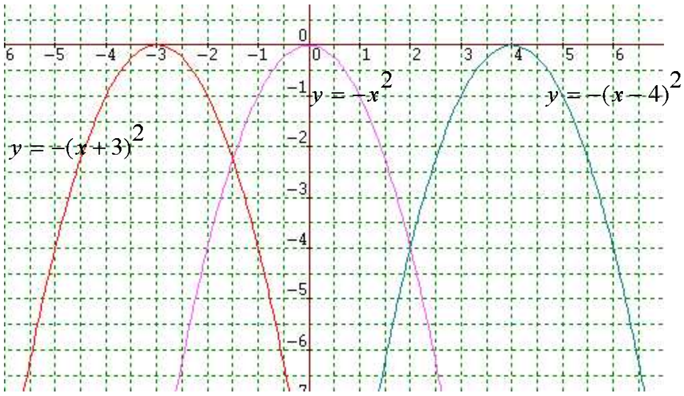
3.5- Funció y = a(x - m)^2 (a$\neq$0)

Ja hem vist (paràgraf 1. ----) que sumar o restar una constant a la variable x fa que la gràfica es desplaci cap a l'esquerra o la dreta de la mateixa gràfica. Mireu aquestes gràfiques:



La paràbola de la funció $y = 2(x – 3)^2$ té per vèrtex el punt (3, 0) i eix la recta x = 3. La paràbola de la funció $y = 2(x +2)^2$ té per vèrtex el punt (-2, 0) i té per eix la recta x = -2

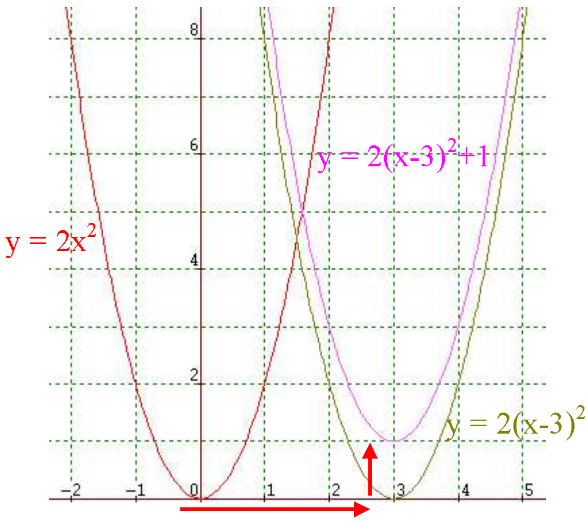
Si els coeficients fossin negatius, tindríem les gràfiques següents, en la que es veu que el vèrtex de $y = - (x – 4)^2$ és el punt (0, 4) i l'eix és la recta x = 4. La gràfica de $y = - (x +3)^2$ té el vèrtex en (0, -3) i l'eix és x = -3. Vegeu que aquestes paràboles tenen les branques dirigides cap avall.



3.6- Funció $y = a(x - m)^2 + n$ $(a \neq 0)$

La funció que anem a estudiar es pot considerar la suma de la funció del paràgraf anterior ($y = a(x - m)^2$) amb una constant n. Recordem que l'efecte de sumar una constant a una funció és el de traslladar la gràfica cap amunt si la constant és positiva, o cap avall si la constant és negativa.

Mireu el gràfic següent en que s'observa el moviment cap a la dreta, expressat en el paràgraf anterior, i el moviment cap amunt que ara estem comentant, moviments que van passant de la gràfica de $y = 2x^2$ a la de $y = 2(x - 3)^2$ que la trasllada 3 unitats cap a la dreta, i a la de $y = 2(x - 3)^2 + 1$ que trasllada l'anterior una unitat més amunt.



Com que els moviments comentats són també seguits pels corresponent vèrtexs tindrem que aquests passen de (0, 0) a (3, 0) i a (3, 1) i els eixos de les paràboles passen de x = 0 a x = 3 i a x = 3.

Pel que acabem de dir, en general, el vèrtex de la paràbola de la funció
$y = a(x - m)^2 + n$ és (m, n) i el seu eix és x = n

3.7- Funció y = ax^2 + bx + c ($a \neq 0$)

Anem a comparar les funcions del tipus $y = ax^2 + bx + c$ amb les del paràgraf anterior $y = a(x - m)^2 + n$**.** Per això, farem aquestes transformacions:

$y = ax^2 + bx + c$ sumem i restem $\frac{b^2}{4a}$ (a no és 0):

$y = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} + c - \frac{b^2}{4a}$ sumem els dos últims termes:

$y = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac - b^2}{4a}$ traient a factor comú dels tres primers termes:

$y = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{4ac - b^2}{4a}$ el parèntesi és un quadrat:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Si aquesta última expressió la comparem amb $y = a(x - m)^2 + n$, tenim que

$$m = -\frac{b}{2a} \qquad n = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Per això podem dir que la gràfica de la funció tipus $y = ax^2 + bx + c$ és paràbola de vèrtex $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ que el seu eix és la recta $x = -\frac{b}{2a}$, paràbola que serà més o menys oberta segons si a és més o menys gran, que tindrà les branques cap amunt si a és positiu, i les tindrà cap avall si a és negatiu.

3.8- Exercicis

1. La imatge de 1 d'una funció lineal és 4 i la imatge del 2 és -1. Quina és la fórmula d'aquesta funció?.
2. Un cert producte es ven a un cert preu per quilo. El **cost** d'aquest producte i el seu **pes** són magnituds proporcionals?. Quina és la fórmula que dóna el cost en funció del pes?. Es tracta d'una funció de proporcionalitat?
3. Hem observat dos termòmetres simultàniament, un macava 20 graus celsius i l'altre marcava 68 graus fahrenheit. En un altre moment el primer termòmetre macava 40 graus celsius mentre l'altre marcava 104 graus fahrenheit. Troba una fórmula que ens permeti passar de graus celsius a fahrenheit.
4. La funció que ens permet passar de graus **celsius** a **fahrenheit** és de proporcionalitat?. És una funció lineal?. Fes la gràfica cartesiana d'aquesta funció.
5. Quin és el pendent i la ordenada a l'origen de la funció de l'exercici anterior?

6. Una funció lineal té per pendent a -2 i l'ordenada a l'origen és 6. Quina és la fórmula d'aquesta funció?
7. La **longitud** d'un quadrat i la seva **superfície** són magnituds proporcionals? Quina és la fórmula que ens permet passar del costat a la superfície? Quin tipus de funció és la que passa del costat a la superfície anteriors? Quin domini hauria de tenir aquesta funció per tal de que s'adaptés a aquest problema?
8. En el rebut de l'aigua es paga 25 € per despeses fixes i a més es paga 5,5 € per a cada metre cúbic d'aigua gastat. Quina és la fórmula que passa dels metres gastats a l'import del rebut?. De quin tipus de funció es tracte?.
9. Quines són el pendent i l'ordenada a l'origen de la funció anterior?. Fes una gràfica cartesiana d'aquesta funció.
10. Les imatges del -2, del 0 i del 2 d'una funció quadràtica són: 1, -1 i 5 respectivament. Quina és la fórmula d'aquesta funció. Quins són el seu eix i el seu vèrtex?
11. L'**alçada** d'un objecte i la **longitud de la seva ombra** en una hora determinada són proporcionals?. Si, en aquest moment un pal de 3 metres projecta una ombra de 186 centímetres, Quina és la fórmula que permet passar de la longitud del objecte a la longitud de l'ombra? I la que permet passar de la longitud de l'ombra a la del objecte?
12. Si en un moment determinat (moment inicial) un objecte ha recorregut un espai x_0 (m), porta una velocitat v_0 (m/s) i sabem que té una acceleració constat, quin serà l'espai recorregut després d'un temps t (s)?. Quin tipus de funció és la que dóna l'espai recorregut en funció del temps en un mòbil uniformement accelerat?
13. Si en el problema anterior $x_0 = 10$ m, $v_0 = 5$ m/s i l'acceleració és a = 0,5 m/s^2. Troba la fórmula de la funció de l'espai recorregut respecte del temps emprat. Representa gràficament aquesta funció.
14. De la funció $f(x) = -2x^2 + 11x – 12$ troba: els punts que la seva gràfica talla als dos eixos i el seu vèrtex.
15. El vèrtex d'una funció quadràtica és el punt (1, 1) i el coeficient de segon grau és -2. Quina fórmula té aquesta funció?
16. Les gràfiques de $f(x) =3x^2 – 6x + 10$ i de $g(x) = x^2 + 5x -2$ tenen algun punt comú?. Quins són?
17. Tenen algun punt comú les gràfiques de les funcions $g(x) = x^2 – 8x +18$ i $f(x) = (x – 2)(x – 4)$. Fes el mateix per $f(x) = (x + 2)(x -3)$ i $g(x) = (2x – 3)x$.
18. Passa l'expressió $y = 3x^2 - 6x + 4$ a la forma $y = a(x - m)^2 + n$ **.** Quin és el vèrtex de la paràbola definida per aquesta funció?
19. En una caiguda lliure teòrica un cos té una acceleració uniforme. Mira l'exercici 13 i digues quin tipus de funció dóna l'espai recorregut per un cos en caiguda lliure respecte del temps. Quina és aquesta acceleració? Quina és la fórmula d'aquesta funció si suposem que el primer moment de caure l'espai recorregut i la velocitat són zero?
20. L'eix d'una paràbola és x = -4, passa pel punt (0, 0) i el coeficient de segon grau és -2. Quin és el seu vèrtex?