1 SUCCESSIONS

8.1 - Definició de successió

Es pot parlar de la successió dels **vagons d'un tren**: el vagó primer, el segon, el tercer, etc.

Es pot parlar de la successió dels **dies**: avui, demà, demà passat, etc.

Es pot parlar de la successió dels **nombres naturals**: 1, 2, 3, 4, ...

En tots aquests casos hi ha una sèrie d'elements (vagons, dies, nombres) ordenats, en el que hi ha un primer element i que després de cada element n'hi ha un altre.

Per especificar el concepte de successió matemàtica i més concretament el de successió de nombres reals es pot dir, encara que no sigui gaire formal, que:

Successió de nombres reals
És una sèrie de nombres reals ordenats de manera que:
Hi ha un primer element.
Cada element té un element següent, per això la successió no s'acaba mai.

Com que una successió no s'acaba mai resulta impossible escriure tots els seus termes, en general amb els primers termes ja es pot tenir una idea de com es van formant tots els termes. Aquí hi ha l'exemple de set successions de les que s'han escrit els primers elements:

a) $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$

c) $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$

d) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \ldots$

e) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

f) $2, 20, 200, 2000, 20000, \ldots$

g) $4, 1, -2, -5, -8, -11, -14, \ldots$

Normalment es poden trobar els termes d'una successió per una llei, o fórmula, de formació dels seus termes, per exemple, cada una de les successions anteriors es poden definir com:

a) La successió del nombres naturals, o bé, cada terme és igual al lloc que ocupa.
b) Els inversos dels naturals, o bé, cada terme és igual a l'invers del lloc que ocupa a la successió.
c) Els quadrats dels llocs que ocupen.
d) Les arrels quadrades del lloc que ocupen.
e) A partir del termes 1 i 2 els demés s'obtenen sumant els dos anteriors.
f) El primer és 2 i després cada terme s'obté multiplicant per 10 l'anterior.
g) El primer és 4 i després cada terme s'obté restant 3 a l'anterior.

També hi pot haver successions en que l'aparició de cada terme és aleatòria, o sigui que no existeix cap llei de formació dels seus termes. En aquests apunts no es tractarà aquest tipus de successió.

Com es pot veure hi ha bàsicament dues formes d'indicar la llei de formació dels termes d'una successió:

- El terme es troba a partir del lloc que ocupa com en els exemples a), b) c) i d).
- El terme es troba a partir del termes anteriors com en els exemples e) f) i g), aquesta forma s'anomena definició per recurrència d'una successió.

8.2 - Terme general

Per indicar a una successió genèrica (que serveixi per a qualsevol successió) es sol fer indicant a cada terme per una lletra amb un subíndex, el subíndex indica el lloc que ocupa el terme dins de la successió, així:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \ldots$$

A vegades és útil indicar el terme que ocupa un lloc genèric, així:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \ldots\ldots, a_n, \ldots$$

El terme a_n és el que ocupa el lloc que fa n dins de la successió, això vol dir que pot ser qualsevol dels termes i per això s'anomena terme general. S'entén que n pot ser igual a: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., o sigui tots els llocs de la successió.

Les fórmules que permeten calcular qualsevol terme dels exemples del final del paràgraf anterior són:

a) $\mathbf{a_n = n}$

b) $\mathbf{a_n} = \frac{1}{\mathbf{n}}$

c) $\mathbf{a_n = n}^2$

d) $\mathbf{a_n} = \sqrt{\mathbf{n}}$

e) $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = 1$ **i** $\mathbf{a_n} = \mathbf{a}_{\mathbf{n}-2} + \mathbf{a}_{\mathbf{n}-1}$

f) $\mathbf{a}_1 = 2$ **i** $\mathbf{a_n} = 10\mathbf{a}_{\mathbf{n}-1}$

g) $\mathbf{a}_1 = 4$ **i** $\mathbf{a_n} = \mathbf{a}_{\mathbf{n}-1} - 3$

Com es veu les quatre primeres successions estan definides a partir del lloc que ocupa el terme, en canvi la tres últimes successions estan definides per recurrència

> ***Terme general d'una successió***
> *La fórmula que permet calcular un terme qualsevol a partir del lloc que ocupa s'anomena terme general.*

Un problema que pot presentar-se és el de trobar el terme general d'una successió quan aquesta esta definida de forma recurrent. És un problema que solucionarem parcialment més endavant. Per exemple, els termes generals de les tres últimes successions anteriors són:

f) $a_n = 2 \cdot 10^{n-1}$
g) $a_n = 7 - 3n$
i encara que sembli impossible:

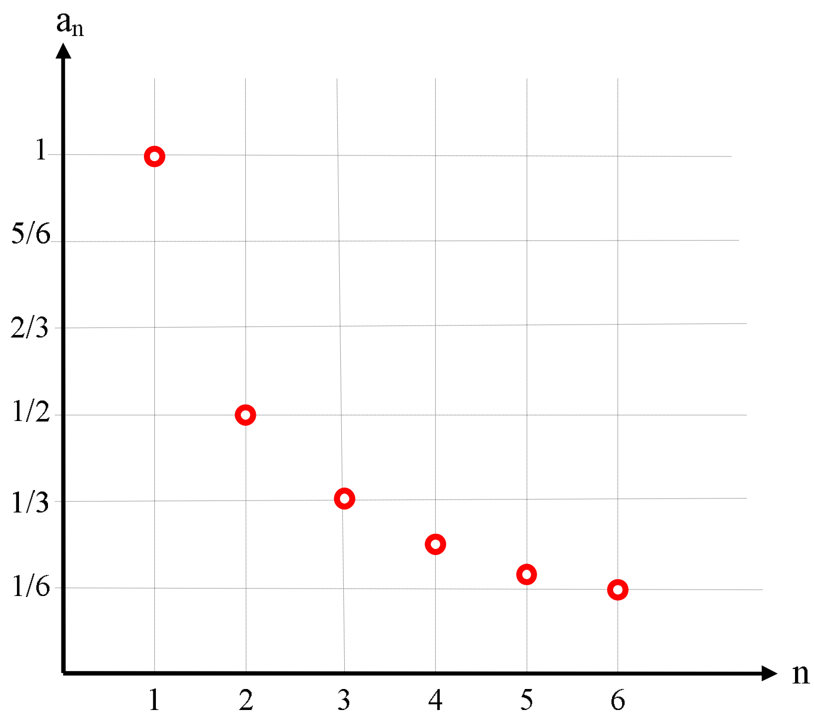
e) $a_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$

Aquesta successió és l'anomenada successió de Fibonacci en la que cada terme s'obté sumand els seus dos anteriors.

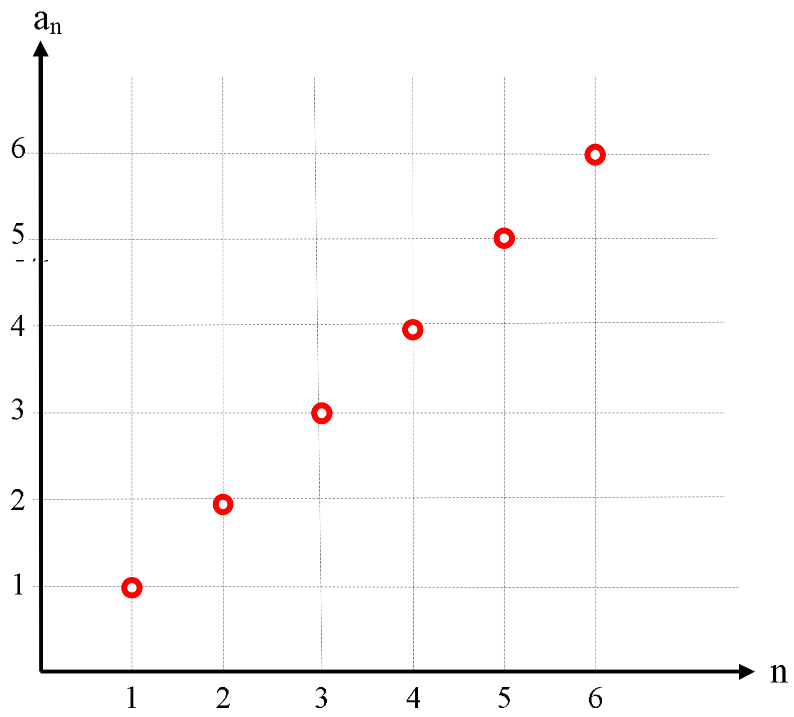
8.3 – Interpretació d'una successió com una funció

8.4 - Gràfica cartesiana d'una successió

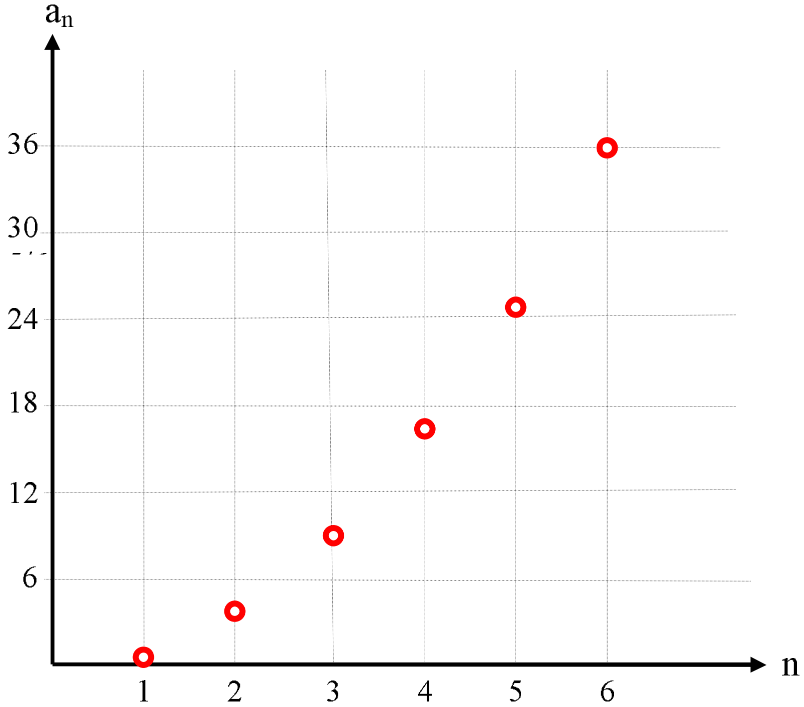
Cada terme d'una successió es pot representar gràficament com un punt en un pla de coordenades, en que l'eix horitzontal representa el lloc de la successió i l'eix vertical representa el valor del terme. La gràfica d'algunes de les successions que s'han adoptat com exemples en els paràgrafs anteriors són:



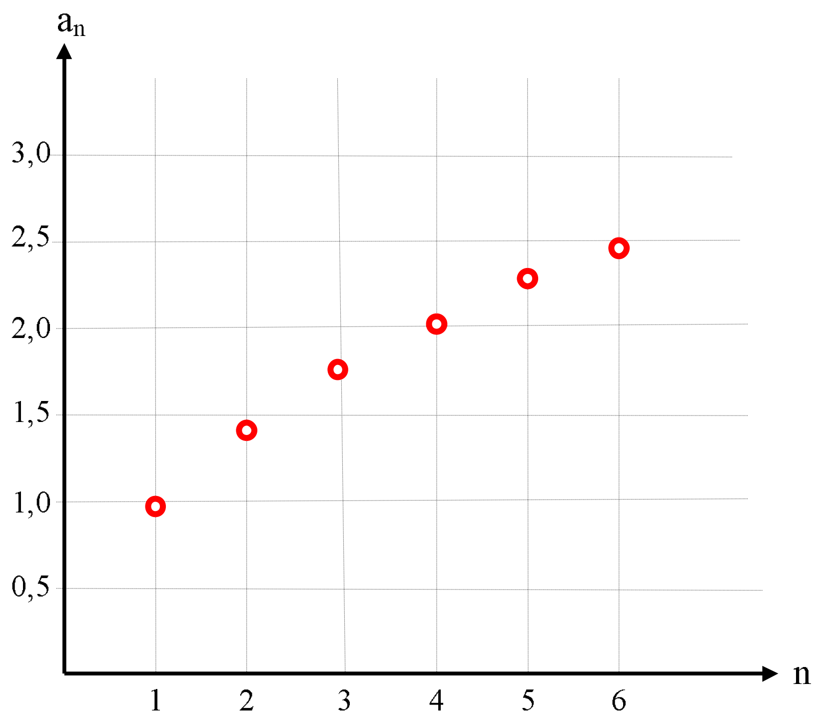
Successió: $a_n = 1/n$



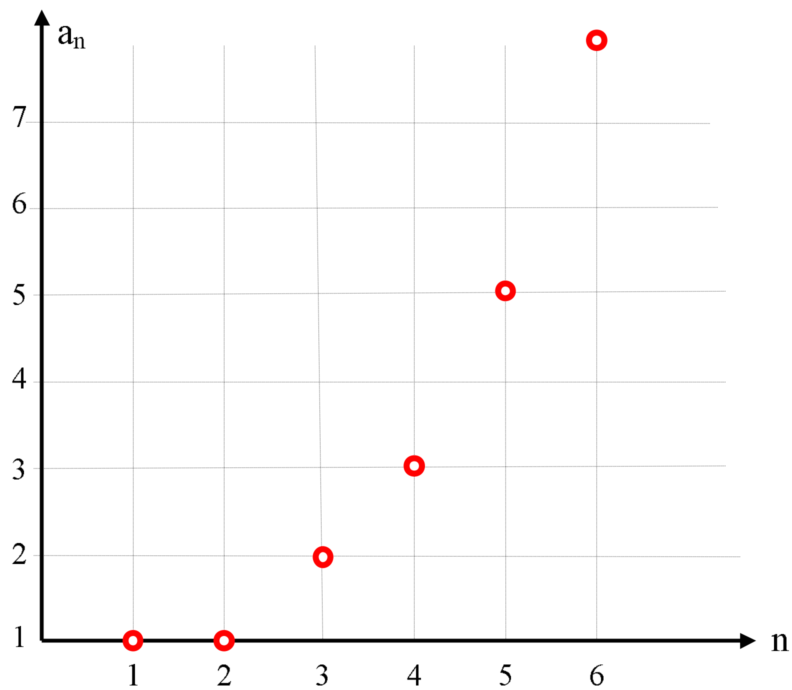
Successió: $a_n = n$



Successió: $a_n = n^2$



Succesió: $a_n = \sqrt{n}$



Succesió: $a_1=a_2=1$, $a_n = a_{n-2}+a_{n-1}$ (Fibonacci)

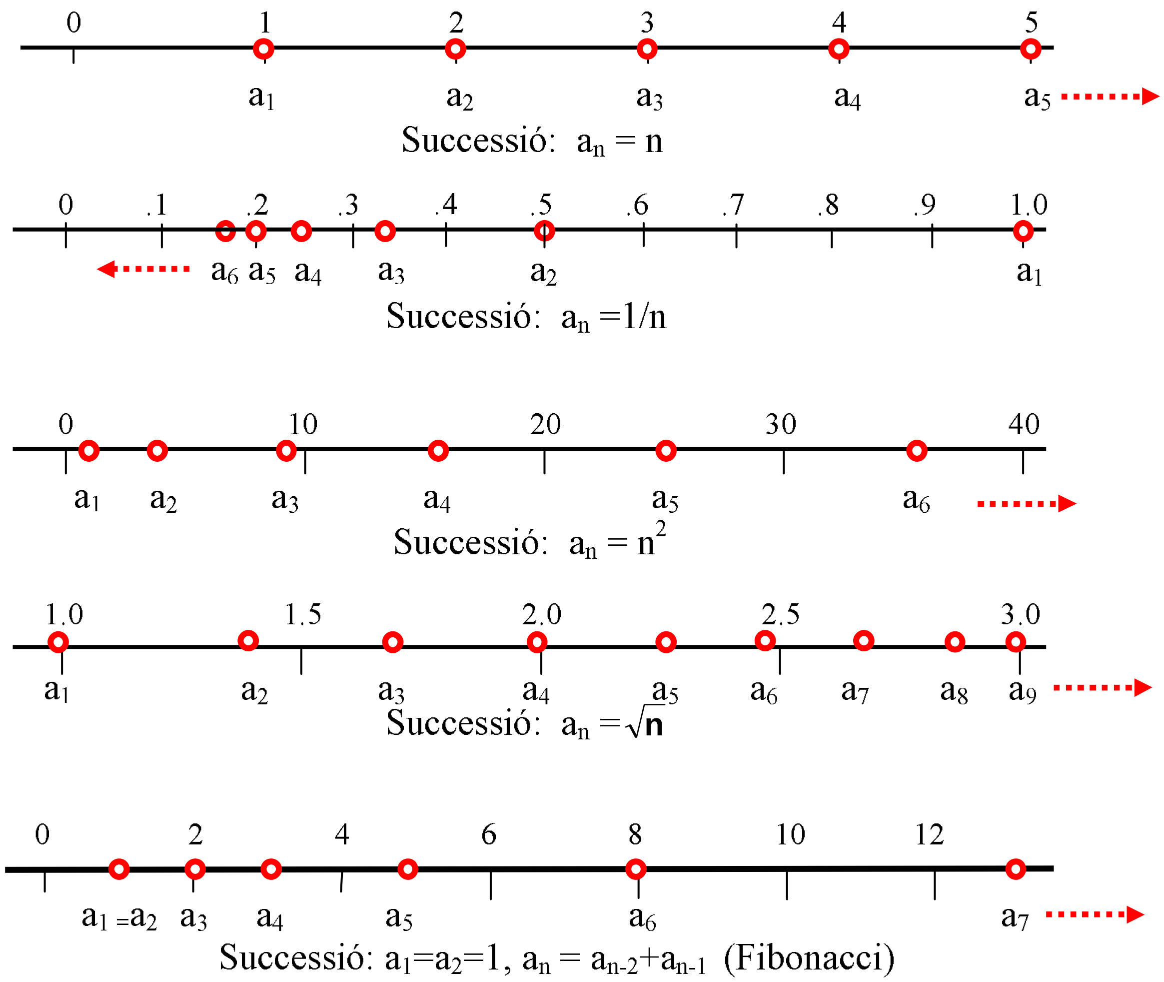
Com es pot veure no és important mantenir la mateixa escala de valors per als dos eixos en totes les successions, ni que els dos eixos comencin pel zero. Aquestes representacions gràfiques pretenen solament donar una idea de l'evolució dels termes de la successió.

8.5 - Gràfica d’una successió sobre una recta

Recordem que una recta es diu enumerada quan els seus punt s’han fet correspondre amb els nombres reals, és a dir a cada punt de la recta li correspon un nombre real i a cada nombre real li correspon un punt de la recta. Recordeu que solament cal identificat dos punts de la recta amb els nombres 0 i 1 perquè l’assignació entre els punt de la recta i els nombres reals sigui completa.

Cada terme d’una successió es pot representar gràficament com un punt sobre una recta enumerada. A cada terme de la successió se li assigna el punt de la recta que tingui per valor el mateix que el del terme de la successió.

La representació de les cinc successions anterior sobre una recta serà:



Aquests exemples s’han dibuixat sobre rectes horitzontals, a vegades convindrà representar-les sobre rectes verticals.

Com es pot veure a cada exemple les unitats de les rectes són diferents, s’han adaptat per fer més visual els exemples.

8.6 - Classificació de les successions segons el terme general

Si es té en compte el termes general les successions es poden classificar en:

> ***Successió polinòmica***
> *Una successió és polinòmica si el seu terme general és un polinomi en n.*

Les successions

$$\mathbf{a_n = 1 - n; \quad a_n = n^2 + 3n - 2; \quad a_n = n^3; \quad a_n = 4}$$

són successions polinòmiques. Fixeu-vos que les successions constants també són polinòmiques. En canvi les successions:

$$a_n = \sqrt{n}; \qquad a_n = \frac{1}{n}; \qquad a_n = n^{3/5} \quad \text{i} \quad a_n = \cos(\pi n)$$

no són successions polinòmiques.

Un cas simple de les successions polinòmiques són les de primer grau

> ***Successió lineal***
> *Una successió és lineal si és polinòmica de grau 1*

> ***Successió racional***
> *Una successió és racional si el seu terme general és una fracció de polinomis.*

Les successions

$$a_n = \frac{1}{n}; \quad a_n = \frac{1-n^2}{n^3}; \quad a_n = \frac{2n^3 - 3n^2 + 4n - 1}{2n^2 - 5n + 1}$$

són successions racionals.

> ***Successió potencial***
> *Una successió és potencial si el seu terme general és una potència en la que la base és el terme n i l'exponent és un nombre real.*

Les successions següent són potencials:

$$a_n = \sqrt[3]{n}; \qquad a_n = n^{4/5} \qquad \text{i} \qquad a_n = n^{\pi - 1}$$

> ***Successió exponencial***
> *Una successió és exponencial si el seu terme general és una potència en la que en el exponent hi figura el terme n.*

Les successions indicades a continuació són exponencials:

$$a_n = 2^n; \qquad a_n = e^{2n-1}; \qquad i \qquad a_n = n^n$$

Aquesta classificació no és exhaustiva ja que hi ha moltes successions que no es poden incorporar a cap dels grups mencionats, per exemple

$$a_n = \text{part entera}\left(\frac{n}{2}\right), \qquad a_n = \sqrt{n}(2^{-n})$$

Aquesta classificació tampoc és excloent, ja que hi ha successions que poden pertànyer a més d'un dels grups assenyalats, per exemple la successió

$$a_n = n^4$$

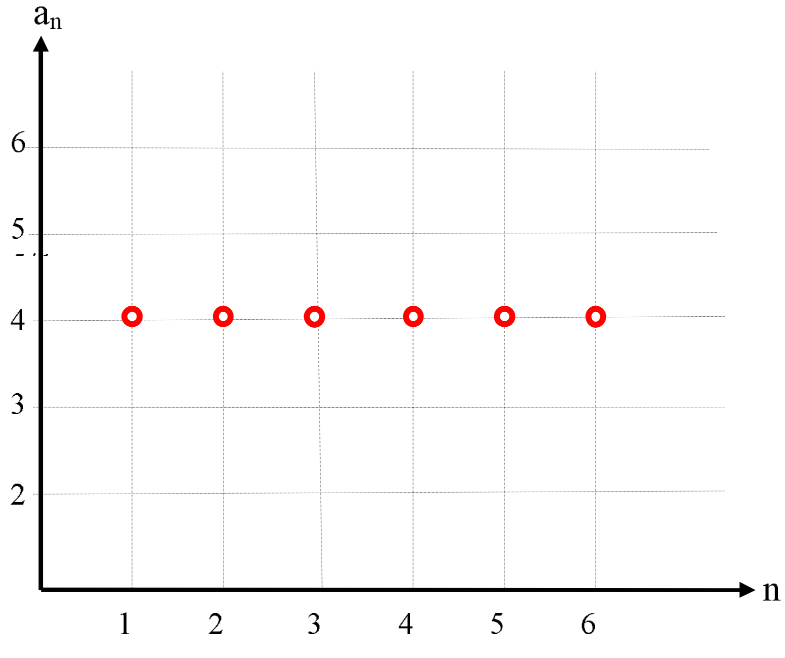
és a la vegada polinòmica i potencial.

8.7 - Successions constants, creixents, decreixents i alternades

Successió constant

La successió constant és la que té tots els termes iguals:

Per exemple la successió: 4, 4, 4, 4, 4, 4, ... (**a_n = 4**) és constant. En la gràfica d'una successió constant els punt corresponents estan situats en una línia horitzontal.



Successió constant: $a_n = 4$

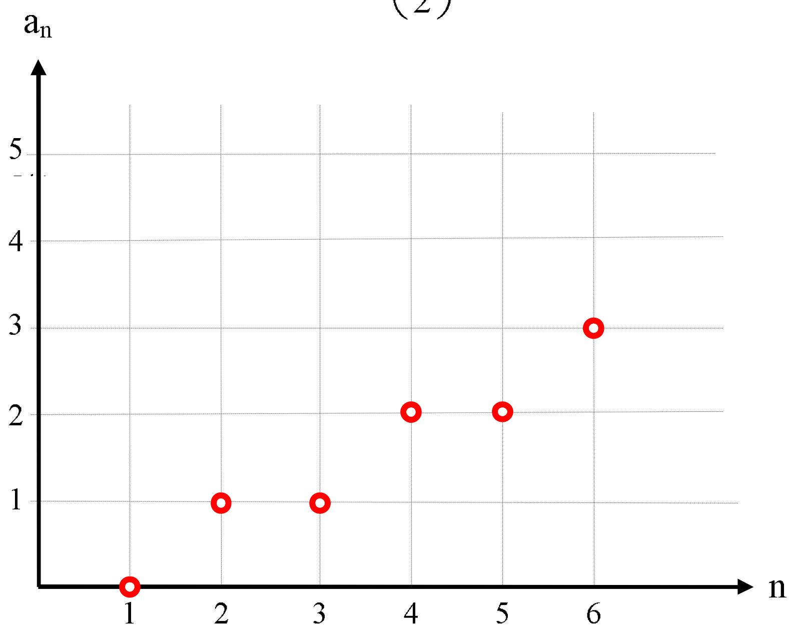
Successió creixent

Una successió es diu creixent quan cada terme, excepte el primer, és més gran o igual al terme anterior.

$$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, \dots$$
$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots$$

són dues successions creixents, els seus termes generals són:

$$a_n = \text{part entera}\left(\frac{n}{2}\right) \qquad\qquad a_n = n$$



Successió creixent: a_n = part entera (n/2)

> ***Successió estrictament creixent***
> *Es diu que una successió és estrictament creixent quan cada terme, excepte el primer, és més gran que el terme anterior.*

De totes les successions vistes com exemples en paràgrafs anteriors són estrictament creixents aquestes quatre successions:

$$\mathbf{a_n = n; \quad a_n = n^2; \quad a_n = \sqrt{n} \quad \text{i} \quad a_1 = 2, \quad a_n = 10\, a_{n-1}}$$

En canvi no ho són:

$$\mathbf{a_n = 1/n \quad \text{i} \quad a_1 = a_2 = 1, \; a_n = a_{n-2} + a_{n-1}}$$

Tampoc ho és la successió de l'exemple anterior

$$a_n = \text{part entera (n/2)}$$

Totes les successions que són estrictament creixents són també creixents.

De la mateixa forma que s'ha definit una successió creixent i estrictament creixent es pot definir les successions decreixent i estrictament decreixent d'aquesta forma:

> ***Successió decreixent***
> *Una successió es diu decreixent quan cada terme, excepte el primer, és més petit o igual al terme anterior.*

De les successions ja vistes, són decreixents:

a_n = 1/n i **a_1 = 4** amb **$a_n = a_{n-1}$ -3**

També és decreixent:

a_n = part entera (-n/2)

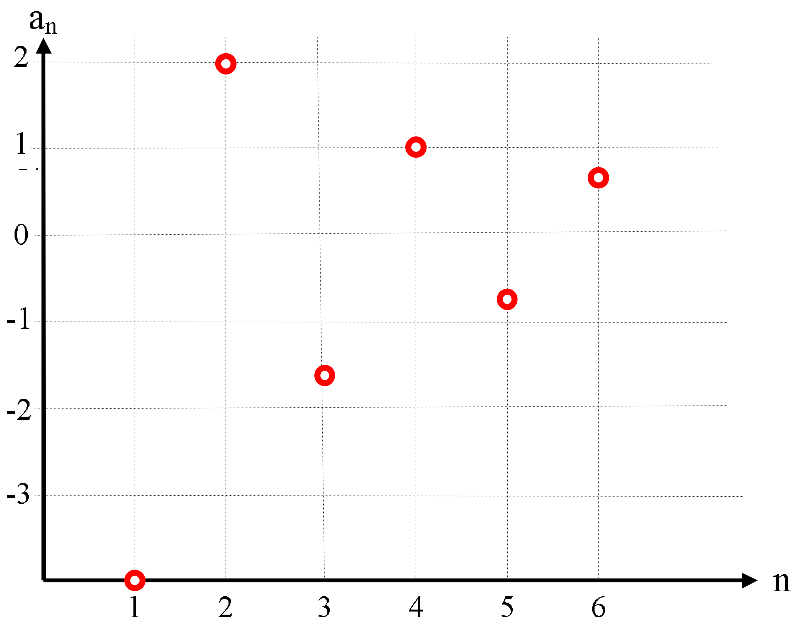
> ***Successió estrictament decreixent***
> *Es diu que una successió és estrictament decreixent quan cada terme, excepte el primer, és més petit que el terme anterior.*

Les dues primeres successions esmentades anteriorment com a decreixents són estrictament decreixents, però no ho és la tercera.

> ***Successió alternada***
> *Es diu que una successió és alternada quan els seus termes són alternativament més gran i més petit que els seus termes anteriors.*

Són successions alternades:

$$a_n = 2\left(-1\right)^n; \qquad a_n = \frac{4}{n}\cos(\pi n); \qquad a_n = \begin{cases} 3 & \text{si n és parell} \\ -1 & \text{si n és imparell} \end{cases} \qquad i \qquad a_n = n + 2(-1)^n$$



Successió alternada: $a_n = (4/n)\cos(\pi n)$

Fixeu-vos que en la gràfica d'una successió alternada els seu termes estan col·locats en forma de ziga-zaga, alternativament amunt i avall.

8.8 - Successions afitades

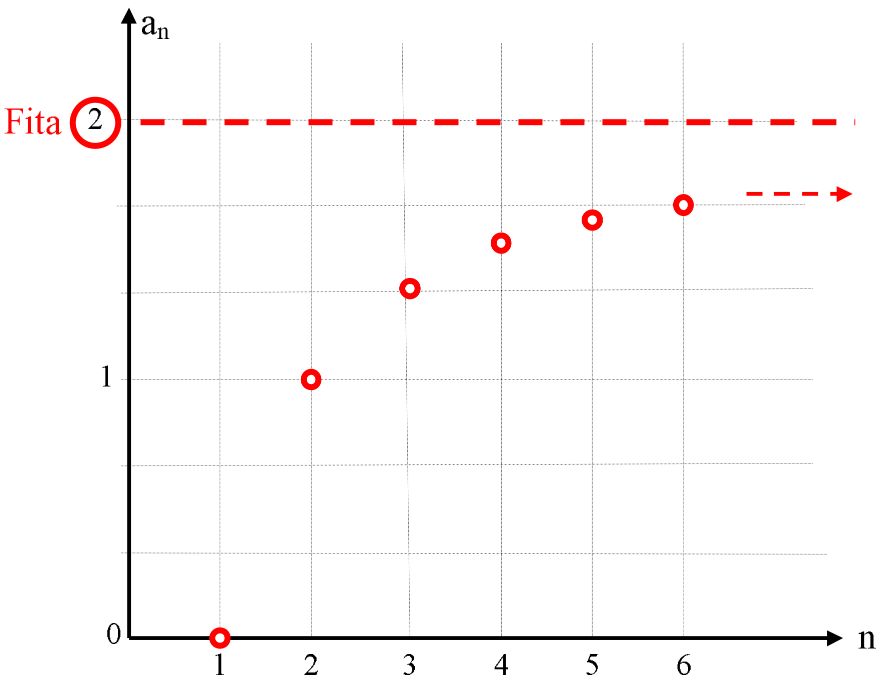
En el llenguatge real una fita representa un punt límit que marca el final d'un terreny o d'una finca. En successions una fita representa un nombre del que no el sobrepassen el termes de la successió. Una successió afitada vol dir que té una fita, així:

> ***Successió afitada superiorment i fita superior***
> *Es diu que una successió és afitada superiorment quan existeix un valor real de manera que tots els termes de la successió són menors que el valor, el qual s'anomena fita superior.*

Per comprovar que un nombre és una fita d'una successió es pot fer per una sèrie de desigualtats. Per exemple 2 (o per qualsevol valor més gran que 2) és una fita de la successió $a_n = \dfrac{2n-2}{n}$, i ho comprovarem així:

$$\frac{2n-2}{n} < 2 \Leftrightarrow 2n-2 < 2n \Leftrightarrow -2 < 0$$

que evidentment és certa.



Successió $a_n = \dfrac{2n-2}{n}$ afitada pel 2

Anàlogament podem dir que

Successió afitada inferiorment i fita inferior

Es diu que una successió és afitada inferiorment quan existeix un valor real de manera que tots els termes de la successió són majors que el valor, el qual s'anomena fita inferior.

La successió $a_n = 1/n$ està afitada superiorment i inferiorment. En canvi, la successió
$a_n = n$ està afitada inferiorment però no superiorment, sempre sobrepassa a qualsevol valor.

Finalment es pot dir que:

Successió afitada

Es diu que una successió és afitada quan està afitada superiorment i inferiorment.

8.9 - Exercicis

1 - Escriu el terme general de les successions suggerides pel seus primers termes:

$a)\ 2, 4, 6, 8, 10, \ldots \qquad b)\ 2, -2, 2, -2, 2, \ldots \qquad c)\ 0, 3, 8, 15, 24, 35, \ldots$

$d)\ \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \ldots \qquad e)\ 1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \ldots \qquad f)\ 1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}, \frac{12}{7}, \ldots$

$g)\ -3, 6, -9, 12, -15, \ldots \qquad h)\ 3,\ 0{,}3,\ 0{,}03,\ 0{,}003, \ldots \qquad i)\ 6, 3, 0, -3, -6, -9, \ldots$

2 - Escriu els cinc primers termes de les successions que els seus termes generals són:

$a)\quad a_n = 3n - \frac{n}{2} - 2 \qquad b)\quad a_n = \frac{n-2}{2n} \qquad c)\quad a_n = \ln(2n)$

$d)\quad a_n = \sqrt{n^3} \qquad e)\quad a_n = (-1)^n \frac{6}{n} \qquad f)\quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & si \quad n\ és\ parell \\ 2-n & si \quad n\ és\ inparell \end{cases}$

3 – Representa en un pla cartesià els cinc primers termes de les successions de l'exercici anterior.

4 – Representa sobre una recta enumerada els cinc primers termes de les successions de l'exercici 2.

5 – Escriu els cinc primers termes de les successions definides per recurrència:
a) El primer terme és -9 i cada terme és la tercera part de l'anterior.
b) El primer terme és 12, el segon és 4 i els altres termes és la mitjana dels dos anteriors.
c) El primer terme és 256, els altres són l'arrel quadrada del seu anterior.
d) El primer terme és 8, el segon és 6, i cada un dels altres termes és la meitat de l'anterior de l'anterior.

6 – Esbrina si 15/29 és un terme de la successió $a_n = \frac{1-n^2}{3-2n^2}$. I 18/33 és un terme d'aquesta successió?.

7 – Demostra si les successions, donades pel seu terme general, són creixents, o decreixents, o alternades.

$a)\quad a_n = \frac{n+1}{n} \qquad b)\quad a_n = \frac{n-1}{n} \qquad c)\quad a_n = n - \frac{n^2}{4} \qquad d)\quad a_n = n^{2/3}$

$e)\quad a_n = \sqrt[3]{n-1} \qquad f)\quad a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \qquad g)\quad (-1)^n \frac{n+1}{n} \qquad h)\quad a_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

8 – digues a quins dels conjunt: polinòmiques, lineals, racionals, potencials o exponencials, pertanyen aquestes successions:

$a)\quad a_n = \dfrac{1}{n+1}$ $\qquad b)\quad a_n = -3n^4 + 2n^2 - 6$ $\qquad c)\quad a_n = \sqrt[3]{n}$ $\qquad d)\quad a_n = 2n^{\pi}$

$e)\quad a_n = 2^{n+1}$ $\qquad f)\quad \dfrac{2}{5}n^5 + \dfrac{2}{3}n^3 + \dfrac{1}{2}$ $\qquad g)\quad a_n = (1+n)^{2,25}$ $\qquad h)\quad a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

9 – Dues successions estan definides així:

$$a)\quad a_n = \begin{cases} 2^n & \text{per } n=1,2 \text{ o } 3 \\ 16 & \text{per } n>3 \end{cases} \qquad b)\quad b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{per } n<7 \\ -6 & \text{per } n>6 \end{cases}$$

Representa cartesianament el 9 primers termes d'aquestes dues successions. Són creixents?. Són decreixents? Estan afitades?

10 – Una successió ve donada pel seu terme general $a_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n$. Calcula els 5 primers termes. Expressa el terme general d'una altre forma

11 – Demostra si les successions donades en l'exercici 7 anterior són afitades superiorment, si són afitades inferiorment, si són afitades, o bé si no són ni una cosa ni l'altre.

12 – Demostra que la suma i el quocient de dues successions afitades és també afitada.

13 – Quin és el terme general de la successió creixent de parells positius?, i la d'imparells positius?, i la dels múltiples de 3 positius?

14 – Demostra que tota successió creixent esta afitada inferiorment i que tota successió decreixent està afitada superiorment.

15 – En el programa Excel escriuràs tres columnes, la primera representarà el valor de n, pot haver-hi el valors: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. A la segona columna posa un 1 a les dues primeres caselles i a la resta la funció corresponen al terme general de la successió de Fibonacci. A la tercera columna posa-hi un 1 a les dues primeres caselles i a les altres una funció que indiqui la suma de les dues caselles anteriors. Tant a la segona com a la tercera columna haurà de sortir els termes de la successió de Fibonacci.