3 LÍMIT DE SUCCESSIONS

10.1 - Límit infinit d'una successió

Hi ha successions que els seus termes, a mida que augmenta n, es van fent cada cop més grans, sobrepassant qualsevol valor prefixat. Un exemple evident d'aquest comportament és el de la successió $a_n = n$ en la que els termes (a_n) tenen per valor el lloc (n) que ocupen, els termes de la qual es poden fer tan gran com es vulgui.

Una altre successió que els seus termes encara es fan més grans que els de l'anterior és $a_n = n^2$, evidentment també es fan tan grans com es vulgui.

Els termes de la successió $a_n = \sqrt{\mathbf{n}}$ que ja s'ha vist que és creixent, també poden superar qualsevol valor prefixat, per exemple, aquests termes sobrepassaran el valor 1000. El lloc n on el termes començaran a passar de 1000 serà el que:

$$\sqrt{\mathbf{n}} > 1000 \iff n > 1000^2 = 1000000$$

o sigui que a partir del lloc un milió els termes seran més grans que 1000. En general, els termes sobrepassaran a qualsevol quantitat donada, per més gran que aquesta sigui, si pensem amb una quantitat molt gran que direm k, passarà

$$\sqrt{\mathbf{n}} > k \iff n > k^2$$

que ens diu que a partir del lloc k^2 els termes de la successió seran més gran que k.

Successió de límit més infinit

Es diu que una successió té límit més infinit quan per a qualsevol valor real k, per més gran que sigui, sempre hi ha un lloc de la successió que a partir d'ell tots els termes són més grans que k.

Es pot dir, encara que sigui d'una forma més informal, *que el límit d'una successió és més infinit si els seus termes poden ser tan grans com es vulgui.*

La forma d'indicar que el límit d'una successió és més infinit és:

$$\textbf{\textit{lím}}\ \mathbf{a_n = +\ \infty}$$

En particular, i per les consideracions que s'ha donat en començar el paràgraf, podrem escriure

$$\textbf{\textit{lím}}\ \mathbf{n = +\infty};\quad \textbf{\textit{lím}}\ \mathbf{n^2 = +\infty};\quad \textbf{\textit{lím}}\ \mathbf{\sqrt{n} = +\infty}$$

> ***Successió de límit menys infinit***
>
> *Es diu que una successió té límit menys infinit quan per a qualsevol valor real k, per més petit (gran i negatiu) que sigui, sempre hi ha un lloc de la successió que a partir d'ell tots els seus termes són menors que k.*

Es pot dir, encara que sigui d'una forma més informal, *que el límit d'una successió és menys infinit si els seus termes poden ser tan petits (grans i negatius) com es vulgui.*

La forma d'indicar que el límit d'una successió és menys infinit és:

$$\textbf{\textit{lím}}\ \mathbf{a_n = -\infty}$$

És fàcil veure que

$$\textbf{\textit{lím}}\ \mathbf{(5-n) = -\infty};\quad \textbf{\textit{lím}}\ \mathbf{(n-n^2) = -\infty};\quad \textbf{\textit{lím}}\ \mathbf{(\ln\frac{1}{n}) = -\infty}$$

Observació:

El fet de que una successió sigui creixent no indica que aquesta ha de tenir límit més infinit. Per exemple la successió $\mathbf{a_n} = \frac{2n-2}{n}$ és creixent i no té límit més infinit

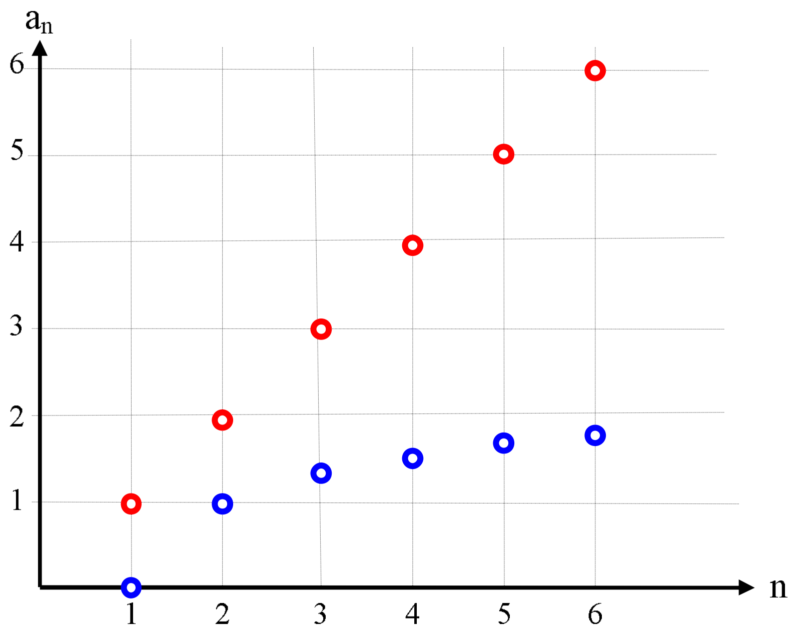
Es demostra que la successió anterior és creixent veient que cada terme és més gran que l'anterior tal com es pot veure amb aquesta seqüència d'equivalències:

$$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{2n-2}{n} > \frac{2(n-1)-2}{n-1} \Leftrightarrow \frac{2n-2}{n} > \frac{2n-4}{n-1} \Leftrightarrow$$
$$(2n-2)(n-1) > n(2n-4) \Leftrightarrow 2n^2-4n+2 > 2n^2-4n \Leftrightarrow 2>0$$

Es demostra que la successió anterior no té límit més infinit pel fet de que els seus termes no són mai més gran que 2, ja que:

$$a_n < 2 \Leftrightarrow \frac{2n-2}{n} < 2 \Leftrightarrow 2n-2 < 2n$$

De la mateixa forma que pel fet de que una successió sigui creixent no vol dir que tingui límit més infinit, tampoc el fet d'ésser decreixent assegura que el límit de la successió sigui menys infinit.

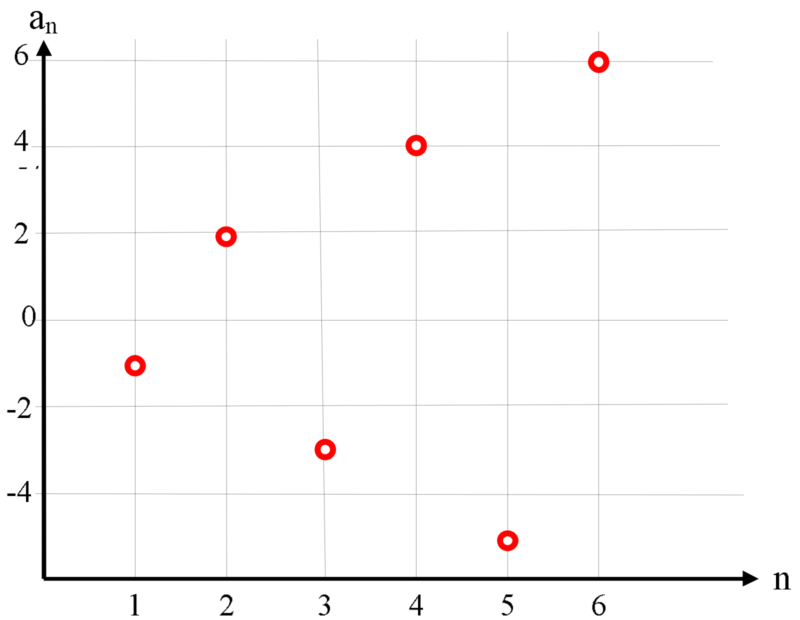


Dues successions creixents, una amb límit més infinit i l'altre no.

$$a_n = n \quad i \quad a_n = \frac{2n-2}{n}$$

10.2- Successió divergent

Fixem-nos amb la successió $\mathbf{a_n} = n(-1)^n$ que els seus termes de lloc imparell es fan tant petits com es vulgui, en canvi els seus termes de lloc parell es fan tant gran com es vulgui



Successió: $\mathbf{a_n} = n(-1)^n$

De la successió anterior, si només consideréssim els termes dels llocs parell es podria dir que té límit més infinit, en canvi, si només consideréssim els termes dels llocs imparells es podria dir que té límit menys infinit. Es tracta d'una successió alternada (paràgraf 1.6), però aquí l'amplitud de la ziga-zaga es va fent cada vegada més àmplia.
A partir de la successió anterior en construirem una de nova, que li direm $\mathbf{b_n}$, de forma que els seus termes siguin els de la successió anterior $\mathbf{a_n}$ però en valor absolut. Aquesta nova successió que té per límit a més infinit ja que:

$$\mathbf{b_n = |a_n| = |n(-1)^n| = n}$$

> ***Successió divergent***
> *Es diu que una successió és divergent quan els seus termes, en valor absolut, tenen per límit a més infinit*

Es pot dir ,doncs, que una successió $\mathbf{a_n}$ és divergent si $\mathbf{|\ a_n\ |}$ té per límit més infinit.

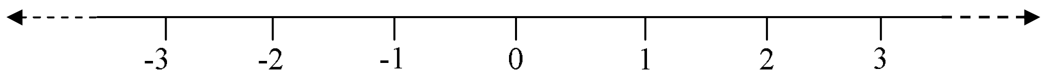
Les successions

$$\mathbf{a_n = n^2}, \quad a_n = \sqrt{n}, \quad a_n = \ln\frac{1}{n}, \quad a_n = (n - n^2) \quad \text{i} \quad \mathbf{a_n = n(-1)^n}$$

són successions divergents.

10.3- Distància entre dos punts en una recta

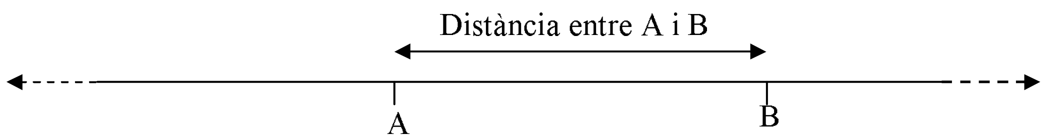
Recordem que els punts d'una recta es poden enumerar amb tots el nombres reals de forma que a cada punt li correspon un nombre real i a cada nombre real li correspon un punt de la recta. D'aquesta forma s'estableix una associació entre els punts d'una recta i els nombres reals. Aquest fet es pot representar de la forma



Si considerem a la longitud que hi ha entre el 0 i l'1 com una unitat, ens trobem que la distància entre el 0 i el 2 és 2 unitats, la distància entre el 5 i el 10 és de 5 unitats, etc. D'aquesta forma es pot definir:

> ***Distància entre dos punts d'una recta***
> *La distància entre dos punts és el valor absolut de la diferència entre els nombres associats als punts.*

La distància entre A i B és doncs |A – B|.



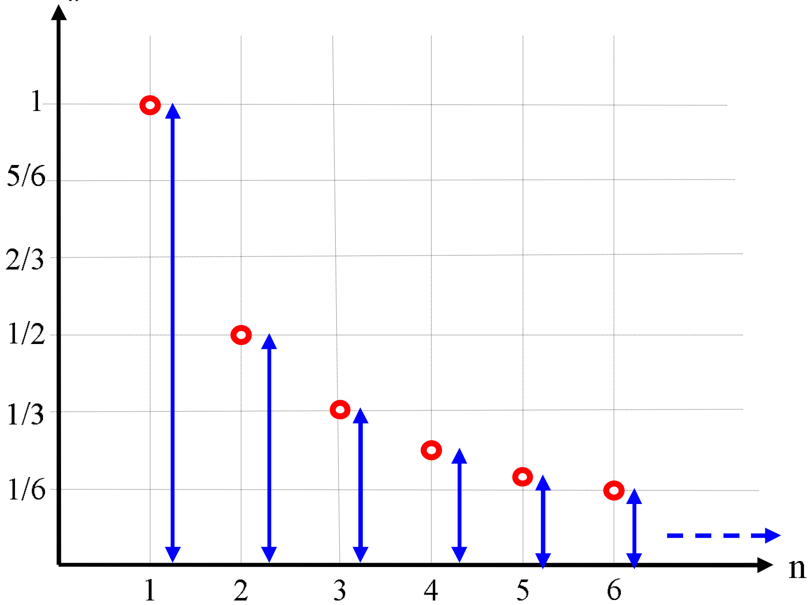
Fixeu-vos que la distància entre dos punts és simètrica, la distància entre A i B és igual a la distància entre B i A: |A – B| = |B – A|.

10.4 - Límit de la successió 1/n

La distància que hi ha entre el primer terme de la successió **a_n = 1/n** i el nombre 0 és de 1. La distància del segon terme i el zero és de 0,5. La distància entre el desè terme i el 0 és 0,1. A partir del lloc 100 els termes de **1/n** s'acosten al zero amb menys d'una centèsima. A partir del lloc 1000 s'acosten al zero en menys d'una mil·lèsima. A partir del lloc un milió s'acosten al zero en menys d'una milionèsima.

Per a qualsevol valor positiu, per petit que aquest sigui (proper al zero), sempre podem trobar un lloc **n** de la successió que a partir d'ell la distància dels termes de la successió al zero és menor que aquest valor. Aquesta particularitat es pot enunciar dient que la distància dels termes al zero es pot fer **tant petita com es vulgui**. I per això diem que el límit de **1/n** és zero, i s'escriu:

***lím* 1/n = 0**



Límit zero de la successió: $a_n = 1/n$

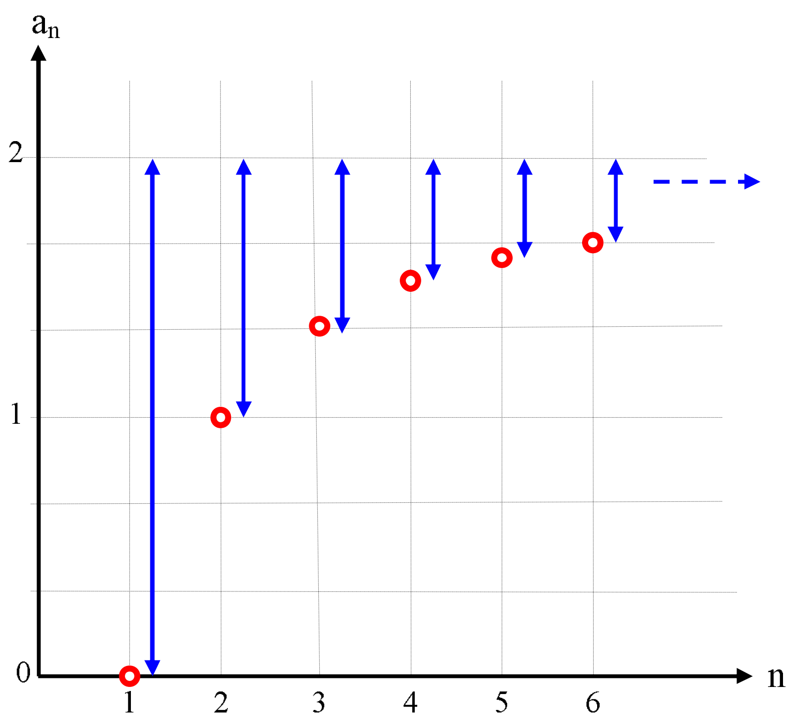
Fixeu-vos en la gràfica en que la distància entre els termes de la successió i el zero es fan cada cop més petita, es fa tant petita con es vulgui.

Es podria adduir que la distància dels termes de la successió **1/n** i el -1 també es fa cada cop més petita, i és cert, però el que no és cert és que aquesta distància es pugui fer tant petita **com es vulgui.** Si volguéssim trobar un terme de **1/n** que a partir d'ell la distància al -1 fos més petita que 0,5 no ho podríem fer, ja que la distància dels termes de **1/n** al -1 sempre es més gran que 1. Per això el -1 no és el límit de la successió **1/n**. De la mateixa forma no seria límit de la successió **1/n** el valor de -0,1, ni -0,001, ni qualsevol altre valor negatiu.

Tampoc pot ser límit de **1/n** qualsevol valor positiu. Per exemple no pot ser 1, ja que a partir del primer terme el valors es van allunyant de l'1 en lloc d'apropar-s'hi. Tampoc pot ser el 0,1 doncs a partir del lloc 10 passa el mateix, i així per qualsevol altre valor positiu. L'únic valor al que la successió **1/n** s'hi apropa **tant com es vulgui** és el zero, per això el límit de **1/n** és el zero.

10.5 - Límit de la successió (2n-2)/n

Ja s'ha vist que la successió $a_n = \frac{2n-2}{n}$ és creixent però no té límit més infinit (paràgraf 3.1) Anàlogament amb el que passava amb la successió 1/n, aquesta nova successió també es va aproximant a un valor fix, mireu el gràfic que ve a continuació on les fletxes blaves indiques les distàncies dels 6 primers termes al 2, i es veu que aquestes es van fent petites, anem a veure ara que aquestes distàncies es van fent tant petites com es vulgui.



Distància dels termes de $a_n = \frac{2n-2}{n}$ al 2

La distància d'un terme qualsevol al 2 és $\left|\frac{2n-2}{n} - 2\right|$. Per veure que aquesta distància es pot fer tant petita com es vulgui, agafem una quantitat positiva **e,** que imaginem és molt petita, i anem a veure que existeix un lloc **n**, de la successió, de forma que a partir d'ell la distància esmentada encara és menor que **e**. El valor **n** que estem buscant és tal que

$$\left|\frac{2n-2}{n}-2\right|<e \Leftrightarrow \left|\frac{2n-2-2n}{n}\right|<e \Leftrightarrow \left|\frac{-2}{n}\right|<e \Leftrightarrow \frac{2}{n}<e \Leftrightarrow n>\frac{2}{e}$$

L'última desigualtat ens diu que si la quantitat petita imaginada és ***e*** = 0,01, el valor de **n** a partir del qual els termes disten de 2 en menys d'aquesta quantitat és **n** = 2/0,01 = 200. Si la quantitat imaginada és ***e*** = 0,0001 el valor corresponen de **n** és 2/0,0001 = 20000. I així, per petita que sigui la quantitat **e**, sempre podem trobar un valor **n** que a partir d'ell la distància de tots els termes al 2 sigui menor que **e.**

Per tot el que portem dit el límit de la successió $\frac{2n-2}{n}$ és 2, que s'escriu:

$$\textbf{\textit{lím}}\,\frac{2n-2}{n} = \mathbf{2}$$

10.6 - Límit finit d'una successió

Hi ha successions que els seus termes es van acostant tant com es vulgui a un valor determinat, tal com passava en els dos exemples anteriors. Aquest valor que els termes de la successió s'hi van acostant s'anomena límit de la successió. Si es vol formalitzar el concepte de límit d'una successió, i seguin la idea donada pels límits dels exemples anteriors, es pot dir:

> ***Límit finit d'una successió***
>
> *Es diu que el valor real **l** és el límit de la successió a_n si per qualsevol valor positiu **e**, per petit que aquest sigui, sempre es pot trobar un lloc **n** de la successió que a partir d'ell, o sigui per **m**>**n**, la distància $|a_m - l|$ serà menor que **e**.*

El fet de que ***l*** sigui el límit de la successió a_n s'escriu així:

$$\textbf{\textit{lím}}\ a_n = l$$

Apliquem aquesta definició a un altre exemple per comprovar ara que 1/2 és el límit de la successió

$$a_n = \frac{\sqrt{n}-3}{2\sqrt{n}}$$

Doncs bé, donat un valor real i positiu **e**, encara que aquest sigui molt petit, podrem trobar un lloc de la successió **n** que a partir d'ell la distància de tots els termes a 1/2 és menor que **e**:

$$\left|\frac{\sqrt{n}-3}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\right|<e \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{n}-3-\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}\right|<e \Leftrightarrow \left|\frac{-3}{2\sqrt{n}}\right|<e \Leftrightarrow \frac{3}{2\sqrt{n}}<e \Leftrightarrow \frac{3}{2e}<\sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{9}{4e^2}<n$$

Així, donat el valor **e**, tots els termes del llocs **n** que siguin més grans que **9/(4e²)** tindran una distància a 1/2 menor que **e**, i per tant 1/2 és el límit de la successió.

Mireu la coincidència d'aquesta comprovació amb la del paràgraf anterior. Segurament heu observat que en tots els exemples de límit d'una successió sempre s'ha efectuat una comprovació, o sigui que el límit ja ens venia donat i solament s'havia de comprovar que efectivament es tractava del límit. El càlcul efectiu del límit de d'algunes successions es farà a la lliçó 5.

Observació:

A una successió divergent no se li pot trobar cap límit finit, doncs si els seus termes es fan tan grans, o tant petits, com es vulgui, és obvi que els termes no s'aniran acostant a cap valor real. Però a més de les divergents hi ha altres successions que tampoc tenen límit, per exemple algunes successions alternades com les que hem vist anteriorment (paràgraf 1,6):

$$a_n = 2(-1)^n \quad \text{i} \quad a_n = \begin{cases} 3 & \text{si n és parell} \\ -1 & \text{si n és imparell} \end{cases}$$

Els termes d'aquestes successions van fent ziga-zaga sense moure's d'uns valors determinats, no tenen límit real ni tenen límit infinit.

A les successions que tenen límit real se'ls anomena convergents:

> ***Successió convergent***
> *Es diu que una successió és convergent si té límit real*

No són convergent les successions divergents. En canvi hi poden haver successions oscil·lants que siguin convergents, per exemple, les successions

$$a_n = \frac{4}{n}\cos(\pi n) \qquad \text{o} \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

que tot hi essent alternada tenen límit zero com es pot comprovar fàcilment.

O bé hi poden haver successions alternades que tinguin límit infinit, com per exemple:

$$a_n = n + (-1)^n,$$

10.7 - Límit zero més, 0^+, i límit zero menys, 0^-

De les successions que tenen límit zero en distingirem dos grups, a un li direm que té límit zero més i l'altre direm que té límit zero menys. Aquests dos grup no engloben a totes les successions de límit zero, hi ha successions de límit zero que no tenen ni límit zero més ni límit zero menys.

> ***Successió de límit zero més***
>
> *Una successió de límit zero es diu que té límit zero més quan a partir d'un lloc tots els termes de la successió són positius, i s'escriu:*
>
> $$\textbf{\textit{lím}}\ a_n = 0^+$$

Un exemple fàcil de successió de límit zero més és a_n**=1/n** ja que a partir de primer lloc tots els termes són positius, o sigui

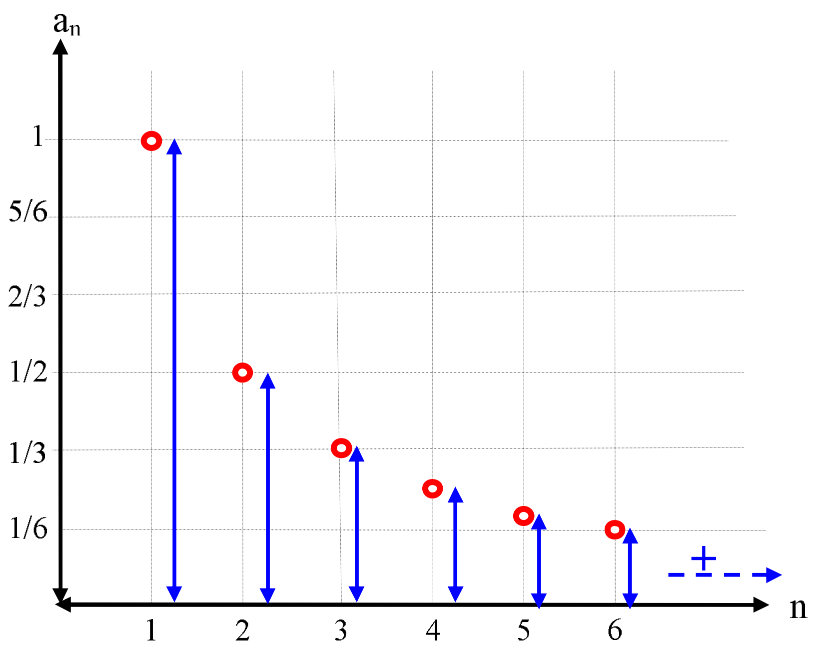
$$\textbf{\textit{lím}}\ 1/n = 0^+$$

> ***Successió de límit zero menys***
>
> *Una successió de límit zero es diu que té límit zero menys quan a partir d'un lloc tots els termes de la successió són negatius, i s'escriu:*
>
> $$\textbf{\textit{lím}}\ a_n = 0^-$$

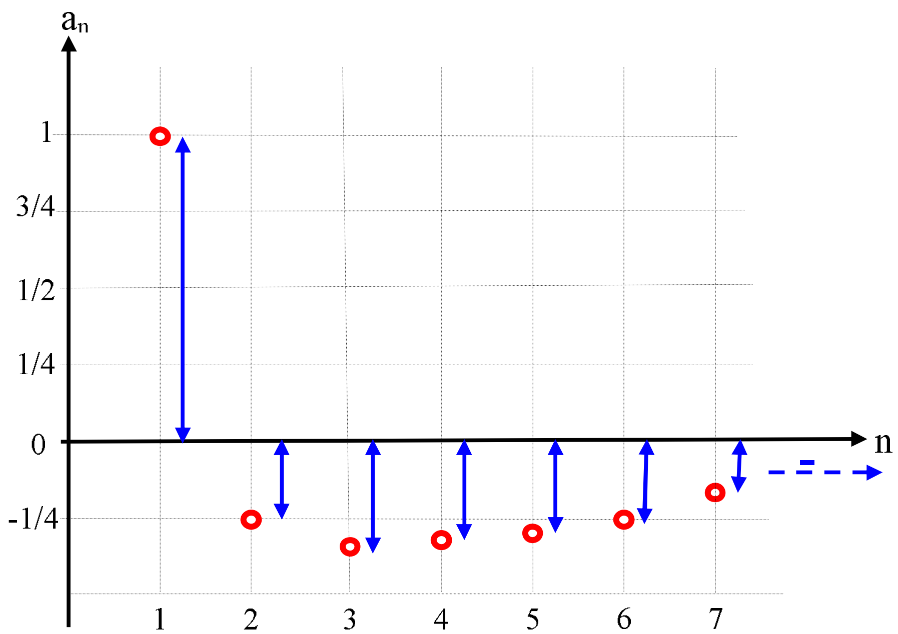
Un exemple de successió de límit zero menys és $a_n = \frac{3-2n}{n^2}$ ja que té límit zero i a partir de segon lloc tots els termes són negatius, o sigui

$$\textbf{\textit{lím}}\ \frac{3-2n}{n^2} = 0^-$$

Aquí podeu veure dos exemples de gràfiques de successions, un té per límit zero més i l'altre zero menys.



Límit zero més de la successió: $a_n = 1/n$



Límit zero menys de la successió: $a_n = (3-2n)/n^2$

10.8 - Exercicis

1 – A partir de quin terme de la successió $a_n = \frac{n+4}{n}$ els seus termes disten de 1 en menys d'una mil·lèsima?

2 – A partir de quin terme de la successió $a_n = n^2 + 10$ els seus termes es fan més gran que un milió?

3 – Omple aquestes taules i a través d'elles intenta de predir el límit de cada successió.

n	1	2	3	4	5	6	...	50	...	100	...	1000
$\frac{3n+2}{n}$												

n	1	2	3	4	5	6	...	50	...	100	...	1000
$\frac{\sqrt{n}-4}{n}$												

n	1	2	3	4	5	6	...	50	...	100	...	1000
n^2-2n												

Pots fer aquest exercici amb el programa Excel.

4 – Demostra que les successions següents tenen límit més infinit o bé menys infinit. Fes-ho a partir de la definició d'aquests límits:

$$a)\quad a_n = \sqrt[3]{n} \qquad b)\quad a_n = \ln n \qquad c)\quad a_n = \ln\frac{1}{n} \qquad d)\quad a_n = n + 2(-1)^n \qquad e)\quad a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

5 – A partir de la definició de límit finit demostra que cada una de les següents successions tenen el límit que s'indica:

$$a)\quad a_n = \frac{n+4}{n} \text{ té límit 1} \qquad b)\quad a_n = \frac{3}{2n} \text{ té límit 0}$$

$$c)\quad a_n = \frac{5-2n}{n} \text{ té límit -2} \qquad d)\quad a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n} \text{ té límit 2}$$

6 – Les següents successions tenen límit zero, esbrina si es tracte de zero més o de zero menys:

$$a)\quad a_n = \frac{3}{2n} \qquad b)\quad a_n = \frac{\sqrt{n}-4}{n} \qquad c)\quad a_n = \frac{4}{2-n^3}$$

$$d)\quad a_n = \sin\frac{1}{n} \qquad e)\quad a_n = 2^{-n} \qquad f)\quad a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

7 – Comprova que 2 no és el límit de $a_n = \frac{n-2}{n}$.

8 – La successió $a_n = \frac{1}{n}$ té tots els seus temes positius, en canvi $a_n = \frac{-1}{n}$ té tots els termes negatius. Malgrat això, el límit de les dues coincideixen. Com és possible?