4 OPERACIONS I LÍMITS ENTRE SUCCESSIONS

11.1 - Suma de successions

Si tenim dues successions, per exemple:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots \quad \text{i} \quad 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots$$

Poden construir una nova successió sumand terme a terme, el primer amb el primer, el segon amb el segon i així successivament:

$$1+1, \quad \frac{1}{2}+4, \quad \frac{1}{3}+9, \quad \frac{1}{4}+16, \quad \frac{1}{5}+25, \quad \frac{1}{6}+36, \quad \frac{1}{7}+49, \dots$$

o bé:

$$2, \ \frac{9}{2}, \ \frac{28}{3}, \ \frac{65}{4}, \ \frac{126}{5}, \ \frac{217}{6}, \ \frac{344}{7}, \dots$$

que és la successió suma de les dues primeres. En general:

> ***Suma de dues successions***
> *La suma de dues successions, a_n i b_n, és una altre successió s_n que el seu terme general és $s_n = a_n + b_n$.*

El terme general de la suma de les dues successions de l'exemple anterior és:

$$s_n = \frac{1}{n} + n^2 = \frac{1+n^3}{n}$$

11.2 - Propietats de la suma de successions

És evident que la suma de successions és **commutativa** ja que la suma, terme a terme, de reals és commutativa:

$$\mathbf{s_n = a_n + b_n = b_n + a_n}$$

També la suma és **associativa** ja que la suma de reals, terme a terme, ho és:

$$\mathbf{a_n + (b_n + c_n) = (a_n + b_n) + c_n}$$

La suma de successions **té element neutre**, es tracte de la successió constant zero en que tots els seus termes són zero:

$$\mathbf{a_n = a_n + 0 = 0 + a_n}$$

La suma de successions té la propietat de **tenir elements simètrics** ja que cada successió té la seva simètrica: la simètrica de a_n és $-a_n$, doncs:

$$\mathbf{a_n + (-a_n) = 0}$$

11.3 - Límit d'una suma de successions

En aquest paràgraf anirem a veure quin serà el límit d'una successió suma si es coneix el límit de cada una de les successions sumands. Per respondre a aquesta qüestió estudiarem separadament diferents casos.

Cas 1: cada sumand té un límit real.

Suposem que la successió a_n té per límit l_1 i que la successió b_n té per límit l_2 i que tant l_1 com l_2 són nombres reals. La intuïció ens diu que el límit de la successió suma $a_n + b_n$ ha d'ésser la suma dels respectius límits $l_1 + l_2$. Anem a veure que aquesta intuïció està conforme amb les definicions de límit i per tant és correcte.

Si agafem un valor positiu **e**, per petit que sigui, podem trobar un lloc n_1 que tots els termes de a_n disten de l_1 en una quantitat menor que **e/2.** I podem trobar un lloc n_2 que tots el termes de b_n disten de l_2 en una quantitat menor que **e/2.** Si **n** és el més gran de n_1 i n_2 les dues distàncies seran menors que **e/2**, o sigui:

$$|a_n - l_1| < \frac{e}{2} \quad \text{i} \quad |b_n - l_2| < \frac{e}{2} \Rightarrow |a_n - l_1| + |b_n - l_2| < e \Rightarrow |a_n - l_1 + b_n - l_2| < e \Rightarrow$$

$$|(a_n + b_n) - (l_1 + l_2)| < e$$

el que ens indica que a partir d'un cert lloc **n** els termes de la successió suma $a_n + b_n$ s'acosten a la suma $l_1 + l_2$ tant com es vulgui, o sigui

$$\textit{lím}\,(a_n + b_n) = l_1 + l_2$$

Agafem com a exemple a dues successions de les que ja hem estudiat el seu límit en paràgrafs anteriors, el límit de la suma serà:

$$\textit{lím}\left(\frac{2n-2}{n} + \frac{\sqrt{n}-3}{2\sqrt{n}}\right) = \textit{lím}\,\frac{2n-2}{n} + \textit{lím}\,\frac{\sqrt{n}-3}{2\sqrt{n}} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Cas 2: un sumand té límit real i l'altre més infinit

És fàcil de comprendre que si els termes d'una successió es poden fer tan grans com es vulgui mentre que els termes de l'altre successió s'acosten moltíssim a un nombre finit, la suma dels dos termes també es podrà fer tan gran com es vulgui.

Per demostrar-ho suposem que $\mathbf{a_n}$ tendeix a $+\infty$ i que $\mathbf{b_n}$ tendeix al real b. Donat dos valors reals, un k que pot se tan gran com es vulgui, i un altre e, que pot ser tan petit com es vulgui, sempre podem calcular el real
$k' = k - b + e$, i recordant el paràgraf 1.6, a partir d'un lloc n_1 tots els termes de la successió $\mathbf{a_n}$ són més grans que k', i existeix un n_2 que a partir d'ell tots els termes de la successió $\mathbf{b_n}$ (veure el paràgraf 1.12) disten de b en menys de e unitats. Aquestes dues condicions es poden expressar així:

$k-b+e < \mathbf{a_m}$ per tot $m > n_1$

$b-e < \mathbf{b_m} < b + e$ per tot $m > n_2$

Si n' és el més gran de n_1 i n_2 es compliran les dues desigualtat anteriors, i per tant la suma de les dues:

$k < \mathbf{a_m} + \mathbf{b_n}$ per tot $m > n'$

O sigui que pensada una xifra k, per més gran que sigui, sempre hi ha un lloc de la successió (el n') que a partir d'ell els termes de la successió $\mathbf{a_m} + \mathbf{b_n}$ són més grans que k, el que ens diu que el límit de la successió $\mathbf{a_m} + \mathbf{b_n}$ és $+\infty$.

Cas 3: un sumand té límit real i l'altre menys infinit

També és fàcil de comprendre que si els termes d'una successió es poden fer tant petits (grans i negatius) com es vulgui i que si els termes d'una altre successió s'acosten tant com es vulgui a un valor real, els termes de la suma de les dues successions es podran fer tant petits com es vulgui. O sigui la suma tindrà per límit a $-\infty$.

La demostració d'aquesta propietat és molt semblant a l'anterior i la deixem pel lector que ho vulgui intentar.

Cas 4: El dos sumands tenen límit més infinit

Si els termes de dues successions es poden fer tan grans com es vulgui és obvi que els termes de la successió suma es podran fer, encara amb més rapidesa, tan grans com es vulgui. O sigui que la suma de dues successions que tinguin límit més infinit té per límit més infinit.

Cas 5: Els dos sumands tenen límit menys infinit

Igual que en el cas anterior els termes d'una suma de dues successions que tinguin límit menys infinit es podran fer tan petits com es vulgui, per això la suma tindrà límit menys infinit.

Cas 6: Un sumand té límit més infinit i l'altre menys infinit.

En aquest cas no es pot assegurar el límit de la successió suma, pot ser que el límit de la suma sigui qualsevol nombre real, pot ser que sigui més infinit o que sigui menys infinit.

Per exemple si $a_n = n$ i que $b_n = -n$, ($+\infty$ i $-\infty$) és evident que el límit de la suma és zero, en canvi si $a_n = n^2$ i que $b_n = -n$ (també $+\infty$ i $-\infty$) el límit de la suma és ara més infinit. Aquests casos s'anomenen indeterminats i s'indiquen amb un ? a la taula següent.

Tots els casos estudiats es poden resumir en aquest quadre:

lím ($a_n + b_n$)		*lím* a_n: a real	*lím* a_n: $+\infty$	*lím* a_n: $-\infty$
lím b_n	b real	a + b	$+\infty$	$-\infty$
lím b_n	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
lím b_n	$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

11.4 - Límit d'una successió simètrica

Cas 1: La successió té límit real
És completament intuïtiu i molt fàcil de demostrar que si la successió a_n té per límit al real a aleshores la successió - a_n tindrà per límit a -a

Cas 2: La successió té per límit a $+\infty$ o a $-\infty$
També és fàcil d'entendre i fàcil de demostrar que si a_n té per límit a $+\infty$ aleshores la successió - a_n tindrà per límit a $-\infty$. I a l'inrevés si a_n té per límit a $-\infty$ aleshores la successió - a_n tindrà per límit a $+\infty$.

Ambdós casos els podem sintetitzar amb el quadre següent:

lím a_n	a real	$+\infty$	$-\infty$
lím(- a_n)	-a	$-\infty$	$+\infty$

11.5 - Resta de successions

De la mateixa forma que definíem la suma de successions, paràgraf 4.1, podem definir:

> ***Resta de dues successions***
> *La resta de dues successions, a_n i b_n, és una altre successió r_n que el seu terme general és $r_n = a_n - b_n$.*

Per exemple, si considerem dues successions:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots \qquad \text{i} \qquad 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$$

Poden construir una nova successió restant terme a terme el primer amb el primer, el segon amb el segon i així successivament:

$$1-1,\quad \frac{1}{2}-4,\quad \frac{1}{3}-9,\quad \frac{1}{4}-16,\quad \frac{1}{5}-25,\quad \frac{1}{6}-36,\quad \frac{1}{7}-49,\ldots$$

o bé:

$$0,-\frac{7}{2},\ -\frac{26}{3},\ -\frac{63}{4},\ -\frac{124}{5},\ -\frac{215}{6},\ -\frac{342}{7},\ldots$$

que és la successió resta de les dues primeres.
El terme general de la successió resta de l'exemple és:

$$r_n = \frac{1}{n} - n^2 = \frac{1-n^3}{n}$$

Naturalment, la resta de dues successions es pot considerar com a la suma de la primera successió amb la simètrica de la segona:

$$\boldsymbol{a_n} - \boldsymbol{b_n} = = \boldsymbol{a_n} + (-\boldsymbol{b_n})$$

11.6 - Límit d'una resta de successions

Si es té en compte els tres paràgrafs anteriors és molt fàcil veure que el límit d'una resta de successions respon a la següent taula.

lím ($\mathbf{a_n}$ - $\mathbf{b_n}$)		*lím* $\mathbf{a_n}$: a real	*lím* $\mathbf{a_n}$: $+\infty$	*lím* $\mathbf{a_n}$: $-\infty$
lím $\mathbf{b_n}$	b real	a - b	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

11.7 - Producte d'una successió per una constant

Producte d'una successió per uns constant

Producte d'una successió $\mathbf{a_n}$ *per uns constant* k, *és una altre successió que els seus termes són els de la successió multiplicats per* k.

Naturalment el terme general de la successió producte de $\mathbf{a_n}$ per uns constant real **k** és $\mathbf{ka_n}$

També és molt fàcil demostrar que el límit d'un producte d'una successió per una constant respon a la següent taula:

lím ka_n	*lím* a_n		
	a real	$+\infty$	$-\infty$
k > 0	ka	$+\infty$	$-\infty$
0	0	0	0
k < 0	ka	$-\infty$	$+\infty$

11.8 - Producte de dues successions

Si es tenen dues successions, per exemple

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots \qquad \text{i} \qquad 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$$

Poden construir una nova successió multiplicant terme a terme el primer amb el primer, el segon amb el segon i així successivament:

$$1\cdot 1,\ \frac{1}{2}\cdot 4,\ \frac{1}{3}\cdot 9,\ \frac{1}{4}\cdot 16,\ \frac{1}{5}\cdot 25,\ \frac{1}{6}\cdot 36,\ \frac{1}{7}\cdot 49, \ldots$$

o bé:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

que és la successió producte de les dues primeres. En general:

> ***Producte de dues successions***
>
> *El producte de dues successions,* $\boldsymbol{a_n}$ *i* $\boldsymbol{b_n}$*, és una altre successió* $\boldsymbol{p_n}$ *que el seu terme general és* $\boldsymbol{p_n = a_n \cdot b_n}$.

El terme general del producte de les dues successions de l'exemple anterior és:

$$p_n = \frac{1}{n}\cdot n^2 = \frac{n^2}{n} = n$$

11.9 - Propietats del producte de successions

És evident que el producte de successions és **commutativa** ja que la producte, terme a terme, de reals és commutativa:

$$\mathbf{p_n = a_n \cdot b_n = b_n \cdot a_n}$$

També el producte és **associatiu** ja que el producte de reals, terme a terme, ho és:

$$\mathbf{a_n \cdot (b_n \cdot c_n) = (a_n \cdot b_n) \cdot c_n}$$

El producte de successions **té element neutre**, que en aquest cas es diu **element unitat**, es tracte de la successió constant u en que tots els seus termes són uns:

$$\mathbf{a_n = a_n \cdot 1 = 1 \cdot a_n}$$

La successió inversa de **a_n** és la successió de terme general **$1/a_n$**, ja que

$$\mathbf{a_n \cdot (1/a_n) = 1}$$

Naturalment la successió inversa existeix solament per les successions que no tingui cap terme igual a zero. O sigui, no totes les successions tenen element invers, i per això al producte de successions li manca la propietat de tenir elements inversos.

11.10 - Límit d'un producte de successions

D'una forma molt semblant al que s'ha fet per la suma de successions es pot demostrar que el límit d'un producte de successions respon a la taula següent

lím $a_n \cdot b_n$		*lím* a_n				
		$+\infty$	$a>0$	**0**	$a<0$	$-\infty$
lím b_n	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
	$b>0$	$+\infty$	a b	**0**	a b	$-\infty$
	0	?	**0**	**0**	0	?
	$b<0$	$-\infty$	a b	**0**	a b	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Tots els límits de la taula són molt intuïtius, cal indicar només, que si una successió té límit zero i l'altre infinit, el producte de les dues pot tenir qualsevol límit, es tracte de casos d'indeterminació que estan indicats amb un ? a la taula. Per exemple si **a_n** és $1/n$ i **b_n** és n^2 , zero i més infinit de límits, el producte té per límit més infinit. En canvi si **a_n** és $1/n^2$ i **b_n** és n , també zero i més infinit de límits, el producte té per límit zero.

11.11 - Quocient de dues successions

Si agafem un altre cop les dues successions anterior:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots \qquad \text{i} \qquad 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$$

Podem construir una nova successió dividint terme a terme, el primer amb el primer, el segon amb el segon, i així successivament:

$$1:1,\quad \frac{1}{2}:4,\quad \frac{1}{3}:9,\quad \frac{1}{4}:16,\quad \frac{1}{5}:25,\quad \frac{1}{6}:36,\quad \frac{1}{7}:49, \ldots$$

o bé:

$$1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}, \frac{1}{216}, \frac{1}{343}, \ldots$$

que és la successió quocient de les dues primeres. En general:

> ***Quocient de dues successions***
> *El quocient de dues successions, a_n i b_n, és una altre successió q_n que el seu terme general és $q_n = a_n : b_n$.*

El terme general del quocient de les dues successions de l'exemple anterior és:

$$p_n = \frac{1}{n} : n^2 = \frac{1}{n^3}$$

11.12 - Límit d'un quocient de successions

Es pot demostrar que el límit d'un quocient de successions respon a la taula següent

lím a_n/b_n		*lím* a_n: $+\infty$	$a>0$	0	$a<0$	$-\infty$
lím b_n	$+\infty$	?	0	0	0	?
	$b>0$	$+\infty$	a/b	0	a/b	$-\infty$
	0^+	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
	0^-	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$
	$b<0$	$-\infty$	a/b	0	a/b	$+\infty$
	$-\infty$	?	0	0	0	?

Els casos de zero dividit per zero i els d'infinit dividit per infinit són indeterminats, no es pot saber, en un principi, el límit de la successió quocient.

S'ha de fer notar que si la successió divisor té per límit zero i el numerador no té per límit zero, el quocient té per límit infinit que pot ser més infinit o menys infinit segons si el numerador té límit positiu o negatiu i segons si el zero de denominador és un zero més o zero menys, tal com es pot veure a la taula.

11.13 - Potència de dues successions

Si tornem a agafar altre cop les dues successions anterior:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots \qquad \text{i} \qquad 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots$$

Podem construir una nova successió fent, el primer elevat al primer, el segon elevat al segon, i així successivament:

$$1^1,\ \left(\frac{1}{2}\right)^4,\ \left(\frac{1}{3}\right)^9,\ \left(\frac{1}{4}\right)^{16},\ \left(\frac{1}{5}\right)^{25},\ \left(\frac{1}{6}\right)^{36},\ \left(\frac{1}{7}\right)^{49}, \dots$$

o bé:

$$1,\ \frac{1}{2^4},\ \frac{1}{3^9},\ \frac{1}{4^{16}},\ \frac{1}{5^{25}},\ \frac{1}{6^{36}},\ \frac{1}{7^{49}}, \dots$$

que és la successió potència de la primera elevada a la segona.
Per poder construir una successió potència de dues altres hem de suposar que la successió que fa de base ha de tenir el seus termes positius, ja que es podrien donar casos de termes negatius elevats a valors racionals o reals que no quedarien definits.

En general:

Potència de dues successions

La potència de dues successions, $\boldsymbol{b_n}$ *i* $\boldsymbol{e_n}$*, si* $\boldsymbol{b_n>0}$*, és una altre successió* $\boldsymbol{t_n}$ *que el seu terme general és* $\boldsymbol{t_n=(b_n)^{e_n}}$

El terme general del quocient de les dues successions de l'exemple anterior és:

$$t_n = \frac{1}{(n)^{n^2}}$$

11.14 - Límit de la potència entre dues successions

lím $(b_n)^{e_n}$		*lím* e_n $+\infty$	$e>0$	0	$e<0$	$-\infty$
lím b_n	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	0	0
	$b>1$	$+\infty$	b^e	**1**	b^e	0
	1	$\mathbf{e^x}$	1	1	1	$\mathbf{e^x}$
	$0<b<1$	0	b^e	1	b^e	$+\infty$
	0^+	0	0	?	$+\infty$	$+\infty$

x = *lím* $\mathbf{(b_n-1)e_n}$

De tots els límits indicats a la taula s'ha de fer esment dels casos "més infinit elevat a zero" i "zero elevat a zero", casos que poden donar per resultat a qualsevol límit, es tracte de dos casos d'indeterminació. Un altre cas especial és el "u elevat a infinit", que s'estudiarà en el capítol proper, però com està indicat a la taula el límit és sempre e elevat al límit de $\mathbf{(b_n-1)e_n}$. Tots els altres casos són bastant intuïtius.

11.15 - Exercicis

1 – De dues succe
ssions A i B coneixem els seus 6 primers termes:

$$A: -3, -1, 0, 6, 12, 20, \ldots \qquad B: 3, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$$

Troba els 6 primers termes de les successions A + B, A – B, A·B, A/B i de A^B.

2 – Troba els termes general de les successions: $a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $a_n \cdot b_n$, a_n / b_n i de $(a_n)^{b_n}$ si $a_n = n^2 - 1$ i $b_n = \frac{2}{n+1}$.

3 – Si la successió a_n té límit 4 i la successió b_n té límit ½ calcula els límits de: $a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $a_n \cdot b_n$, a_n / b_n i de $(a_n)^{b_n}$.

4 – Si la successió a_n té límit $+\infty$ i la successió b_n té límit 0 calcula els límit de cada una de les successions següents, o bé indica que es tracte d'un cas d'indeterminació:
$a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $b_n - a_n$, $a_n \cdot b_n$, a_n / b_n, b_n / a_n , $(a_n)^{b_n}$ i de $(b_n)^{a_n}$.

5 – Si la successió a_n té límit $+\infty$ i la successió b_n té límit $-\infty$ calcula els límit de cada una de les successions següents, o bé indica que es tracte d'un cas d'indeterminació:
$a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $b_n - a_n$, $a_n \cdot b_n$, a_n / b_n, b_n / a_n , $(a_n)^{b_n}$ i de $(b_n)^{a_n}$.

6 - Si la successió a_n té límit 1 i la successió b_n té límit k indica el límit de la successió $(a_n)^{b_n}$ segons els possibles valors que pot tenir k ($+\infty$, major que zero, 0, menor que zero i $-\infty$).

7 – Dues successions venen donades per aquests termes generals:

$$a_n = \begin{cases} 2^n & per\ n < 4 \\ 10 & per\ n > 3 \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 1/n & per\ n < 7 \\ -5 & per\ n > 6 \end{cases}$$

Indica els termes generals i calcula els límits de $a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $a_n \cdot b_n$, a_n / b_n i de $(a_n)^{b_n}$.

8 – Tenim dues successions, una la dels nombres parells l'altre dels imparells, quin és el límit de la suma i del quocient de les dues successions?