# Sangakus. Àlgebra i geometria al Japó de l'època EDO [1600-1868]

Ramon Nolla Sans

Institut Pons d'Icart
Tarragona

Cicle: "Més enllà de Grècia: cap a una visió multicultural de les matemàtiques"

SOCIETAT CATALANA D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
Filial de l'Institut d'Estudis Catalans

26 d'abril de 2013

# Índex

# Introducció

Els *sangakus* constituien una manifestació de la matemàtica japonesa, *wasan*, de l'època Edo (1600-1868). Eren tauletes de fusta que contenen problemes matemàtics, en la seva majoria geomètrics, que es penjaven de les parets i ràfecs de les teulades dels temples budistes i santuaris sintoistes.

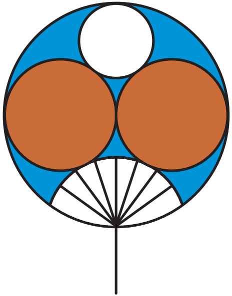
Santuari Kaizu Tenma (pref. Shiga) (520 cm de llargària)

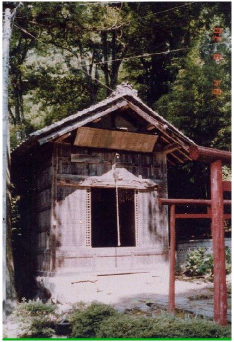
Santuari Aga (pref. Hyugo) 1879. (163 x 58 cm)

# Introducció

- Presenten composicions atractives, de cercles, polígons, el·lipses i figures tridimensionals amb la proposició de problemes.
- Algunes contenen les solucions i quasi mai el procediment.
- Se'n conserven al voltant de mil i hi ha registres de més de mil set-centes.
- La més antiga conservada és del 1683, (pref. Tochigi), i la més antiga enregistrada és del 1668, (diari de Yamaguchi Kanzan [1781-1850] en un viatge pel Japó).

Registre





Temple Sekisuiji. (pref Nagano) (178× 76 cm)

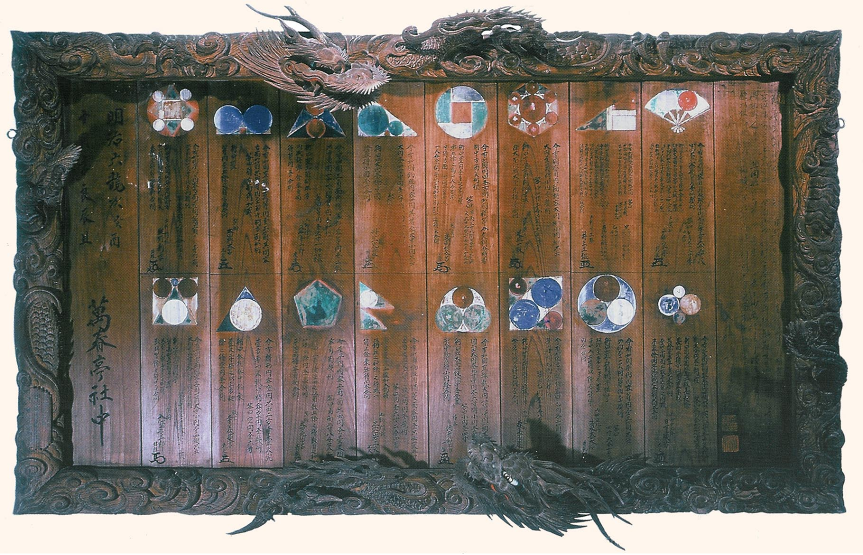
# Introducció

*Confuci diu: "Hauríeu de dedicar tot el vostre temps a estudiar, oblidant els àpats i prescindint de dormir". Les seves paraules són valuoses per a nosaltres. Des que era un nen, he estat estudiant matemàtiques i llegint molts llibres de matemàtiques. Quan tenia algun dubte, visitava i consultava al matemàtic Ono Eijyu. Agraeixo els ensenyaments del meu mestre. Per la seva bondat, vaig a penjar un Sangaku en aquest temple.*

Dedicatòria i sangaku penjat per Saito Kuninori [1828].
Temple Kitamuki Kannondo. Ueda (Nagano).

Extret i traduït de FUKAGAWA–ROTHMAN [2008]

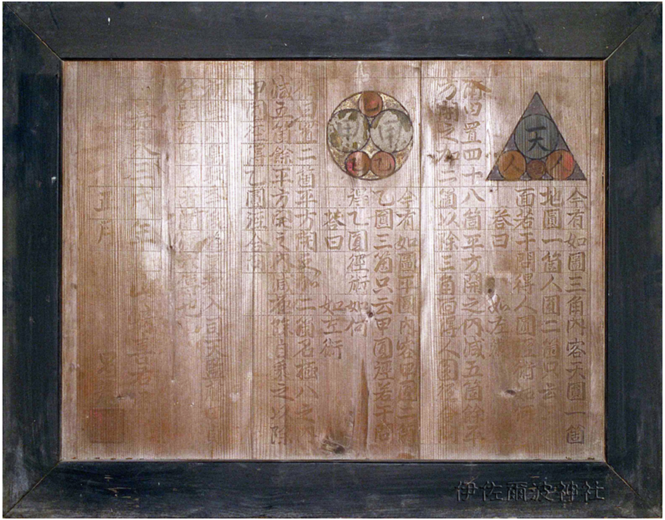
# Introducció



Santuari Katayamahiko. (pref. Okayama)
1873. (162 x 88 cm)

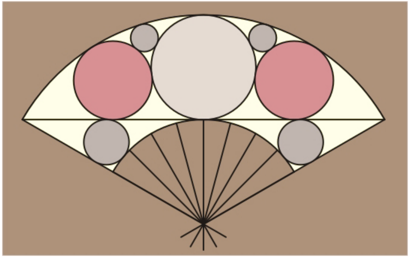
# Introducció

Santuari Suwa. (pref. Nagasaki)
1887. (215 x 107 cm)



Santuari Isaniwa. (pref. Ehime)
1850. (111 x 86 cm)

# Introducció



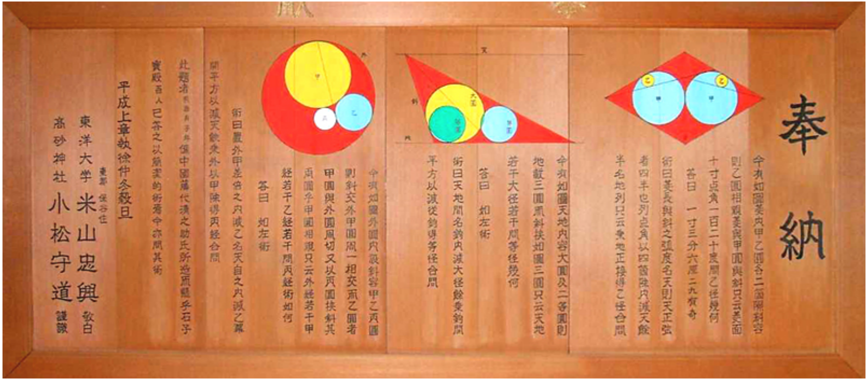

Santuari Isaniwa. (pref. Ehime)
1850. (75 x 91 cm)

# Introducció

Santuari Mizuho (pref. Nagano)
1800. (160 x 58 cm)

# Introducció


Santuari Haguro (pref. Yamagata)
1823. (450 x 150 cm)




Santuari Takasago (pref. Hyogo)
2000. (134 x 54 cm)

# Introducció


D'un temple que va ser destruït
Penjat el 1814 i descobert el 1994

## El costum de penjar sangakus

- Des de segles abans de l'època Edo, els fidels sintoistes feien ofrenes als déus, (*kami*), en els santuaris.
- Era un costum oferir un cavall, o una representació d'aquest sobre una tauleta.
- Amb el temps els motius de les tauletes es diversificaren.

Ema

Kano Sansetu 1637 ?

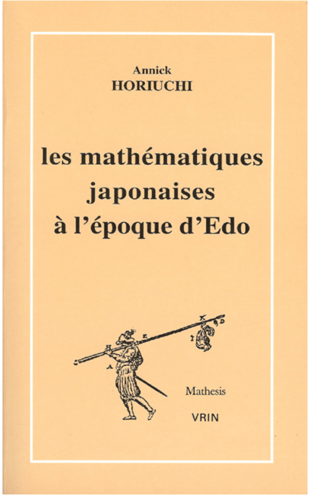
# Introducció

Vaixells penjats a l'església de Sant Magí al carrer del Portal del Carro de Tarragona

# Introducció

ANNICK HORIUCHI ha escrit l'obra més exhaustiva en llengua occidental sobre *wasan*. Fa referència a la competència entre escoles a [HORIUCHI] [1998].

*"La moda de les tauletes, en la qual s'ha vist durant molt de temps la prova que aquesta ciència [wasan] era desenvolupada com un pur entreteniment, s'inscrivia en un context històric precís marcat per la creixent difusió de la disciplina en el món rural, la professionalització dels mestres de la capital i, finalment, la forta competència entre les escoles. En aquest context, les tauletes juguen el paper d'instruments de comunicació i de publicitat, còmodes d'ús, econòmics, eficaços i més espectaculars que els tractats."*



# Wasan

$$\text{wasan} \stackrel{?}{=} \text{matemàtica}$$

$$\text{wasan} \stackrel{?}{=} \text{matemàtica}$$

| | Definició estandard | Traducció literal |
|---|---|---|
| wasan | matemàtica (*san*)<br>japonesa (*wa*) | càlcul o aritmètica (*san*)<br>japonesa (*wa*) |

# Wasan

$$\text{wasan} \stackrel{?}{=} \text{matemàtica}$$

| | Definició estandard | Traducció literal |
|---|---|---|
| wasan | matemàtica (*san*) japonesa (*wa*) | càlcul o aritmètica (*san*) japonesa (*wa*) |
| matemàtica | Ciència que tracta de la quantitat i de la forma tot estudiant-ne, des del punt de vista lògic, les seves relacions i estructures. (DIEC) | Allò que és objecte d'instrucció i d'estudi ($\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$–*mathema*). Així, matemàtic significava estudiòs i, segons Plató, (*República, VI 505a*) l'objecte de l'estudi suprem és la idea del Bé. |

# wasan $\stackrel{?}{=}$ matemàtica

| | Definició estandard | Traducció literal |
|---|---|---|
| wasan | matemàtica (*san*) japonesa (*wa*) | càlcul o aritmètica (*san*) japonesa (*wa*) |
| matemàtica | Ciència que tracta de la quantitat i de la forma tot estudiant-ne, des del punt de vista lògic, les seves relacions i estructures. (DIEC) | Allò que és objecte d'instrucció i d'estudi ($\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$–*mathema*). Així, matemàtic significava estudiòs i, segons Plató, (*República, VI 505a*) l'objecte de l'estudi suprem és la idea del Bé. |

El nom *matemàtica* adoptat a occident sembla implicar la creença en un cert tipus de coneixement transcendent proporcionat per aquesta matèria. Aquesta creença no la trobem en el *wasan* i possiblement per això no queda reflectit en el seu nom.

# Wasan. Apunt històric

- El *wasan* es desenvolupa durant el període Edo [1600–1868].
- Període de pau amb el govern en mans dels Tokugawa i amb seu a Edo.
- Els guerrers (*samurais*) es converteixen en mestres itinerants o d'escoles rurals (*juku*).
- El país es tanca (*sakoku*) i queda aïllat. S'expulsa els portuguesos i s'eradica el cristianisme en la dècada del 1630.
- L'únic contacte amb Occident fou, sota grans restriccions, amb els comerciants holandesos confinats en l'illa artificial de Deshima de 200 per 70 metres, en el port de Nagasaki.

# Wasan. Art i ciència

Santuari Souzume (Okayama), 1861.

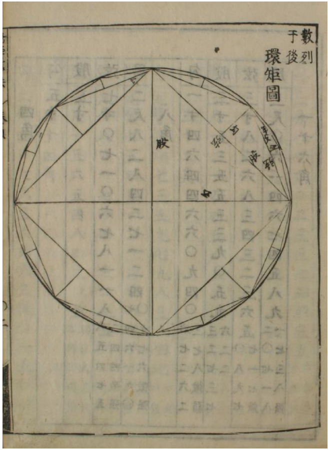
# Wasan. Vessant artísitica

- Es manifesta públicament en l'elaboració de sangakus d'execució molt acurada i en què el component estètic resideix en,
  - La plàstica de les presentacions.
  - El procediment (*jutsu*) de resolució, -quan hi és-, molt concís i de gran claretat, el qual pot amagar una anàlisi i uns càlculs de gran complexitat.
- N'hi havia d'un gran nivell de dificultat, que només es podien resoldre gràcies a la gran activitat desenvolupada en la vessant científica.

- L'adjectiu artístic li escau, a més dels motius estètics, pel tipus d'organització de les escoles, similar al model "*iemoto*", (cap de l'escola), que seguien les escoles d'arts tradicionals japoneses, (flauta, cerimònia del té, arranjaments florals, etc).

# Wasan. Vessant científica

- La trobem en el contingut dels tractats escrits per l'elit de la capital Edo en què es desenvolupen recerques de més alt nivell.
- Aquestes adopten i assimilen durant bona part del segle XVII la tradició xinesa per després trencar (fer-la evolucionar ?) amb ella i desenvolupar formes pròpies de recerca.

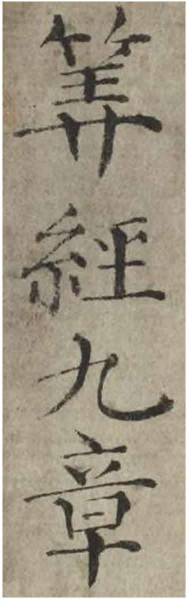



Imatge que acompanya al càlcul de $\pi$ en el *Katsuyō Sanpō*, (Compendi de mètodes matemàtics), de Seki Takakazu. Publicat el 1712 i escrit abans de 1680.

# Wasan. Vessant científica

Influència xinesa. Tractats principals.

- *Jiuzhang suanshu*, (Nou capítols de l'art -procediments- del càlcul), s. I.
- *Suanxue quimeng*, (Introducció a la ciència del càlcul), 1299. Zhu Shijie
- *Suanfa tongzong*, (Bases unificades dels mètodes del càlcul), 1592. Cheng Dawei

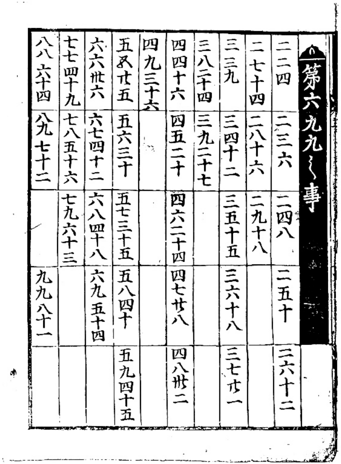



*Els nou capítols*

# Wasan. Vessant científica

Tractats principals de l'assimilació xinesa,

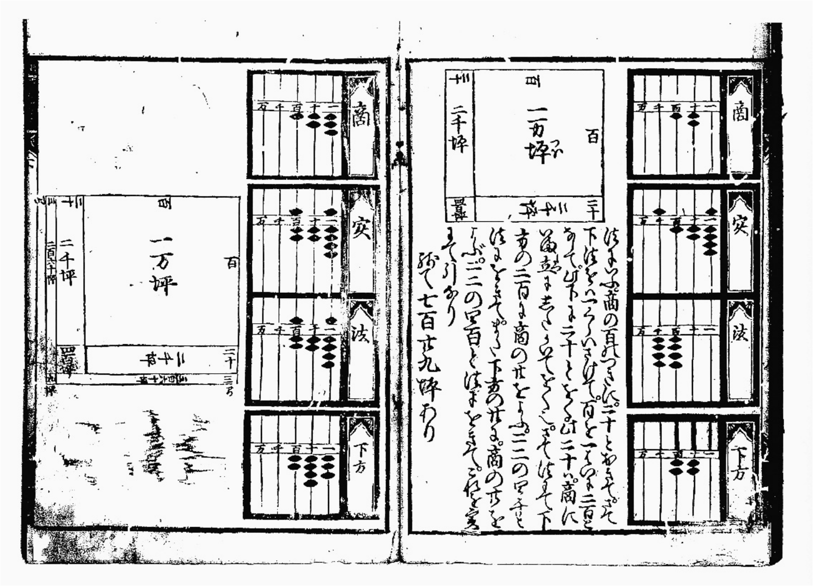
- *Jinkōki*, (Tractat inalterable), 1627. Yoshida Mitsuyoshi.
- *Jugairoku*, (Registre de Jugai), 1639. Imamura Tomoaki
- *Sanso*, (Expositor de matemàtiques), 1663. Muramatsu Shisekiyo
- *Kokon sanpōki*, (Tractat de matemàtiques antigues i modernes), 1671. Sawaguchi Kazuyuki



第六九九〻事

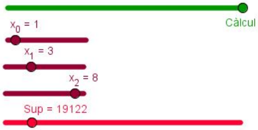
二二四 二三六 二四八 二五十 二六十二
二七十四 二八十六 二九十八
三三九 三四十二 三五十五 三六十八 三七廿一
三八二十四 三九二十七
四四十六 四五二十 四六二十四 四七廿八 四八卅二
四九三十六
五五廿五 五六三十 五七三十五 五八四十 五九四十五
六六卅六 六七四十二 六八四十八 六九五十四
七七四十九 七八五十六 七九六十三
八八六十四 八九七十二 九九八十一

Taules de multiplicar. *Jinkōki*, 1627, edició de 1641.




Extracció de l'arrel quadrada de 15129. La resposta és 123.
*Jinkōki*, 1627, edició de 1641.

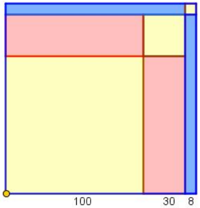
# Arrel quadrada. Justificació geomètrica de Liu Hui [263]




Residu

$19122 - (100 + 30 + 8)^2 = 19122 - 19044 = \boxed{78}$

$$\boxed{138.28159} \;\|\; 138 + \frac{78}{2 \cdot 138 + 1} \;\wedge\; \boxed{\sqrt{19122}} \;\wedge\; 138 + \frac{78}{2 \cdot 138} \;\|\; \boxed{138.28261}$$




Centenes $\rightarrow$ $x_0 = 1$

$(100x_0)^2 = (100)^2 = 10000 \Rightarrow \boxed{100x_0 = 100}$


Desenes $\rightarrow x_1 = 3$

$(2 \cdot 100x_0 + 10x_1) \cdot 10x_1 = (2 \cdot 100 + 30) \cdot 30 = 6900 \Rightarrow \boxed{10x_1 = 30}$


Unitats : $x_2 = 8$

$(2 \cdot (100x_0 + 10x_1) + x_2) \cdot x_2 = (2 \cdot 130 + 8) \cdot 8 = 2144 \Rightarrow \boxed{x_2 = 8}$

HTM GGB

# Wasan. Vessant científica

Actors principals del trencament amb (evolució de ?) la tradició xinesa,

- Seki Takakazu [1640?-1708]
- Takebe Katahiro [1664-1739]

Seki Takakazu

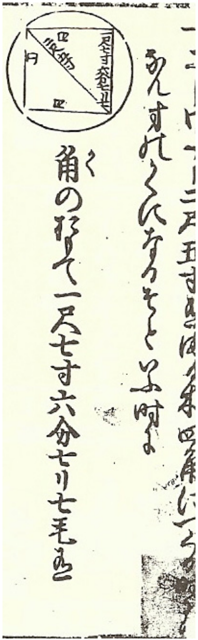
# Wasan. Àlgebra i geometria

- En la tradició xinesa, l'àlgebra és una eina per resoldre problemes, i quan s'estudia amb independència d'aquests està orientada millorar-ne de les tècniques de resolució.
- En la tradició japonesa hi ha un esforç de generalització, de presentació abstracta i d'estructuració dels processos de resolució.

- És un àlgebra instrumental com la xinesa (utilitzen els reglets de càlcul), però introdueixen novetats en la seva versió escrita. Així les dades poden ser, a més de numèriques, literals.
- Això permet ampliar el seu camp de recerca amb l'estudi de les condicions per a l'existència de solucions i la compatibilitat de les dades d'un problema.

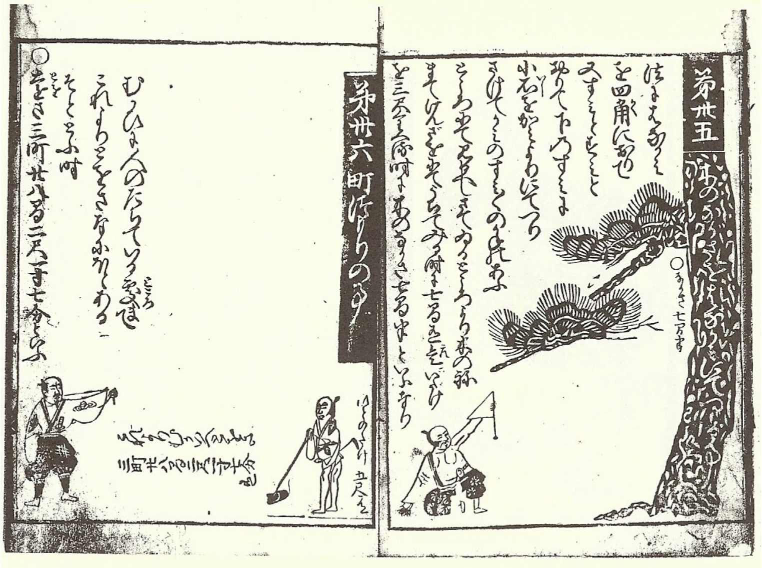
# Wasan. Àlgebra i geometria

- Els avenços en el domini de l'àlgebra els permeten l'obtenció de resultats geomètrics per camins alternatius als de la tradició occidental. Un dels exemples a destacar és el de la recerca sobre màxims i mínims, lluny de les eines del càlcul diferencial utilitzades a Europa.
- Per establir les equacions algèbriques que determinaran les solucions dels problemes geomètrics, utilitzen principalment les regles de:
  - La "base-perpendicular-hipotenusa"(teorema de Pitàgores)
  - La "doble hipotenusa-perpendicular"(càlcul de l'altura d'un triangle, en funció dels seus costats, a partir dels dos triangles rectangles que determina).
  - La semblança de triangles rectangles.



---

*Jinkōki*. Càlcul del costat d'un quadrat inscrit en un cercle de diàmetre conegut.



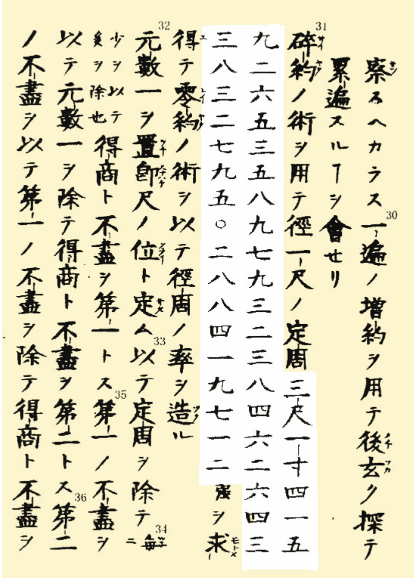

*Jinkōki*. Càlcul de la distància entre dues persones i de l'altura d'un arbre amb l'ajut de la semblança.

# Wasan. La matemàtica segons Takebe

En el *Tetsujutsu sankei*, (Tractat sobre el procediment [o tècnica] per acumulació [o connexió d'exemples o casos particulars estudiats]) de 1722, Takebe presenta d'una manera molt didàctica el seu mètode (*tetsujutsu*) de recerca i l'objectiu de les matemàtiques. En el prefaci en fa l'exposició i mitjançant dotze exemples en mostra la eficàcia.

**Valor de $\pi$ en el Tetsujutsu sankei**

3.14159265358979323846264338327950288419712


察スヘカラス一遍ノ増約ヲ用テ後玄ク探テ
累遍スルコトヲ會セリ
砕約ノ術ヲ用テ徑一尺ノ定周三尺一寸四一五
九二六五三五八九七九三二三八四六二六四三
三八三二七九五〇二八八四一九七一二強ヲ求
得テ零約ノ術ヲ以テ徑周ノ率ヲ造ル
元數一ヲ置テ即尺ノ位ト定ム以テ定周ヲ除テ
少ヲ以テ除テ得商ト不盡ヲ第一トス第一ノ不盡ヲ
以テ元數一ヲ除テ得商ト不盡ヲ第二トス第二
ノ不盡ヲ以テ第一ノ不盡ヲ除テ得商ト不盡ヲ

# Wasan. La matemàtica segons Takebe. Prefaci

"El *tetsujutsu* no és altra cosa que esbrinar per l'acumulació fins assolir la comprensió del principi (*ri*) dels procediments.
Entre els mètodes de recerca hi ha el que es basa en el principi i el que es basa en els nombres.
Si la investigació d'un cas no és suficient per trobar el principi, se n'estudien dos. Si dos no són suficients se n'estudien tres. I si el principi del procediment està profundament ocult, si es manté la recerca en multiplicitat de casos, s'arriba sempre a un punt de maduració de manera que serà impossible no trobar-lo.
...
Les matemàtiques consisteixen en l'establiment de **regles** (*hōsoku*), l'aclariment del **principi** dels procediments i el càlcul dels **nombres**. Quant a aquesta tasca, es dirà que és "conforme" (*jun*, directa), si el principi és discernit, si el procediment és explicitat i si els nombres són calculats amb l'ajut del procediment. Es dirà que és "contrària" (*geki*, inversa), si el procediment és avaluat mitjançant els nombres i si el principi és trobat amb l'ajut del procediment. El "conforme" i el "contrari" es troben reunits en el *tetsujutsu*."

# Wasan. La matemàtica segons Takebe

## Recerca "per mitjà del principi" (conforme)

Resideix en el geni i la intuïció nascudes de l'atenció, la qual porta a una visió directa de la font de comprensió del problema o procediment estudiat.

Segons Takebe, un representant privilegiat és el mètode del *tianyuan* que,

- Parteix del principi de la introducció de l'element desconegut, (*celestial*).
- L'utilitza per establir una equació a partir de les condicions del problema.
- I, finalment, amb una regla que només implica multiplicacions i sumes aplicades d'una manera recurrent, dóna la solució d'una classe molt gran de problemes.

# Wasan. La matemàtica segons Takebe

## Recerca "per mitjà dels nombres"(contrària)

Consisteix en l'elaboració de temptejos de càlcul sobre valors numèrics concrets per tal d'orientar els matemàtics sobre el resultat quan el "principi"és de difícil accés. No hi ha una visió directa de la font del problema o procediment, sinó que s'hi arriba per una marxa inversa a l'anterior.

Un exemple el proporcionen els procediments de l'*enri*, (principi o teoria del cercle), per al càlcul de la longitud de l'arc i del cercle.

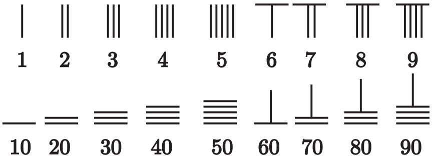
# Wasan. La matemàtica segons Takebe

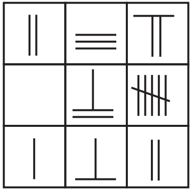
## Conclusió

- No es parla de deducció lògica a partir d'uns primers principis per establir una *demostració* tal com l'entenem en la nostra tradició.
- El descobriment es produeix per una marxa paral·lela entre la intuïció i el pensament que moltes vegades raona inductivament a partir de múltiples temptejos numèrics.

# Wasan. Reglets de càlcul

Es representaven els nombres i les equacions amb reglets sobre un tauler quadriculat on es feien els càlculs. En tenien una versió escrita que permetia introduir coeficients literals.



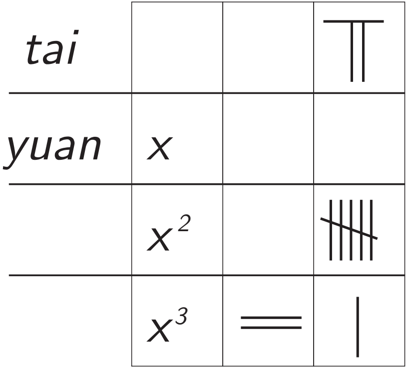



| | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 7 |
| − | 7 | 5 |
| 1 | 6 | 2 |

- Diferent presentació per a les unitats segons el seu ordre parell o senar.
- Diferents colors (vermell i negre) per als nombres positius i negatius. En la presentació escrita es podia trobar un reglet inclinat sobre l'ordre de les unitats si el nombre era negatiu.
- El zero es representa per un espai buit. En la presentació escrita es podia trobar un petit cercle.

# Wasan. Reglets de càlcul. Polinomis i equacions

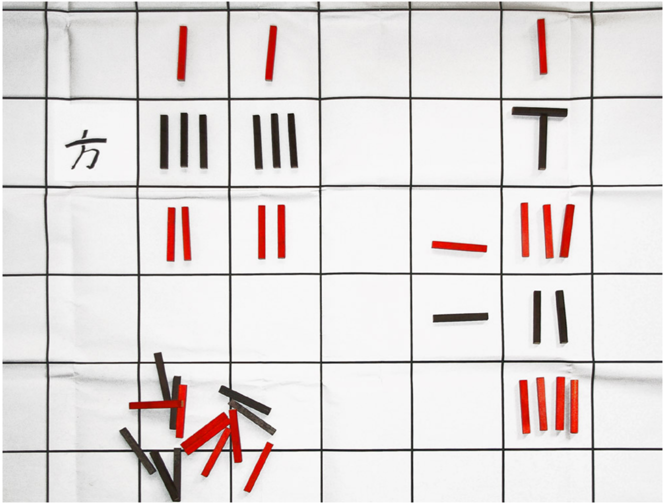
Els polinomis es presenten en columnes. Es tria una línia horitzontal de referència que representa l'element desconegut (*yuan*) o la línia que representa l'element constant (*tai*). Llavors les línies immediatament inferiors representen les segones, terceres, quartes potències.




Presentació de $21x^3 - 5x^2 + 7 = 0$, o també, $21x^3 - 5x^2 + 7$.

# Wasan. Reglets de càlcul. Polinomis i equacions

En el *Kaiindai no hō* [1685], (Mètode per resoldre els problemes ocults), Seki descriu la suma, resta i multiplicació de polinomis




$$(1-3x+2x^2)^2 = 1-6x+13x^2-12x^3+4x^4$$

# Problema 1

**Sangaku del Santuari Katayamahiko**

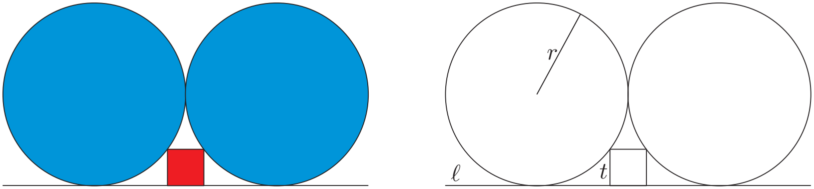
Penjat per Irie Shijyun el 1873, a l'edat de 78 anys. $162 \times 88$ cm

*Les matemàtiques són profundes. Les persones tenen els seus mètodes per resoldre problemes. Això és veritat a Occident com a la Xina i al Japó. Aquells que no estudien molt no poden resoldre cap problema. Jo encara no domino les matemàtiques, tot i que he estat estudiant des de la joventut. Així que no he esdevingut mestre per ningú, però algunes persones m'han demanat que els ensenyi matemàtiques. Els vaig mostrar les solucions als problemes i penjaré un sangaku en el santuari proper de Katayamahiko amb setze problemes escrits. Dedico aquesta tauleta al santuari amb l'esperança que augmentin el seu coneixement de les matemàtiques.*

---

Versió de la traducció anglesa de [Fukagawa–Rothman], 2008.

# Problema 1




*Dos cercles de radi r són tangents a la línia l. Un quadrat de costat t toca els dos cercles i té un costat sobre l. Trobeu t a partir de r.*

- FUKAGAWA-ROTHMAN [2008] proposen una solució consistent en la resolució d'una equació de segon grau, obtinguda de l'aplicació del teorema de Pitàgores.
- Per tal d'apropar-nos a la resolució *wasan*, presentarem el seu mètode (*tianyuan*) a partir d'un problema extret del *Tetsujutsu sankei* [1722] de Takebe Katahiro.

# *Tianyuan shu*. El procediment de l'"element celestial"

- Procediment originat a la Xina del que tenim obra escrita del segle XIII. A la Xina, *tian*–cel, *yuan*–origen. Al Japó *tengen jutsu*.
- MARTZLOFF [1987] indica que ja era utilitzat en el segle XI.
- La regla de càlcul final actua per aproximacions succesives en els diferents ordres d'unitats. És del tot similar al mètode de Ruffini-Horner i és una evolució del mètodes de l'extracció dels costat del quadrat i del cub, (arrels quadrades i arrels cúbiques).
- Segons WANG LING- NEEDHAM [1955], el mètode s'estaria gestant des de, com a mínim, el segle III, època dels comentaris de LIU HUI al *Jiuzhang suanshu*.
- En la tradició àrab, AL-SAMAWA'L [ca 1172] utilitzava un mètode similar.
- A Europa, LEONARDO PISANO, sense explicar el mètode, va ser capaç de donar la solució $1; 22, 07, 42, 33, 04, 40 = 1.3688081078\mathbf{5}$ per a l'equació $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$, en el seu *Flos leonardi* [1225]

## *Tianyuan shu*. Etapes

1. Elecció de l'element celestial (incògnita) amb col·locació d'un reglet en la fila (*yuan*).
2. Operació sobre aquest element per presentar els elements resultants de l'anàlisi del problema.
3. Manipulació algèbrica d'aquests elements mitjançant l'aplicació de teoremes geomètrics per tal d'obtenir un equació.
4. Resolució de l'equació mitjançant una regla d'aproximacions successives, molt similar al mètode de Ruffini-Horner.

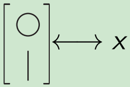
# *Tianyuan shu*. Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

Suposem que hi ha un rectangle d'àrea 180 *bu*. Dada: La suma de la llargada més l'amplada és 27 *bu*. Pregunta: Quant mesuren la llargada i l'amplada?
Resposta: amplada 12 *bu*, llargada 15 *bu*

# *Tianyuan shu*. Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

Suposem que hi ha un rectangle d'àrea 180 *bu*. Dada: La suma de la llargada més l'amplada és 27 *bu*. Pregunta: Quant mesuren la llargada i l'amplada?
Resposta: amplada 12 *bu*, llargada 15 *bu*

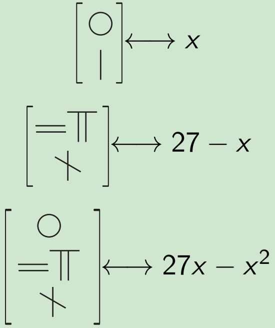
1. Col·loquem l'element celestial com l'amplada.



# *Tianyuan shu*. Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

Suposem que hi ha un rectangle d'àrea 180 *bu*. Dada: La suma de la llargada més l'amplada és 27 *bu*. Pregunta: Quant mesuren la llargada i l'amplada?
Resposta: amplada 12 *bu*, llargada 15 *bu*

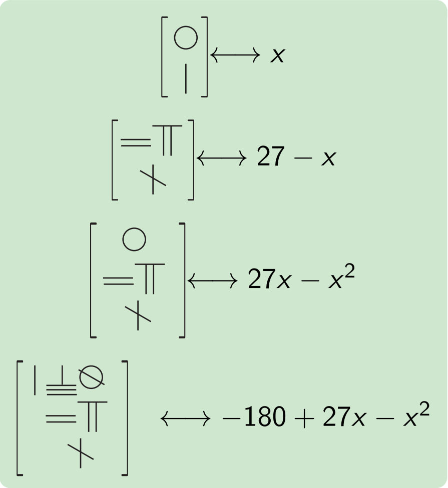
1. Col·loquem l'element celestial com l'amplada.
2. Restem aquest de la suma i fem la resta el costat llarg. Multipliquem el costat curt per aquest i fem això l'àrea del rectangle. Movem això a l'esquerra.



# *Tianyuan shu*. Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

Suposem que hi ha un rectangle d'àrea 180 *bu*. Dada: La suma de la llargada més l'amplada és 27 *bu*. Pregunta: Quant mesuren la llargada i l'amplada?
Resposta: amplada 12 *bu*, llargada 15 *bu*

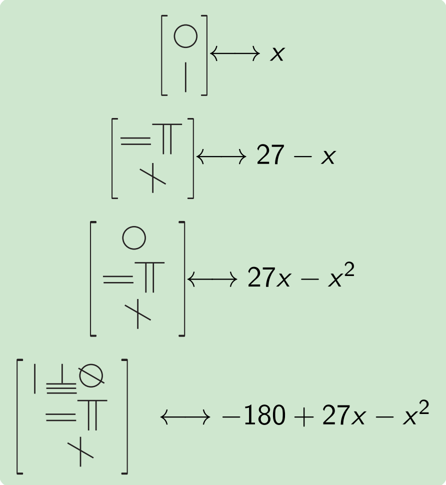
1. Col·loquem l'element celestial com l'amplada.
2. Restem aquest de la suma i fem la resta el costat llarg. Multipliquem el costat curt per aquest i fem això l'àrea del rectangle. Movem això a l'esquerra.
3. Col·loquem l'àrea, la qual es cancel·la pel nombre de l'esquerra i obtenim l'equació.



# *Tianyuan shu*. Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

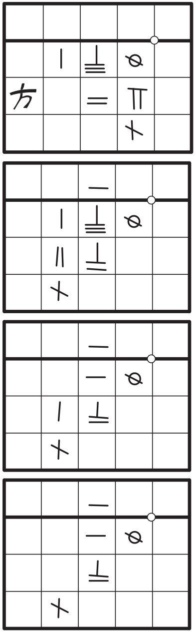
Suposem que hi ha un rectangle d'àrea 180 *bu*. Dada: La suma de la llargada més l'amplada és 27 *bu*. Pregunta: Quant mesuren la llargada i l'amplada?
Resposta: amplada 12 *bu*, llargada 15 *bu*

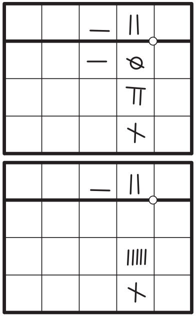
1. Col·loquem l'element celestial com l'amplada.
2. Restem aquest de la suma i fem la resta el costat llarg. Multipliquem el costat curt per aquest i fem això l'àrea del rectangle. Movem això a l'esquerra.
3. Col·loquem l'àrea, la qual es cancel·la pel nombre de l'esquerra i obtenim l'equació.
4. Traiem l'arrel quadrada d'aquesta i obtenim l'amplada 12 *bu*. Restem aquesta de la suma i obtenim la llargada 15 *bu*. (Omitim el procediment principal.)



# *Tianyuan shu.* Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

## Procediment principal. Extracció de l'arrel





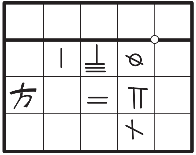
# *Tianyuan shu*. Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

## Procediment principal. Extracció de l'arrel

$$\boxed{-x^2 + 27x - 180 = 0}$$

## *Tianyuan shu*. Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

### Procediment principal. Extracció de l'arrel

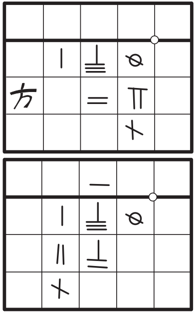


$$\boxed{-x^2 + 27x - 180 = 0}$$

$$\begin{array}{|ccc} -1 & 27 & -180 \end{array}$$

# *Tianyuan shu*. Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

## Procediment principal. Extracció de l'arrel



$$\boxed{-x^2 + 27x - 180 = 0}$$

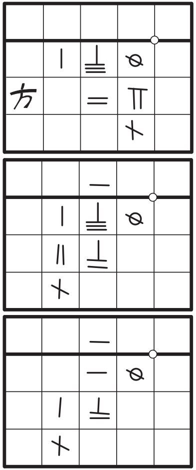
$$\begin{array}{l|ccc} & -1 & 27 & -180 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x = 10y \Longrightarrow \text{arrel de} \\ -100y^2 + 270y - 180 \end{array}}$$

$$\begin{array}{l|ccc} & -100 & 270 & -180 \end{array}$$

# *Tianyuan shu*. Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

## Procediment principal. Extracció de l'arrel




$$\boxed{-x^2 + 27x - 180 = 0}$$

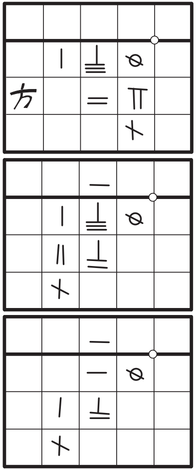
$$\begin{array}{r|rrr} & -1 & 27 & -180 \\ 10 & & -10 & 170 \\ \hline & -1 & 17 & -10 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 10y \Longrightarrow \text{arrel de} \\ -100y^2 + 270y - 180 \end{array}}$$

$$\begin{array}{|rrr} -100 & 270 & -180 \end{array}$$

# *Tianyuan shu.* Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

## Procediment principal. Extracció de l'arrel

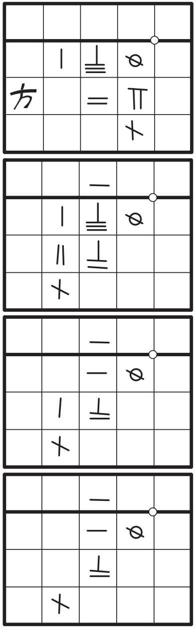



$$\boxed{-x^2+27x-180=0}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $-1$ | $27$ | $-180$ |
| $10$ | | $-10$ | $170$ |
| | $-1$ | $17$ | $-10$ |

$$\boxed{\begin{array}{l} x=10y \Longrightarrow \text{arrel de} \\ -100y^2+270y-180 \end{array}}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $-100$ | $270$ | $-180$ |
| $1$ | | $-100$ | $170$ |
| | $-100$ | $170$ | $-10$ |




$\boxed{-x^2+27x-180=0}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $-1$ | $27$ | $-180$ |
| $10$ | | $-10$ | $170$ |
| | $-1$ | $17$ | $-10$ |
| $10$ | | $-10$ | |
| | $-1$ | $7$ | |

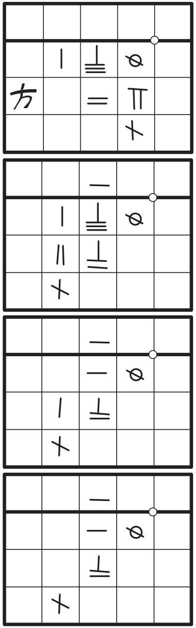
$x = 10y \Longrightarrow$ arrel de $-100y^2+270y-180$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $-100$ | $270$ | $-180$ |
| $1$ | | $-100$ | $170$ |
| | $-100$ | $170$ | $-10$ |

# *Tianyuan shu*. Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

## Procediment principal. Extracció de l'arrel





$$\boxed{-x^2+27x-180=0}$$

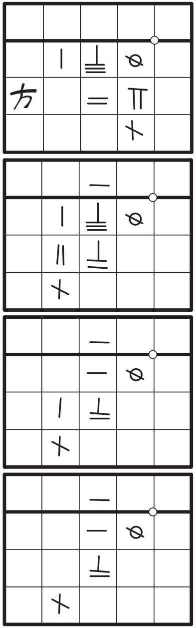
| | | | |
| --- | --- | --- | --- |
| | $-1$ | $27$ | $-180$ |
| $10$ | | $-10$ | $170$ |
| | $-1$ | $17$ | $-10$ |
| $10$ | | $-10$ | |
| | $-1$ | $7$ | |

$$\boxed{x=10y \Longrightarrow \text{arrel de } -100y^2+270y-180}$$

| | | | |
| --- | --- | --- | --- |
| | $-100$ | $270$ | $-180$ |
| $1$ | | $-100$ | $170$ |
| | $-100$ | $170$ | $-10$ |
| $1$ | | $-100$ | |
| | $-100$ | $70$ | |

# *Tianyuan shu*. Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

## Procediment principal. Extracció de l'arrel




$$\boxed{-x^2 + 27x - 180 = 0}$$

$$\begin{array}{r|rrr}
 & -1 & 27 & -180 \\
10 & & -10 & 170 \\
\hline
 & -1 & 17 & -10 \\
10 & & -10 & \\
\hline
 & -1 & 7 &
\end{array}$$

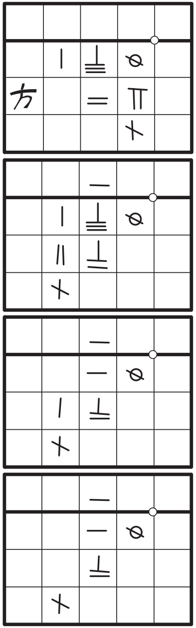
$$\boxed{\text{1a aproximació: } x_0 = 10}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x = 10y \implies \text{arrel de} \\ -100y^2 + 270y - 180 \end{array}}$$

$$\begin{array}{r|rrr}
 & -100 & 270 & -180 \\
1 & & -100 & 170 \\
\hline
 & -100 & 170 & -10 \\
1 & & -100 & \\
\hline
 & -100 & 70 &
\end{array}$$

# *Tianyuan shu*. Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

## Procediment principal. Extracció de l'arrel



$$-x^2 + 27x - 180 = 0$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $-1$ | $27$ | $-180$ |
| $10$ | | $-10$ | $170$ |
| | $-1$ | $17$ | $-10$ |
| $10$ | | $-10$ | |
| | $-1$ | $7$ | |

1a aproximació: $x_0 = 10$

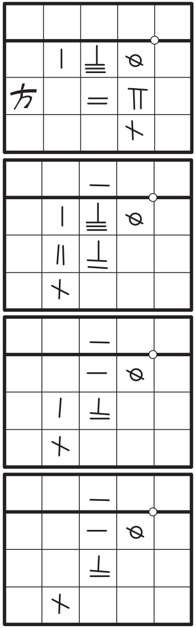
$x = 10y \Longrightarrow$ arrel de $-100y^2 + 270y - 180$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $-100$ | $270$ | $-180$ |
| $1$ | | $-100$ | $170$ |
| | $-100$ | $170$ | $-10$ |
| $1$ | | $-100$ | |
| | $-100$ | $70$ | |

1a aprox: $x_0 = 10 \cdot 1 = 10$

# *Tianyuan shu*. Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

## Procediment principal. Extracció de l'arrel



$$\boxed{-x^2 + 27x - 180 = 0}$$

$$\begin{array}{r|rrr}
 & -1 & 27 & -180 \\
10 & & -10 & 170 \\
\hline
 & -1 & 17 & -10 \\
10 & & -10 & \\
\hline
 & -1 & 7 &
\end{array}$$

1a aproximació: $x_0 = 10$

$x = 10y \Longrightarrow$ arrel de $-100y^2 + 270y - 180$

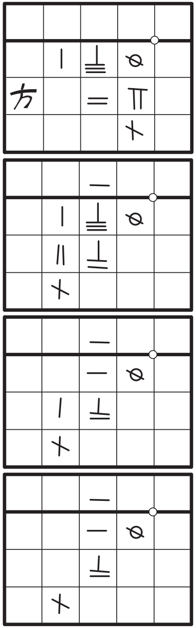
$$\begin{array}{r|rrr}
 & -100 & 270 & -180 \\
1 & & -100 & 170 \\
\hline
 & -100 & 170 & -10 \\
1 & & -100 & \\
\hline
 & -100 & 70 &
\end{array}$$

1a aprox: $x_0 = 10 \cdot 1 = 10$

$$\boxed{-x^2 + 7x - 10 = 0}$$

# *Tianyuan shu.* Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

## Procediment principal. Extracció de l'arrel



$-x^2 + 27x - 180 = 0$

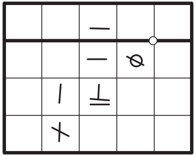
| | | | |
|---|---|---|---|
| | $-1$ | $27$ | $-180$ |
| $10$ | | $-10$ | $170$ |
| | $-1$ | $17$ | $-10$ |
| $10$ | | $-10$ | |
| | $-1$ | $7$ | |

1a aproximació: $x_0 = 10$

$x = 10y \Longrightarrow$ arrel de $-100y^2 + 270y - 180$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $-100$ | $270$ | $-180$ |
| $1$ | | $-100$ | $170$ |
| | $-100$ | $170$ | $-10$ |
| $1$ | | $-100$ | |
| | $-100$ | $70$ | |

1a aprox: $x_0 = 10 \cdot 1 = 10$

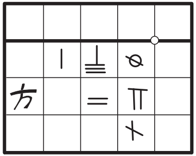


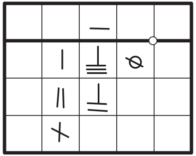
$-x^2 + 7x - 10 = 0$

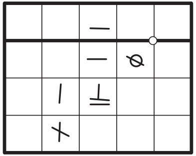
| | | | |
|---|---|---|---|
| | $-1$ | $7$ | $-10$ |

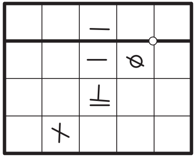
# *Tianyuan shu*. Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

## Procediment principal. Extracció de l'arrel









$$\boxed{-x^2 + 27x - 180 = 0}$$

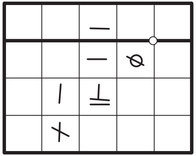
$$\begin{array}{r|rrr}
 & -1 & 27 & -180 \\
10 & & -10 & 170 \\
\hline
 & -1 & 17 & -10 \\
10 & & -10 & \\
\hline
 & -1 & 7 &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{1a aproximació: } x_0 = 10}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x = 10y \Longrightarrow \text{arrel de} \\ -100y^2 + 270y - 180 \end{array}}$$

$$\begin{array}{r|rrr}
 & -100 & 270 & -180 \\
1 & & -100 & 170 \\
\hline
 & -100 & 170 & -10 \\
1 & & -100 & \\
\hline
 & -100 & 70 &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{1a aprox: } x_0 = 10 \cdot 1 = 10}$$



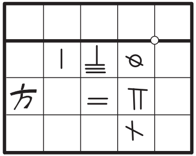
$$\boxed{-x^2 + 7x - 10 = 0}$$

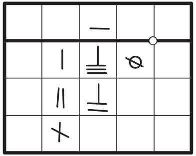
$$\begin{array}{|rrr}
-1 & 7 & -10
\end{array}$$

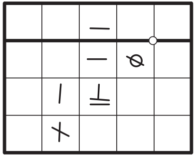
$$\boxed{\begin{array}{l} -100y^2 + 70y - 10 = 0 \\ x = 10y \Longrightarrow \text{arrel de} \\ -x^2 + 7x - 10 = 0 \end{array}}$$

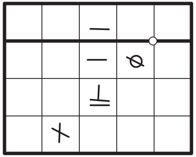
# *Tianyuan shu*. Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

## Procediment principal. Extracció de l'arrel









$$\boxed{-x^2+27x-180=0}$$

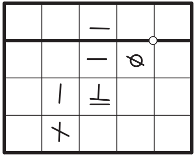
$$\begin{array}{r|rrr}
 & -1 & 27 & -180 \\
10 & & -10 & 170 \\
\hline
 & -1 & 17 & -10 \\
10 & & -10 & \\
\hline
 & -1 & 7 &
\end{array}$$

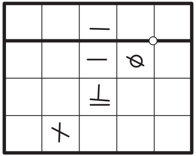
1a aproximació: $x_0 = 10$

$x = 10y \implies$ arrel de $-100y^2 + 270y - 180$

$$\begin{array}{r|rrr}
 & -100 & 270 & -180 \\
1 & & -100 & 170 \\
\hline
 & -100 & 170 & -10 \\
1 & & -100 & \\
\hline
 & -100 & 70 &
\end{array}$$

1a aprox: $x_0 = 10 \cdot 1 = 10$





$$\boxed{-x^2+7x-10=0}$$

$$\begin{array}{r|rrr}
 & -1 & 7 & -10 \\
2 & & -2 & 10 \\
\hline
 & -1 & 5 & 0
\end{array}$$

2a aproximació:

$x_0 + x_1 = 10 + 2 = 12$

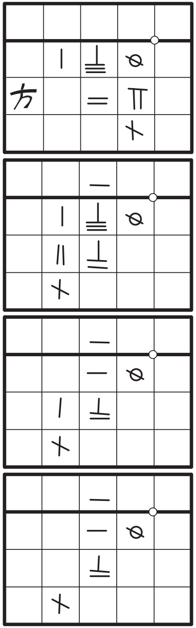
$-100y^2 + 70y - 10 = 0$

$x = 10y \implies$ arrel de

$-x^2 + 7x - 10 = 0$

# *Tianyuan shu*. Exemple de Takebe en el *Tetsujutsu sankei*

## Procediment principal. Extracció de l'arrel



$-x^2 + 27x - 180 = 0$

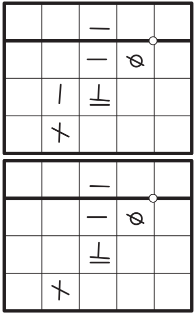
| | | | |
|---|---|---|---|
| | $-1$ | $27$ | $-180$ |
| $10$ | | $-10$ | $170$ |
| | $-1$ | $17$ | $-10$ |
| $10$ | | $-10$ | |
| | $-1$ | $7$ | |

1a aproximació: $x_0 = 10$

$x = 10y \Longrightarrow$ arrel de $-100y^2 + 270y - 180$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $-100$ | $270$ | $-180$ |
| $1$ | | $-100$ | $170$ |
| | $-100$ | $170$ | $-10$ |
| $1$ | | $-100$ | |
| | $-100$ | $70$ | |

1a aprox: $x_0 = 10 \cdot 1 = 10$



▸ HTM ▸ GGB

$-x^2 + 7x - 10 = 0$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $-1$ | $7$ | $-10$ |
| $2$ | | $-2$ | $10$ |
| | $-1$ | $5$ | $0$ |

2a aproximació:
$x_0 + x_1 = 10 + 2 = 12$

$-100y^2 + 70y - 10 = 0$
$x = 10y \Longrightarrow$ arrel de
$-x^2 + 7x - 10 = 0$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $-1$ | $7$ | $-10$ |
| $2$ | | $-2$ | $10$ |
| | $-1$ | $5$ | $0$ |

2a aproximació:
$x_0 + x_1 = 10 + 2 = 12$

# *Tianyuan shu.* Anàlisi de l'extracció de l'arrel de $-\mathbf{x}^2 + \mathbf{27x} - \mathbf{180}$

# *Tianyuan shu*. Anàlisi de l'extracció de l'arrel de $-\mathbf{x^2} + \mathbf{27x} - \mathbf{180}$

$$
\begin{array}{r|lll}
 & -1\ [a] & 27\ [b] & -180\ [c] \\
10\ [x_0] & & & \\
\hline
 & -1\ [a] & & 
\end{array}
$$

# *Tianyuan shu*. Anàlisi de l'extracció de l'arrel de $-\mathbf{x^2 + 27x - 180}$

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & -1\ {\color{red}[a]} & 27\ {\color{red}[b]} & -\ 180\ {\color{red}[c]} \\
10\ {\color{red}[x_0]} & & -\ 10\ {\color{red}[ax_0]} & \\
\hline
 & -\ 1\ {\color{red}[a]} & 17\ {\color{red}[ax_0+b]} &
\end{array}
$$

## *Tianyuan shu*. Anàlisi de l'extracció de l'arrel de $-\mathbf{x^2+27x-180}$

$$
\begin{array}{r|lll}
 & -1\ [a] & 27\ [b] & -180\ [c] \\
10\ [x_0] & & -10\ [ax_0] & 170\ [(ax_0+b)x_0] \\
\hline
 & -1\ [a] & 17\ [ax_0+b] & -10\ [(ax_0+b)x_0+c] = \boxed{ax_0^2+bx_0+c}
\end{array}
$$

# *Tianyuan shu*. Anàlisi de l'extracció de l'arrel de $-\mathbf{x}^2 + \mathbf{27x} - \mathbf{180}$

$$
\begin{array}{r|lll}
 & -1\ [a] & 27\ [b] & -180\ [c] \\
10\ [x_0] & & -10\ [ax_0] & 170\ [(ax_0+b)x_0] \\
\hline
 & -1\ [a] & 17\ [ax_0+b] & -10\ [(ax_0+b)x_0+c] = \boxed{ax_0^2+bx_0+c} \\
10\ [x_0] & & & \\
\hline
 & -1\ [a] & & \\
\end{array}
$$

# *Tianyuan shu.* Anàlisi de l'extracció de l'arrel de $-\mathbf{x}^2 + \mathbf{27x} - \mathbf{180}$

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & -1\ [a] & 27\ [b] & -\ 180\ [c] \\
10\ [x_0] & & -\ 10\ [ax_0] & 170\ [(ax_0+b)x_0] \\
\hline
 & -\ 1\ [a] & 17\ [ax_0+b] & -\ \ 10\ [(ax_0+b)x_0+c] = \boxed{ax_0^2+bx_0+c} \\
10\ [x_0] & & -\ 10\ [ax_0] & \\
\hline
 & -1\ [a] & 7\ [2ax_0+b] &
\end{array}
$$

# *Tianyuan shu*. Anàlisi de l'extracció de l'arrel de $-\mathbf{x}^2 + \mathbf{27x} - \mathbf{180}$

$$
\begin{array}{r|rrrl}
 & -1\ [a] & 27\ [b] & -\ 180\ [c] & \\
10\ [x_0] & & -\ 10\ [ax_0] & 170\ [(ax_0+b)x_0] & \\
\hline
 & -\ 1\ [a] & 17\ [ax_0+b] & -\ \ 10\ [(ax_0+b)x_0+c] & = \boxed{ax_0^2+bx_0+c} \\
10\ [x_0] & & -\ 10\ [ax_0] & & \\
\hline
 & -1\ [a] & 7\ [2ax_0+b] & -\ \ 10\ [ax_0^2+bx_0+c] &
\end{array}
$$

## *Tianyuan shu*. Anàlisi de l'extracció de l'arrel de $-\mathbf{x}^2 + \mathbf{27x} - \mathbf{180}$

$$
\begin{array}{r|llll}
 & -1\ [a] & 27\ [b] & -180\ [c] & \\
10\ [x_0] & & -10\ [ax_0] & 170\ [(ax_0+b)x_0] & \\
\hline
 & -1\ [a] & 17\ [ax_0+b] & -10\ [(ax_0+b)x_0+c] & = \boxed{ax_0^2+bx_0+c} \\
10\ [x_0] & & -10\ [ax_0] & & \\
\hline
 & -1\ [a] & 7\ [2ax_0+b] & -10\ [ax_0^2+bx_0+c] & \\
2\ [x_1] & & & & \\
\hline
 & -1\ [a] & & & \\
\end{array}
$$

## *Tianyuan shu*. Anàlisi de l'extracció de l'arrel de $-\mathbf{x}^2 + \mathbf{27x} - \mathbf{180}$

$$
\begin{array}{r|llll}
 & -1\ [a] & 27\ [b] & -180\ [c] & \\
10\ [x_0] & & -10\ [ax_0] & 170\ [(ax_0+b)x_0] & \\
\hline
 & -1\ [a] & 17\ [ax_0+b] & -10\ [(ax_0+b)x_0+c] & = \boxed{ax_0^2+bx_0+c} \\
10\ [x_0] & & -10\ [ax_0] & & \\
\hline
 & -1\ [a] & 7\ [2ax_0+b] & -10\ [ax_0^2+bx_0+c] & \\
2\ [x_1] & & -2\ [ax_1] & & \\
\hline
 & -1\ [a] & 5\ [ax_1+(2ax_0+b)] & & 
\end{array}
$$

# *Tianyuan shu.* Anàlisi de l'extracció de l'arrel de $-\mathbf{x}^2 + \mathbf{27x} - \mathbf{180}$

$$
\begin{array}{r|rrl}
 & -1\,[a] & 27\,[b] & -180\,[c] \\
10\,[x_0] & & -10\,[ax_0] & 170\,[(ax_0+b)x_0] \\
\hline
 & -1\,[a] & 17\,[ax_0+b] & -10\,[(ax_0+b)x_0+c] = \boxed{ax_0^2+bx_0+c} \\
10\,[x_0] & & -10\,[ax_0] & \\
\hline
 & -1\,[a] & 7\,[2ax_0+b] & -10\,[ax_0^2+bx_0+c] \\
2\,[x_1] & & -2\,[ax_1] & 10\,[\big(ax_1+(2ax_0+b)\big)x_1] \\
\hline
 & -1\,[a] & 5\,[ax_1+(2ax_0+b)] & 0\,[\big(ax_1+(2ax_0+b)\big)x_1+(ax_0^2+bx_0+c)] \\
 & & & = \boxed{a(x_0+x_1)^2+b(x_0+x_1)+c}
\end{array}
$$

L'arrel és $x = x_0 + x_1 = 10 + 2 = 12.$

# *Tianyuan shu.* Anàlisi de l'extracció de l'arrel de $-\mathbf{x}^2 + \mathbf{27x} - \mathbf{180}$

$$
\begin{array}{r|rrl}
 & -1\ [a] & 27\ [b] & -180\ [c] \\
10\ [x_0] & & -10\ [ax_0] & 170\ [(ax_0+b)x_0] \\
\hline
 & -1\ [a] & 17\ [ax_0+b] & -10\ [(ax_0+b)x_0+c] = \boxed{ax_0^2+bx_0+c} \\
10\ [x_0] & & -10\ [ax_0] & \\
\hline
 & -1\ [a] & 7\ [2ax_0+b] & -10\ [ax_0^2+bx_0+c] \\
2\ [x_1] & & -2\ [ax_1] & 10\ [\big(ax_1+(2ax_0+b)\big)x_1] \\
\hline
 & -1\ [a] & 5\ [ax_1+(2ax_0+b)] & 0\ [\big(ax_1+(2ax_0+b)\big)x_1+(ax_0^2+bx_0+c)] \\
 & & & = \boxed{a(x_0+x_1)^2+b(x_0+x_1)+c}
\end{array}
$$

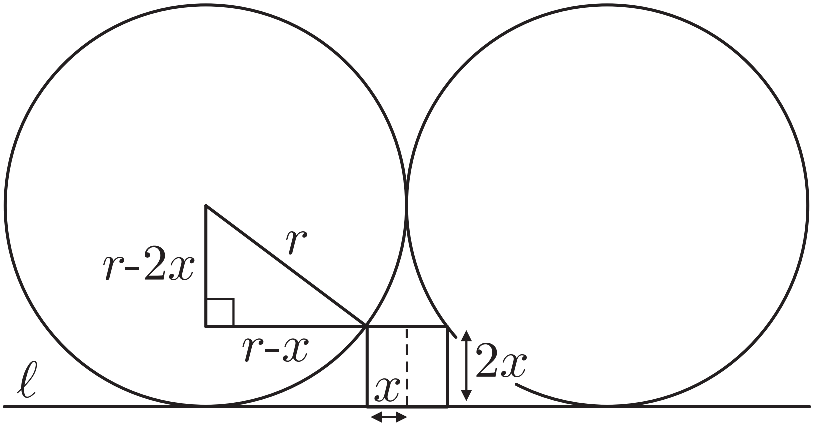
L'arrel és $x = x_0 + x_1 = 10 + 2 = 12$.

$x_1$ s'ha obtingut com arrel del polinomi

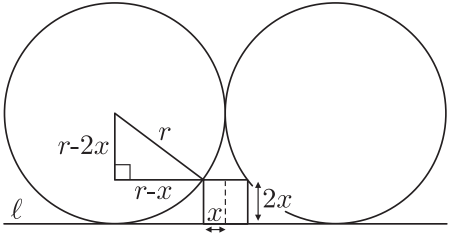
$$\boxed{-y^2 + 7y - 10\ [ay^2 + (2ax_0+b)y + ax_0^2 + bx_0 + c]}$$

que resulta de $\boxed{\text{fer el canvi } x = x_0 + y = 10 + y}$ en el polinomi inicial.

# *Tianyuan shu*. Resolució del problema del primer sangaku



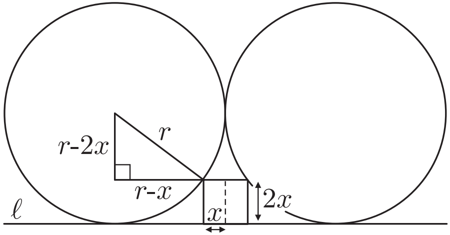
# *Tianyuan shu.* Resolució del problema del primer sangaku




1. Elecció de l'element celestial, desconegut o incògnita $x$ igual a la meitat del costat del quadrat.

| | | |
|---|---|---|
| *tai* | | 0 |
| *yuan* | $x$ | 1 |

# *Tianyuan shu*. Resolució del problema del primer sangaku

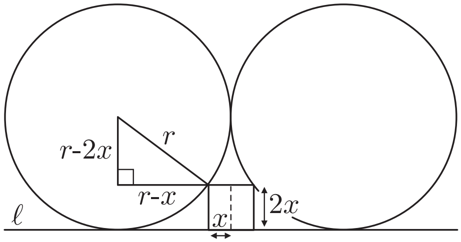



1. Elecció de l'element celestial, desconegut o incògnita $x$ igual a la meitat del costat del quadrat.
2. Presentació dels elements resultants de l'anàlisi del problema mitjançant els reglets de càlcul.

| | | (1) | | | (2) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *tai* | | 0 | $1r$ | | $1r$ | | $1r$ |
| *yuan* | $x$ | 1 | 0 | $-$ | 2 | $-$ | 1 |

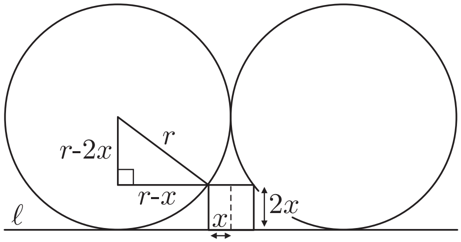
(1) Meitat del costat del quadrat: $x$
(2) Radi: $r$
Catet: $r-2x$
Catet: $r-x$

# *Tianyuan shu*. Resolució del problema del primer sangaku




3. Operacions amb els reglets per preparar l'aplicació del teorema de Pitàgores.

# *Tianyuan shu.* Resolució del problema del primer sangaku




3. Operacions amb els reglets per preparar l'aplicació del teorema de Pitàgores.

*yuan*

| | | |
|---|---|---|
| | | $1r$ |
| | $-$ | $2$ |
| | | |

$\times$

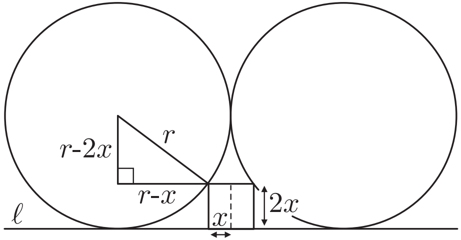
| | | |
|---|---|---|
| | | $1r$ |
| | $-$ | $2$ |
| | | |

$$1r^2$$
$$2\cdot(-2)\cdot 1r$$
$$(-2)^2$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | $1r^2$ |
| | | | $-$ | $4r$ |
| | | | | $4$ |

$$(r-2x)^2 \qquad r^2-4rx+4x^2$$

# *Tianyuan shu*. Resolució del problema del primer sangaku




❸ Operacions amb els reglets per preparar l'aplicació del teorema de Pitàgores.

*yuan*

| | | |
|---|---|---|
| | | $1r$ |
| | $-$ | $2$ |
| | | |

$\times$

| | | |
|---|---|---|
| | | $1r$ |
| | $-$ | $2$ |
| | | |

$1r^2$
$2\cdot(-2)\cdot 1r$
$(-2)^2$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | $1r^2$ |
| | | | $-$ | $4r$ |
| | | | | $4$ |

$(r-2x)^2$ $\qquad$ $r^2-4rx+4x^2$

---

*yuan*

| | | |
|---|---|---|
| | | $1r$ |
| | $-$ | $1$ |
| | | |

$\times$

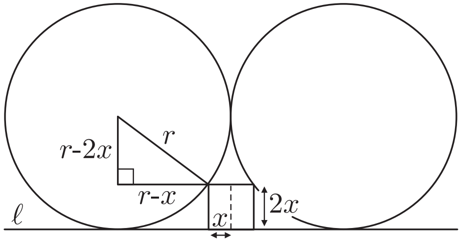
| | | |
|---|---|---|
| | | $1r$ |
| | $-$ | $1$ |
| | | |

$1r^2$
$2\cdot(-1)\cdot 1r$
$(-1)^2$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | $1r^2$ |
| | | | $-$ | $2r$ |
| | | | | $1$ |

$(r-x)^2$ $\qquad$ $r^2-2rx+x^2$

# *Tianyuan shu*. Resolució del problema del primer sangaku




Pel teorema de Pitàgores, s'obté $5x^2 - 6rx + r^2 = 0$. Efectivament:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | $1r^2$ |
| $x$ | | | $-$ | $4r$ |
| | | | | $4$ |

$(r^2 - 4rx + 4x^2)$

$+$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | $1r^2$ |
| | | | $-$ | $2r$ |
| | | | | $1$ |

$(r^2 - 2rx + x^2)$

$-$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | $1r^2$ |
| | | | |
| | | | |

$1$

$\Rightarrow$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | $1r^2$ |
| | | | $-$ | $6r$ |
| | | | | $5$ |

$r^2 - 6rx + 5x^2$

## *Tianyuan shu*. Resolució de l'equació $\mathbf{5x^2 - 6rx + r^2 = 0}$ $\longleftrightarrow (r = 160) \quad x^2 - 192x + 5120 = 0$

4. Resolució per aproximacions successives.

# *Tianyuan shu*. Resolució de l'equació $\mathbf{5x^2 - 6rx + r^2 = 0}$ $\longleftrightarrow (r = 160) \quad x^2 - 192x + 5120 = 0$

4. Resolució per aproximacions successives.

$$\begin{array}{r|lll} & 1 & -192 & 5120 \\ 30 & & & \\ \hline & 1 & & \end{array}$$

## *Tianyuan shu*. Resolució de l'equació $\mathbf{5x^2 - 6rx + r^2 = 0}$ $\longleftrightarrow (r = 160) \quad x^2 - 192x + 5120 = 0$

4. Resolució per aproximacions successives.

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -192 & 5120 \\
30 & & 30 & \\
\hline
 & 1 & -162 &
\end{array}$$

# *Tianyuan shu*. Resolució de l'equació $\mathbf{5x^2 - 6rx + r^2 = 0}$ $\longleftrightarrow (r = 160) \quad x^2 - 192x + 5120 = 0$

4. Resolució per aproximacions successives.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -192 & 5120 \\ 30 & & 30 & -4860 \\ \hline & 1 & -162 & 260 \end{array}$$

## *Tianyuan shu*. Resolució de l'equació $\mathbf{5x^2 - 6rx + r^2 = 0}$ $\longleftrightarrow (r = 160) \quad x^2 - 192x + 5120 = 0$

4. Resolució per aproximacions successives.

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -192 & 5120 \\
30 & & 30 & -4860 \\
\hline
 & 1 & -162 & 260 \\
30 & & & \\
\hline
 & 1 & & 
\end{array}
$$

# *Tianyuan shu*. Resolució de l'equació $\mathbf{5x^2 - 6rx + r^2 = 0}$ $\longleftrightarrow (r = 160) \quad x^2 - 192x + 5120 = 0$

4. Resolució per aproximacions successives.

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -192 & 5120 \\
30 & & 30 & -4860 \\
\hline
 & 1 & -162 & 260 \\
30 & & 30 & \\
\hline
 & 1 & -132 &
\end{array}
$$

# *Tianyuan shu*. Resolució de l'equació $\mathbf{5x^2 - 6rx + r^2 = 0}$ $\longleftrightarrow (r = 160) \quad x^2 - 192x + 5120 = 0$

4. Resolució per aproximacions successives.

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -192 & 5120 \\
30 & & 30 & -4860 \\
\hline
 & 1 & -162 & 260 \\
30 & & 30 & \\
\hline
 & 1 & -132 & 260
\end{array}
$$

# *Tianyuan shu*. Resolució de l'equació $\mathbf{5x^2 - 6rx + r^2 = 0}$ $\longleftrightarrow (r = 160) \quad x^2 - 192x + 5120 = 0$

4. Resolució per aproximacions successives.

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -192 & 5120 \\
30 & & 30 & -4860 \\
\hline
 & 1 & -162 & 260 \\
30 & & 30 & \\
\hline
 & 1 & -132 & 260 \\
2 & & & \\
\hline
 & 1 & & 
\end{array}
$$

## *Tianyuan shu*. Resolució de l'equació $\mathbf{5x^2 - 6rx + r^2 = 0}$ $\longleftrightarrow (r = 160) \quad x^2 - 192x + 5120 = 0$

4. Resolució per aproximacions successives.

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -192 & 5120 \\
30 & & 30 & -4860 \\
\hline
 & 1 & -162 & 260 \\
30 & & 30 & \\
\hline
 & 1 & -132 & 260 \\
2 & & 2 & \\
\hline
 & 1 & -130 &
\end{array}
$$

# *Tianyuan shu*. Resolució de l'equació $\mathbf{5x^2 - 6rx + r^2 = 0}$ $\longleftrightarrow (r = 160) \quad x^2 - 192x + 5120 = 0$

4. Resolució per aproximacions successives.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | − 192 | 5120 |
| 30 | | 30 | − 4860 |
| | 1 | − 162 | 260 |
| 30 | | 30 | |
| | 1 | − 132 | 260 |
| 2 | | 2 | − 260 |
| | 1 | − 130 | 0 |

# *Tianyuan shu*. Resolució de l'equació $\mathbf{5x^2 - 6rx + r^2 = 0}$ $\longleftrightarrow (r = 160) \quad x^2 - 192x + 5120 = 0$

4. Resolució per aproximacions successives.

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -192 & 5120 \\
30 & & 30 & -4860 \\
\hline
 & 1 & -162 & 260 \\
30 & & 30 & \\
\hline
 & 1 & -132 & 260 \\
2 & & 2 & -260 \\
\hline
 & 1 & -130 & 0
\end{array}
$$

L'arrel és $x = x_0 + x_1 = 32$ i el costat val $2x = 64$, és a dir $\dfrac{2}{5}$ del radi.

# *Tianyuan shu.* Resolució de l'equació $\mathbf{5x^2 - 6rx + r^2 = 0}$

Una resolució més directa s'obté si es mesura $x$ amb la unitat $r$, és a dir es fa $x = r \cdot y$. D'aquesta manera s'eliminen els coeficients literals.

$$5x^2 - 6rx + r^2 = 0 \Longleftrightarrow 5y^2 - 6y + 1 = 0$$

S'obté que l'arrel està entre 0 i 1. Per solucionar-ho, podien actuar com abans o també fer $10y = z$.

$$5y^2 - 6y + 1 = 0 \Longleftrightarrow z^2 - 12z + 20 = 0$$

## *Tianyuan shu*. Resolució de l'equació $\mathbf{5x^2 - 6rx + r^2 = 0}$

Una resolució més directa s'obté si es mesura $x$ amb la unitat $r$, és a dir es fa $x = r \cdot y$. D'aquesta manera s'eliminen els coeficients literals.

$$5x^2 - 6rx + r^2 = 0 \Longleftrightarrow 5y^2 - 6y + 1 = 0$$

S'obté que l'arrel està entre 0 i 1. Per solucionar-ho, podien actuar com abans o també fer $10y = z$.

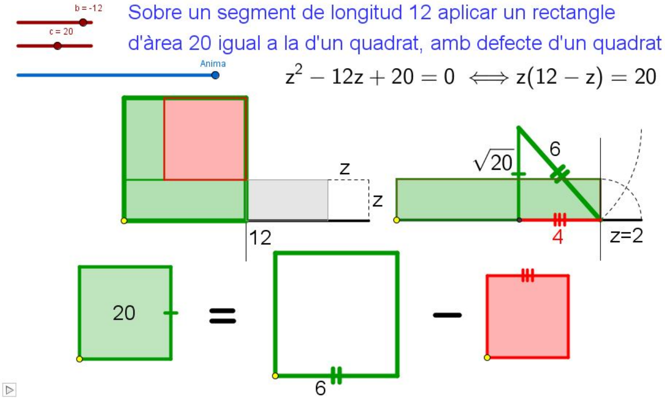
$$5y^2 - 6y + 1 = 0 \Longleftrightarrow z^2 - 12z + 20 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -12 & 20 \\ 2 & & 2 & -20 \\ \hline & 1 & -10 & 0 \end{array} \Longrightarrow \boxed{z = 2} \Longrightarrow \boxed{y = \frac{z}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}} \Longrightarrow \boxed{2x = r \cdot y = \frac{2r}{5}}$$

# Resolució en la tradició grega

- En la tradició grega, aquest era un problema de construcció, el resultat del qual calia establir amb una demostració. L'anàlisi prèvia restava oculta. Es plantejaria per comparació d'àrees sense simbolisme algèbric i es reduiria el problema a un d'aplicació d'àrees que es resoldria amb regle i compàs.

HTM GGB



# Resolució en la tradició àrab

- En la tradició àrab, l'anàlisi podia ser del tot igual i utilitzaven un llenguatge d'àlgebra no simbòlica. Disposaven d'un algoritme per resoldre l'equació amb radicals que demostraven des de la geometria. També utilitzaven (s.XII) el mètode de Ruffini-Horner).

**AL-KHWĀRIZMI.** *Llibre de l'àlgebra*, [813-830]

**Els quadrats i el nombre iguals a les arrels.**

Un quadrat i vint-i-un dirhams són iguals a deu arrels.

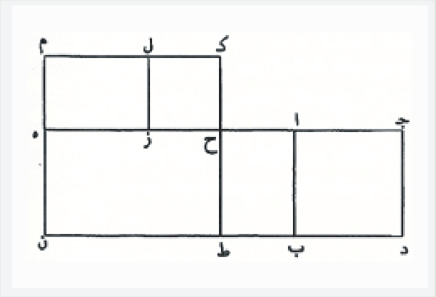
## Resolució en la tradició àrab

- En la tradició àrab, l'anàlisi podia ser del tot igual i utilitzaven un llenguatge d'àlgebra no simbòlica. Disposaven d'un algoritme per resoldre l'equació amb radicals que demostraven des de la geometria. També utilitzaven (s.XII) el mètode de Ruffini-Horner).

**AL-KHWĀRIZMI. *Llibre de l'àlgebra*, [813-830]**

**Els quadrats i el nombre iguals a les arrels.**

Un quadrat i vint-i-un dirhams són iguals a deu arrels. $[x^2 + 21 = 10x]$



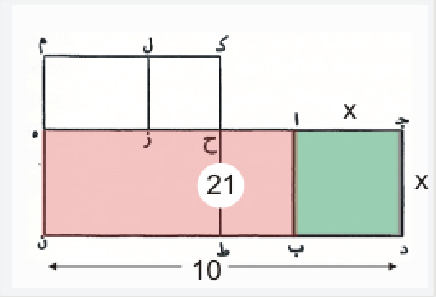
# Resolució en la tradició àrab

- En la tradició àrab, l'anàlisi podia ser del tot igual i utilitzaven un llenguatge d'àlgebra no simbòlica. Disposaven d'un algoritme per resoldre l'equació amb radicals que demostraven des de la geometria. També utilitzaven (s.XII) el mètode de Ruffini-Horner).

**AL-KHWĀRIZMI.** *Llibre de l'àlgebra*, [813-830]

**Els quadrats i el nombre iguals a les arrels.**

Un quadrat i vint-i-un dirhams són iguals a deu arrels. $[x^2 + 21 = 10x]$



# Resolució en la tradició àrab

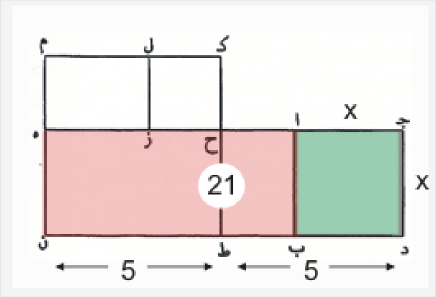
- En la tradició àrab, l'anàlisi podia ser del tot igual i utilitzaven un llenguatge d'àlgebra no simbòlica. Disposaven d'un algoritme per resoldre l'equació amb radicals que demostraven des de la geometria. També utilitzaven (s.XII) el mètode de Ruffini-Horner).

**AL-KHWĀRIZMI.** *Llibre de l'àlgebra*, [813-830]

**Els quadrats i el nombre iguals a les arrels.**

Un quadrat i vint-i-un dirhams són iguals a deu arrels. $[x^2 + 21 = 10x]$

Parteix en dues meitats el nombre d'arrels; es tindrà cinc;



# Resolució en la tradició àrab

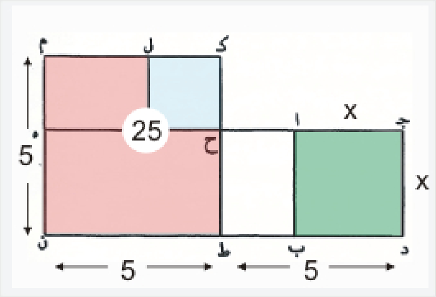
- En la tradició àrab, l'anàlisi podia ser del tot igual i utilitzaven un llenguatge d'àlgebra no simbòlica. Disposaven d'un algoritme per resoldre l'equació amb radicals que demostraven des de la geometria. També utilitzaven (s.XII) el mètode de Ruffini-Horner).

**AL-KHWĀRIZMI.** *Llibre de l'àlgebra*, [813-830]

**Els quadrats i el nombre iguals a les arrels.**

Un quadrat i vint-i-un dirhams són iguals a deu arrels. $[x^2 + 21 = 10x]$

Parteix en dues meitats el nombre d'arrels; es tindrà cinc; multiplica per ell mateix, es tindrà vint-i-cinc;



# Resolució en la tradició àrab

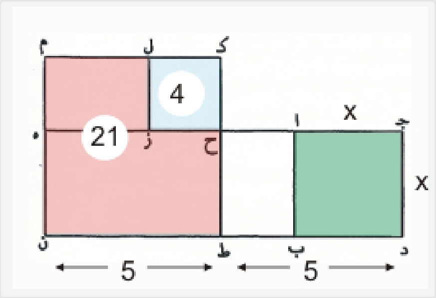
- En la tradició àrab, l'anàlisi podia ser del tot igual i utilitzaven un llenguatge d'àlgebra no simbòlica. Disposaven d'un algoritme per resoldre l'equació amb radicals que demostraven des de la geometria. També utilitzaven (s.XII) el mètode de Ruffini-Horner).

**Al-Khwārizmi.** *Llibre de l'àlgebra*, [813-830]

**Els quadrats i el nombre iguals a les arrels.**

Un quadrat i vint-i-un dirhams són iguals a deu arrels. $[x^2 + 21 = 10x]$

Parteix en dues meitats el nombre d'arrels; es tindrà cinc; multiplica per ell mateix, es tindrà vint-i-cinc; restes vint-i-u que està en el quadrat i queda quatre;



# Resolució en la tradició àrab

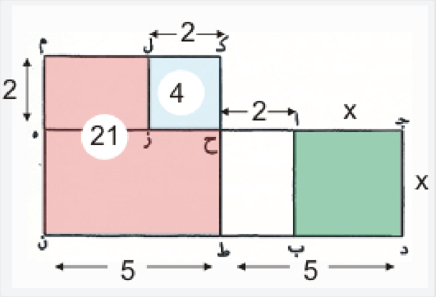
- En la tradició àrab, l'anàlisi podia ser del tot igual i utilitzaven un llenguatge d'àlgebra no simbòlica. Disposaven d'un algoritme per resoldre l'equació amb radicals que demostraven des de la geometria. També utilitzaven (s.XII) el mètode de Ruffini-Horner).

**AL-KHWĀRIZMI.** *Llibre de l'àlgebra*, [813-830]

**Els quadrats i el nombre iguals a les arrels.**

Un quadrat i vint-i-un dirhams són iguals a deu arrels. $[x^2 + 21 = 10x]$

Parteix en dues meitats el nombre d'arrels; es tindrà cinc; multiplica per ell mateix, es tindrà vint-i-cinc; restes vint-i-u que està en el quadrat i queda quatre; fas l'arrel i dóna dos;



# Resolució en la tradició àrab

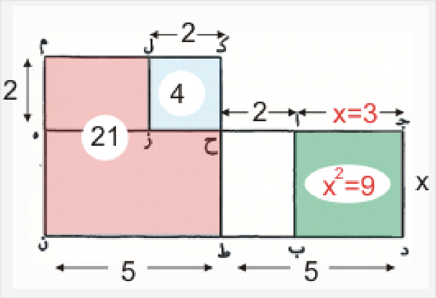
- En la tradició àrab, l'anàlisi podia ser del tot igual i utilitzaven un llenguatge d'àlgebra no simbòlica. Disposaven d'un algoritme per resoldre l'equació amb radicals que demostraven des de la geometria. També utilitzaven (s.XII) el mètode de Ruffini-Horner).

**AL-KHWĀRIZMI.** *Llibre de l'àlgebra*, [813-830]

**Els quadrats i el nombre iguals a les arrels.**

Un quadrat i vint-i-un dirhams són iguals a deu arrels. $[x^2 + 21 = 10x]$

Parteix en dues meitats el nombre d'arrels; es tindrà cinc; multiplica per ell mateix, es tindrà vint-i-cinc; restes vint-i-u que està en el quadrat i queda quatre; fas l'arrel i dóna dos; el restes de la meitat del nombre de les arrels que és cinc. Queda tres, que és l'arrel del quadrat que vols. I el quadrat és nou.



# Resolució en la tradició àrab

El treball dels successors d'AL-KHWĀRIZMI es va independitzant del seu fonament geomètric i s'utilitzen les identitats notables (quadrat del binomi), sense llenguatge ni demostració geomètrica, per trobar els algoritmes de resolució d'una manera formal no simbòlica. AL-KHAYYĀM comenta en la seva *Àlgebra* [ca 1070] que «la demostració numèrica és fàcil quan es té la demostració geomètrica». En el nostre exemple:

$$\boxed{x^2 - 10x + 21 = 0}$$

# Resolució en la tradició àrab

El treball dels successors d'AL-KHWĀRIZMI es va independitzant del seu fonament geomètric i s'utilitzen les identitats notables (quadrat del binomi), sense llenguatge ni demostració geomètrica, per trobar els algoritmes de resolució d'una manera formal no simbòlica. AL-KHAYYĀM comenta en la seva *Àlgebra* [ca 1070] que «la demostració numèrica és fàcil quan es té la demostració geomètrica». En el nostre exemple:

$$\boxed{x^2 - 10x + 21 = 0} \iff (x-5)^2 - 5^2 + 21 = 0$$

# Resolució en la tradició àrab

El treball dels successors d'AL-KHWĀRIZMI es va independitzant del seu fonament geomètric i s'utilitzen les identitats notables (quadrat del binomi), sense llenguatge ni demostració geomètrica, per trobar els algoritmes de resolució d'una manera formal no simbòlica. AL-KHAYYĀM comenta en la seva *Àlgebra* [ca 1070] que «la demostració numèrica és fàcil quan es té la demostració geomètrica». En el nostre exemple:

$$\boxed{x^2 - 10x + 21 = 0} \iff (x-5)^2 - 5^2 + 21 = 0 \iff (x-5)^2 - 4 = 0$$

# Resolució en la tradició àrab

El treball dels successors d'AL-KHWĀRIZMI es va independitzant del seu fonament geomètric i s'utilitzen les identitats notables (quadrat del binomi), sense llenguatge ni demostració geomètrica, per trobar els algoritmes de resolució d'una manera formal no simbòlica. AL-KHAYYĀM comenta en la seva *Àlgebra* [ca 1070] que «la demostració numèrica és fàcil quan es té la demostració geomètrica». En el nostre exemple:

$$\boxed{x^2 - 10x + 21 = 0} \iff (x-5)^2 - 5^2 + 21 = 0 \iff (x-5)^2 - 4 = 0$$

$$\iff (x-5)^2 = 4$$

# Resolució en la tradició àrab

El treball dels successors d'AL-KHWĀRIZMI es va independitzant del seu fonament geomètric i s'utilitzen les identitats notables (quadrat del binomi), sense llenguatge ni demostració geomètrica, per trobar els algoritmes de resolució d'una manera formal no simbòlica. AL-KHAYYĀM comenta en la seva *Àlgebra* [ca 1070] que «la demostració numèrica és fàcil quan es té la demostració geomètrica». En el nostre exemple:

$$\boxed{x^2-10x+21=0} \iff (x-5)^2-5^2+21=0 \iff (x-5)^2-4=0$$

$$\iff (x-5)^2=4 \iff \begin{cases} x-5=2 \iff \boxed{x=7} \\ \end{cases}$$

# Resolució en la tradició àrab

El treball dels successors d'AL-KHWĀRIZMI es va independitzant del seu fonament geomètric i s'utilitzen les identitats notables (quadrat del binomi), sense llenguatge ni demostració geomètrica, per trobar els algoritmes de resolució d'una manera formal no simbòlica. AL-KHAYYĀM comenta en la seva *Àlgebra* [ca 1070] que «la demostració numèrica és fàcil quan es té la demostració geomètrica». En el nostre exemple:

$$\boxed{x^2 - 10x + 21 = 0} \iff (x-5)^2 - 5^2 + 21 = 0 \iff (x-5)^2 - 4 = 0$$

$$\iff (x-5)^2 = 4 \iff \begin{cases} x - 5 = 2 \iff \boxed{x = 7} \\ \text{o bé} \\ 5 - x = 2 \iff \boxed{x = 3} \end{cases}$$

# Resolució en la tradició àrab

El treball dels successors d'AL-KHWĀRIZMI es va independitzant del seu fonament geomètric i s'utilitzen les identitats notables (quadrat del binomi), sense llenguatge ni demostració geomètrica, per trobar els algoritmes de resolució d'una manera formal no simbòlica. AL-KHAYYĀM comenta en la seva *Àlgebra* [ca 1070] que «la demostració numèrica és fàcil quan es té la demostració geomètrica». En el nostre exemple:

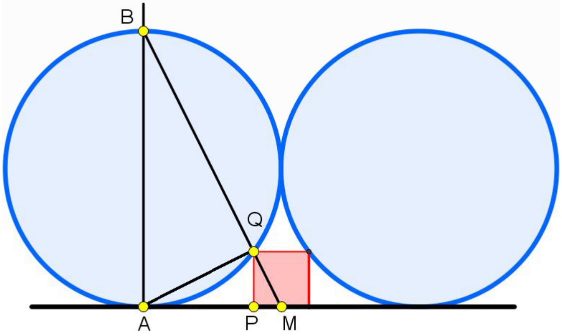
$$\boxed{x^2 - 10x + 21 = 0} \iff (x-5)^2 - 5^2 + 21 = 0 \iff (x-5)^2 - 4 = 0$$

$$\iff (x-5)^2 = 4 \iff \begin{cases} x - 5 = 2 \iff \boxed{x = 7} \\ \text{o bé} \\ 5 - x = 2 \iff \boxed{x = 3} \end{cases}$$

És a dir, $\boxed{x = \frac{10}{2} + \sqrt{5^2 - 21}}$, o bé, $\boxed{x = \frac{10}{2} - \sqrt{5^2 - 21}}$

# Una anàlisi alternativa que defuig l'àlgebra

En el *wasan* era evident l'interès en trobar procediments per a una classe molt àmplia de problemes. Això esdevenia amb el *tianyuan*. D'aquí l'interés de la resolució presentada, però això no implica que no es pogués recórrer a altres anàlisis que evitessin aquest procediment.

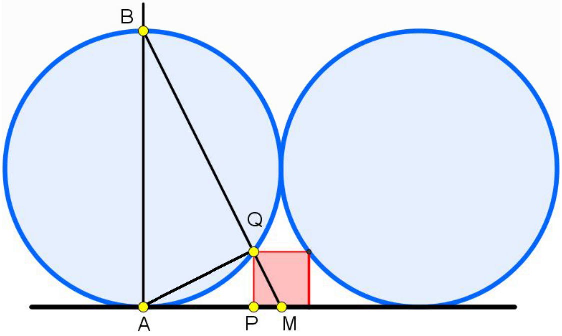



A més, en estar $B$, $Q$ i $M$ alineats, en resulta una ràpida construcció. ▸ HTM ▸ GGB

# Una anàlisi alternativa que defuig l'àlgebra

En el *wasan* era evident l'interès en trobar procediments per a una classe molt àmplia de problemes. Això esdevenia amb el *tianyuan*. D'aquí l'interés de la resolució presentada, però això no implica que no es pogués recórrer a altres anàlisis que evitessin aquest procediment.

Si s'observa que els triangles $\triangle ABM$, $\triangle PQM$ i $\triangle APQ$ són semblants, s'obté



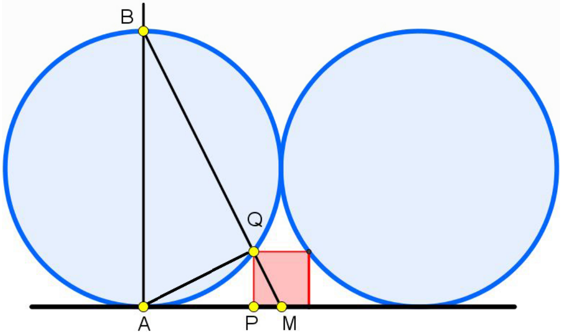

A més, en estar $B$, $Q$ i $M$ alineats, en resulta una ràpida construcció. HTM GGB

# Una anàlisi alternativa que defuig l'àlgebra

En el *wasan* era evident l'interès en trobar procediments per a una classe molt àmplia de problemes. Això esdevenia amb el *tianyuan*. D'aquí l'interés de la resolució presentada, però això no implica que no es pogués recórrer a altres anàlisis que evitessin aquest procediment.

Si s'observa que els triangles $\triangle ABM$, $\triangle PQM$ i $\triangle APQ$ són semblants, s'obté

$$\frac{PM}{PQ} = \frac{PQ}{PA}$$



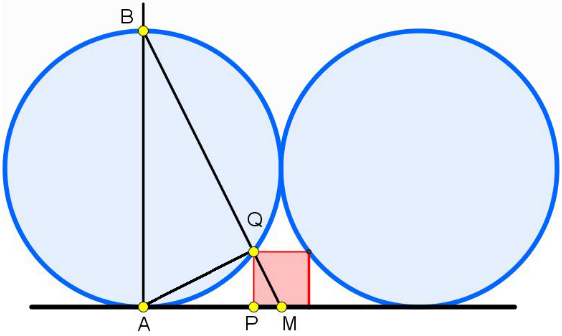

A més, en estar $B$, $Q$ i $M$ alineats, en resulta una ràpida construcció. ▸ HTM ▸ GGB

# Una anàlisi alternativa que defuig l'àlgebra

En el *wasan* era evident l'interès en trobar procediments per a una classe molt àmplia de problemes. Això esdevenia amb el *tianyuan*. D'aquí l'interés de la resolució presentada, però això no implica que no es pogués recórrer a altres anàlisis que evitessin aquest procediment.

Si s'observa que els triangles $\triangle ABM$, $\triangle PQM$ i $\triangle APQ$ són semblants, s'obté

$$\frac{PM}{PQ} = \frac{PQ}{PA}$$
$$\Longrightarrow PA = 2\,PQ = 4\,PM$$



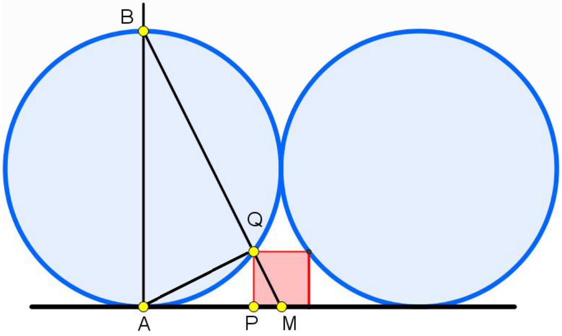

A més, en estar $B$, $Q$ i $M$ alineats, en resulta una ràpida construcció. ▸ HTM ▸ GGB

# Una anàlisi alternativa que defuig l'àlgebra

En el *wasan* era evident l'interès en trobar procediments per a una classe molt àmplia de problemes. Això esdevenia amb el *tianyuan*. D'aquí l'interés de la resolució presentada, però això no implica que no es pogués recórrer a altres anàlisis que evitessin aquest procediment.

Si s'observa que els triangles $\triangle ABM$, $\triangle PQM$ i $\triangle APQ$ són semblants, s'obté

$$\frac{PM}{PQ} = \frac{PQ}{PA}$$
$$\Longrightarrow PA = 2\,PQ = 4\,PM$$
$$\Longrightarrow \text{radi} = AM = AP + PM$$



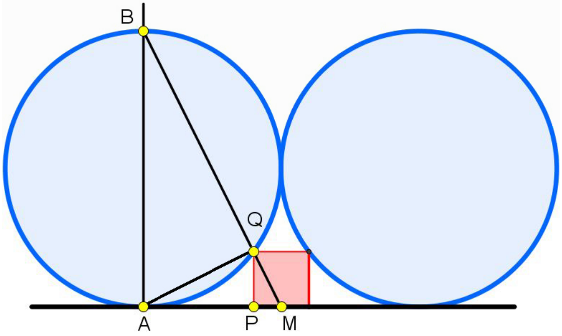

A més, en estar $B$, $Q$ i $M$ alineats, en resulta una ràpida construcció. HTM GGB

# Una anàlisi alternativa que defuig l'àlgebra

En el *wasan* era evident l'interès en trobar procediments per a una classe molt àmplia de problemes. Això esdevenia amb el *tianyuan*. D'aquí l'interés de la resolució presentada, però això no implica que no es pogués recórrer a altres anàlisis que evitessin aquest procediment.

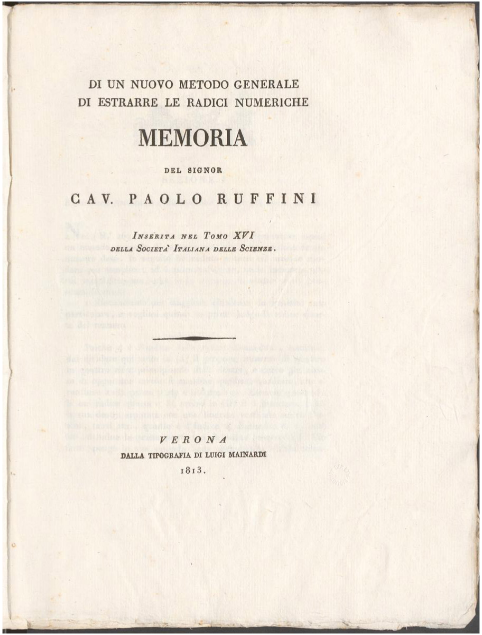
Si s'observa que els triangles $\triangle ABM$, $\triangle PQM$ i $\triangle APQ$ són semblants, s'obté

$$\frac{PM}{PQ} = \frac{PQ}{PA}$$
$$\Longrightarrow PA = 2\,PQ = 4\,PM$$
$$\Longrightarrow \text{radi} = AM = AP + PM$$
$$\Longrightarrow \text{radi} = 5\,PM = \frac{5}{2}\,PQ$$




A més, en estar $B$, $Q$ i $M$ alineats, en resulta una ràpida construcció. HTM GGB

# *Tianyuan shu*. Mètode de Ruffini-Horner



DI UN NUOVO METODO GENERALE
DI ESTRARRE LE RADICI NUMERICHE

MEMORIA

DEL SIGNOR

CAV. PAOLO RUFFINI

*Inserita nel Tomo XVI*
*della Società Italiana delle Scienze.*

*VERONA*
DALLA TIPOGRAFIA DI LUIGI MAINARDI
1813.

- Paolo Ruffini. 1804, 1807 i 1813
- William G. Horner. 1819, 1830 i 1843
- Florian Cajori, 1911. *Horner's method of approximation anticipated by Ruffini*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 17, núm 9, pàg 409-414. Amb extractes de la memòria de 1804

# *Tianyuan shu*. Mètode de Ruffini-Horner

(I)

199, 8717, 3376

(II)

3| 1, 0, 0, 0, 199
1, 3, 9, 27, 118
1, 6, 27, 108
1, 9, 54
1, 12
1

(III)

7| 1, 120, 5400, 108000, 1188717
1, 127, 6289, 152023, 124556
1, 134, 7227, 202612
1, 141, 8214
1, 148
1

(IV)

9| 54, 1080, 11887
8| 54, 1566, 14094
7| 1512, 12096
1458, 10206

(V)

6| 1, 1480, 821400, 202612000, 1245563376,
1, 1486, 830316, 207593896, 0000000000.

Fragment de la pàgina 6 de la memòria de 1813, en què es calcula una arrel quarta.

$$x = \sqrt[4]{19987173376} \iff x^4 - 19987173376 = 0$$

(I) Separació en grups de 4 xifres.

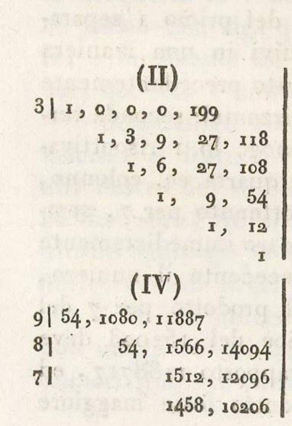
(II) Càlcul de centenes $= z = \frac{x}{100}$. (Prescindeix de 8 ordres d'unitats)

(III) Càlcul de desenes $= y = \frac{x}{10} = 10z$. (Prescindeix de 4 ordres d'unitats)

(IV) Temptejos per al càlcul en (III)

(V) Càlcul d'unitats $= x = 10y$. (Prescindeix de 4 ordres d'unitats)

# *Tianyuan shu*. Mètode de Ruffini-Horner


(II)

3| 1, 0, 0, 0, 199
1, 3, 9, 27, 118
1, 6, 27, 108
1, 9, 54
1, 12
1

(IV)

9| 54, 1080, 11887
8| 54, 1566, 14094
7| 1512, 12096
1458, 10206

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | −199 |
| 3 | | 3 | 9 | 27 | 81 |
| | 1 | 3 | 9 | 27 | −118 |
| 3 | | 3 | 18 | 81 | |
| | 1 | 6 | 27 | 108 | |
| 3 | | 3 | 27 | | |
| | 1 | 9 | 54 | | |
| 3 | | 3 | | | |
| | 1 | 12 | | | |

Fragment de la pàgina 6 de la memòria de 1813, en què es calcula una arrel quarta.

(I) Separació en grups de 4 xifres.

(II) Càlcul de centenes $= z = \frac{x}{100}$. (Prescindeix de 8 ordres d'unitats)

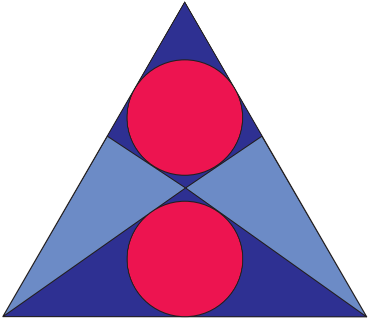
(III) Càlcul de desenes $= y = \frac{x}{10} = 10z$. (Prescindeix de 4 ordres d'unitats)

$$x = \sqrt[4]{19987173376} \iff x^4 - 19987173376 = 0$$

(IV) Temptejos per al càlcul en (III)

(V) Càlcul d'unitats $= x = 10y$. (Prescindeix de 4 ordres d'unitats)

# Problema 2



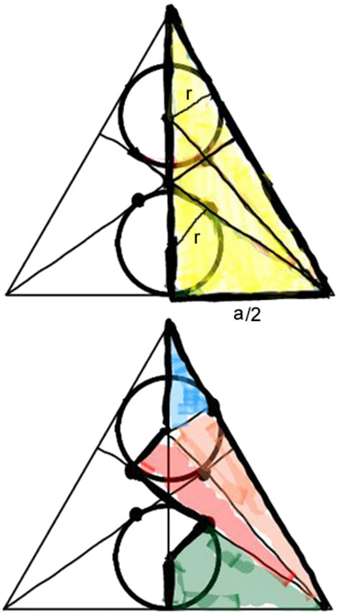
En un triangle equilàter de costat $a$, dues línies $CE$ i $BD$ toquen dos cercles inscrits de radi $r$. Trobeu $r$ a partir de $a$.

Solució: $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\,a \approx 0.15892a$

Fukagawa-Rothman [2008] presenten una solució tradicional des del *Shōgaku Jinkōki* (*Jinkōki de l'era Meiji*) de Fukuda Riken [1815-1889]

## Problema 2

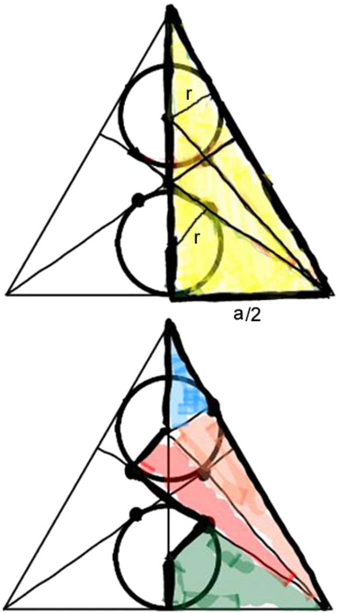
S'observa una igualtat d'àrees



# Problema 2

S'observa una igualtat d'àrees i en resulta

$$4\sqrt{3}r^2 - 12ar + a^2\sqrt{3} = 0$$



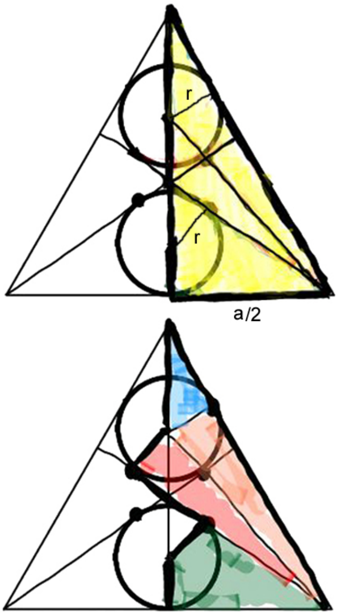
# Problema 2

S'observa una igualtat d'àrees i en resulta

$$4\sqrt{3}r^2 - 12ar + a^2\sqrt{3} = 0$$

Substitució: $\boxed{r = a\sqrt{3}\,x}$

$$12x^2 - 12x + 1 = 0$$



# Problema 2

S'observa una igualtat d'àrees i en resulta

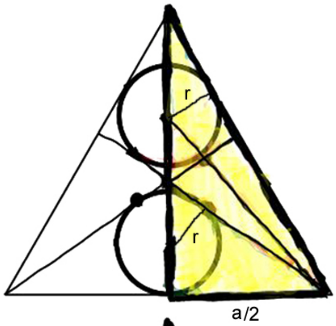
$$4\sqrt{3}r^2 - 12ar + a^2\sqrt{3} = 0$$

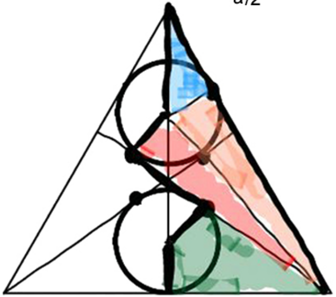
Substitució: $r = a\sqrt{3}\,x$

$$12x^2 - 12x + 1 = 0$$

$$x \approx 0.09175 \Longrightarrow r \approx 0.15892a.$$

$$x = \frac{3-\sqrt{6}}{6} \Longrightarrow r = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\,a$$



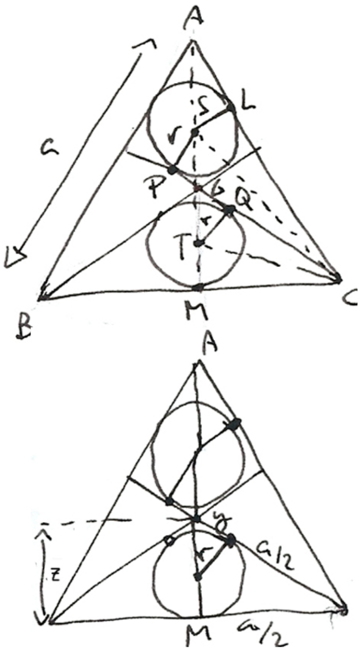



Simulació de càlcul amb Geogebra ($y = 100x$)

HTM GGB

# Problema 2

Una altra solució es pot assolir si es considera la semblança $\triangle GMC \sim \triangle GQT$ i el teorema de Pitàgores sobre $\triangle PQT$.



# Problema 2

Una altra solució es pot assolir si es considera la semblança $\triangle GMC \sim \triangle GQT$ i el teorema de Pitàgores sobre $\triangle PQT$.

En resulta l'equació.

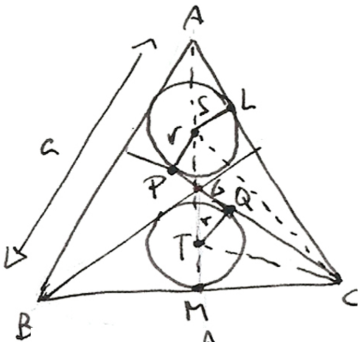
$$4\sqrt{3}8r^3 - 4\sqrt{3}ar^2 - 10a^2r2 + \sqrt{3}a^3 = 0$$

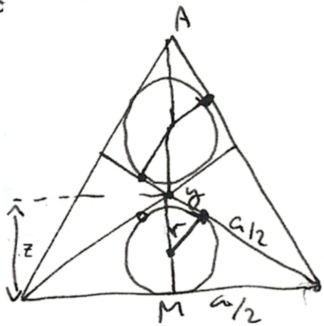
Substitució: $\boxed{r = a\sqrt{3}\,x}$

$$24x^3 - 18x^2 - 10x + 1 = 0$$

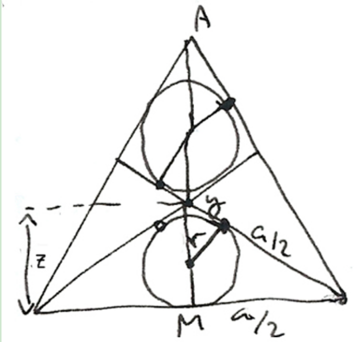
$$x \approx 0.09175 \Longrightarrow r \approx 0.15892a.$$

$$x = \frac{3-\sqrt{6}}{6} \Longrightarrow r = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\,a$$



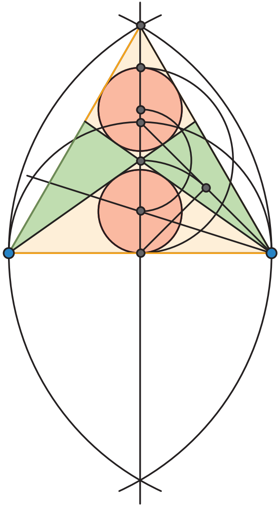



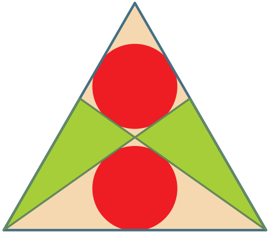
# Problema 2




Subproducte: $z = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\, a$

HTM GGB





# Problema 2. Mètode de Newton

– Mètode de Newton en el *Taisei sankei*, (*Tractat consumat de matemàtiques*), en 12 volums.

– Redactat els anys 1683-1711 per SEKI i els germans TAKEBE té l'objectiu d'exposar l'art del *sekisa* (*shisuo* en xinès, "desfer el bloqueig"). [mètode de resolució de problemes que impliquen extracció d'arrels]

| | | |
|---|---|---|
| $y^3 - 2y - 5 = 0$ | | $+2{,}10000000$<br>$-0{,}00544852$<br>$+2{,}09455148$, &c. $= y$ |
| $2 + p = y$ | $+y^3$<br>$-2y$<br>$-5$ | $+8 + 12p + 6p^2 + p^3$<br>$-4 - 2p$<br>$-5$ |
| SOMME. | | $-1 + 10p + 6p^2 + p^3$ |
| $0{,}1 + q = p$ | $+p^3$<br>$+6p^2$<br>$+10p$<br>$-1$ | $+0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$<br>$+0{,}06 + 1{,}2 + 6$<br>$+1, + 10,$<br>$-1,$ |
| SOMME. | | $+0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$ |
| $-0{,}0054 + r = q.$ | $+q^3$<br>$+6{,}3q^2$<br>$+11{,}23q$<br>$+0{,}061$ | $-0{,}000000157464 + 0{,}00008748r - 0{,}0162r^2 + r^3$<br>$+0{,}000183708 - 0{,}06804 + 6{,}3$<br>$-0{,}060642 + 11{,}23$<br>$+0{,}061$ |
| SOMME. | | $+0{,}0005416 + 11{,}162r$ |
| $-0{,}00004852 + s = r$ | | |

*Methodus Fluxionum et Serierum infinitarum.*
Traducció de G.L. LECREC DE BUFFON, 1740.

# Problema 2. Mètode de Newton

– Mètode de Newton en el *Taisei sankei*, (*Tractat consumat de matemàtiques*), en 12 volums.
– Redactat els anys 1683-1711 per SEKI i els germans TAKEBE té l'objectiu d'exposar l'art del *sekisa* (*shisuo* en xinès, "desfer el bloqueig"). [mètode de resolució de problemes que impliquen extracció d'arrels]
– En una secció dedicada a l'extracció d'arrels presenten com fer l'estimació dels seus petits decimals.

| | | |
|---|---|---|
| $y^3 - 2y - 5 = 0$ | | $+ 2{,}10000000$<br>$- 0{,}00544852$<br>$+ 2{,}09455148$, &c. $= y$ |
| $2 + p = y$ | $+ y^3$<br>$- 2y$<br>$- 5$ | $+ 8 + 12p + 6p^2 + p^3$<br>$- 4 - 2p$<br>$- 5$ |
| SOMME. | | $- 1 + 10p + 6p^2 + p^3$ |
| $0{,}1 + q = p$ | $+ p^3$<br>$+ 6p^2$<br>$+ 10p$<br>$- 1$ | $+ 0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$<br>$+ 0{,}06 \quad + 1{,}2 \quad + 6$<br>$+ 1, \quad + 10,$<br>$- 1,$ |
| SOMME. | | $+ 0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$ |
| $- 0{,}0054 + r = q.$ | $+ q^3$<br>$+ 6{,}3\ q^2$<br>$+ 11{,}23q$<br>$+ 0{,}061$ | $- 0{,}000000157464 + 0{,}00087478r - 0{,}0162r^2 + r^3$<br>$+ 0{,}00018370 8 \quad - 0{,}06804 \quad + 6{,}3$<br>$- 0{,}060642 \quad + 11{,}23$<br>$+ 0{,}061$ |
| SOMME. | | $+ 0{,}0000416 \quad + 11{,}162r$ |
| $- 0{,}00004852 + s = r$ | | |

*Methodus Fluxionum et Serierum infinitarum.*
Traducció de G.L. LECREC DE BUFFON, 1740.

# Problema 2. Mètode de Newton

– Mètode de Newton en el *Taisei sankei*, (*Tractat consumat de matemàtiques*), en 12 volums.
– Redactat els anys 1683-1711 per Seki i els germans Takebe té l'objectiu d'exposar l'art del *sekisa* (*shisuo* en xinès, "desfer el bloqueig"). [mètode de resolució de problemes que impliquen extracció d'arrels]
– En una secció dedicada a l'extracció d'arrels presenten com fer l'estimació dels seus petits decimals.

| | | |
|---|---|---|
| $y^3 - 2y - 5 = 0$ | | $+2{,}10000000$<br>$-0{,}00544852$<br>$+2{,}09455148$, &c. $= y$ |
| $2 + p = y$ | $+y^3$<br>$-2y$<br>$-5$ | $+8 + 12p + 6p^2 + p^3$<br>$-4 - 2p$<br>$-5$ |
| SOMME. | | $-1 + 10p + 6p^2 + p^3$ |
| $0{,}1 + q = p$ | $+p^3$<br>$+6p^2$<br>$+10p$<br>$-1$ | $+0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$<br>$+0{,}06 + 1{,}2 + 6$<br>$+1, + 10,$<br>$-1,$ |
| SOMME. | | $+0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$ |
| $-0{,}0054 + r = q.$ | $+q^3$<br>$+6{,}3q^2$<br>$+11{,}23q$<br>$+0{,}061$ | $-0{,}000000157464 + 0{,}00008748r - 0{,}0162r^2 + r^3$<br>$+0{,}000183708 - 0{,}06804 + 6{,}3$<br>$-0{,}060642 + 11{,}23$<br>$+0{,}061$ |
| SOMME. | | $+0{,}0000416 + 11{,}162r$ |
| $-0{,}00004852 + s = r$ | | |

*Methodus Fluxionum et Serierum infinitarum.*
Traducció de G.L. Lecrec de Buffon, 1740.

# Problema 2. Mètode de Newton

– Mètode de Newton en el *Taisei sankei*, (*Tractat consumat de matemàtiques*), en 12 volums.

– Redactat els anys 1683-1711 per SEKI i els germans TAKEBE té l'objectiu d'exposar l'art del *sekisa* (*shisuo* en xinès, "desfer el bloqueig"). [mètode de resolució de problemes que impliquen extracció d'arrels]

– En una secció dedicada a l'extracció d'arrels presenten com fer l'estimació dels seus petits decimals.

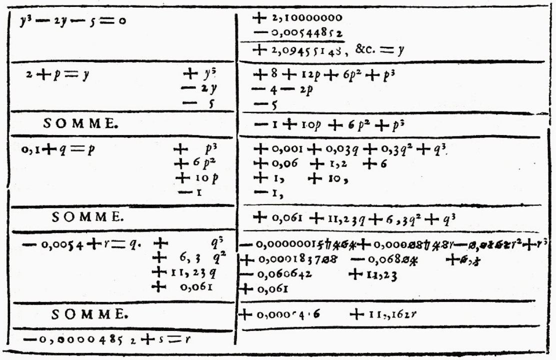
| | | |
|---|---|---|
| $y^3 - 2y - 5 = 0$ | | $+2{,}10000000$<br>$-0{,}00544852$<br>$+2{,}09455148$, &c. $= y$ |
| $2 + p = y$ | $+y^3$<br>$-2y$<br>$-5$ | $+8 + 12p + 6p^2 + p^3$<br>$-4 - 2p$<br>$-5$ |
| SOMME. | | $-1 + 10p + 6p^2 + p^3$ |
| $0{,}1 + q = p$ | $+p^3$<br>$+6p^2$<br>$+10p$<br>$-1$ | $+0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$<br>$+0{,}06 \quad +1{,}2 \quad +6$<br>$+1, \quad +10,$<br>$-1,$ |
| SOMME. | | $+0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$ |
| $-0{,}0054 + r = q.$ | $+q^3$<br>$+6{,}3q^2$<br>$+11{,}23q$<br>$+0{,}061$ | $-0{,}000000157464 + 0{,}00008748r - 0{,}0162r^2 + r^3$<br>$+0{,}000183708 \quad -0{,}06804 \quad +6{,}3$<br>$-0{,}060642 \quad +11{,}23$<br>$+0{,}061$ |
| SOMME. | | $+0{,}0005416 \quad +11{,}162r$ |
| $-0{,}00004852 + s = r$ | | |

*Methodus Fluxionum et Serierum infinitarum.*
Traducció de G.L. LECREC DE BUFFON, 1740.

$$12x^2 - 12x + 1 = 0 \Longrightarrow \text{Primera aproximació: } x \approx 0.0917$$

# Problema 2. Mètode de Newton

– Mètode de Newton en el *Taisei sankei*, (*Tractat consumat de matemàtiques*), en 12 volums.
– Redactat els anys 1683-1711 per SEKI i els germans TAKEBE té l'objectiu d'exposar l'art del *sekisa* (*shisuo* en xinès, "desfer el bloqueig"). [mètode de resolució de problemes que impliquen extracció d'arrels]
– En una secció dedicada a l'extracció d'arrels presenten com fer l'estimació dels seus petits decimals.



| | |
|---|---|
| $y^3 - 2y - 5 = 0$ | $+2{,}10000000$ <br> $-0{,}00544852$ <br> $+2{,}09455148$, &c. $= y$ |
| $2 + p = y$   $+y^3$ <br> $-2y$ <br> $-5$ | $+8 + 12p + 6p^2 + p^3$ <br> $-4 - 2p$ <br> $-5$ |
| SOMME. | $-1 + 10p + 6p^2 + p^3$ |
| $0{,}1 + q = p$   $+p^3$ <br> $+6p^2$ <br> $+10p$ <br> $-1$ | $+0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$ <br> $+0{,}06 + 1{,}2 + 6$ <br> $+1, + 10,$ <br> $-1,$ |
| SOMME. | $+0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$ |
| $-0{,}0054 + r = q.$   $+q^3$ <br> $+6{,}3q^2$ <br> $+11{,}23q$ <br> $+0{,}061$ | $-0{,}000000157464 + 0{,}000087478r - 0{,}0162r^2 + r^3$ <br> $+0{,}000183708 - 0{,}06804 + 6{,}3$ <br> $-0{,}060642 + 11{,}23$ <br> $+0{,}061$ |
| SOMME. | $+0{,}0000416 + 11{,}162r$ |
| $-0{,}00004852 + s = r$ | |

*Methodus Fluxionum et Serierum infinitarum.* Traducció de G.L. LECREC DE BUFFON, 1740.

$12x^2 - 12x + 1 = 0 \Longrightarrow$ Primera aproximació: $x \approx 0.0917$
Per a $\boxed{y = x - 0.0917}$, tenim amb el *tianyuan*, $12y^2 - 9.7992y + 0.00050668 = 0$.

# Problema 2. Mètode de Newton

– Mètode de Newton en el *Taisei sankei*, (*Tractat consumat de matemàtiques*), en 12 volums.

– Redactat els anys 1683-1711 per SEKI i els germans TAKEBE té l'objectiu d'exposar l'art del *sekisa* (*shisuo* en xinès, "desfer el bloqueig"). [mètode de resolució de problemes que impliquen extracció d'arrels]

– En una secció dedicada a l'extracció d'arrels presenten com fer l'estimació dels seus petits decimals.

| | | |
|---|---|---|
| $y^3 - 2y - 5 = 0$ | | $+2{,}10000000$<br>$-0{,}00544852$<br>$+2{,}09455148$, &c. $= y$ |
| $2 + p = y$ | $+y^3$<br>$-2y$<br>$-5$ | $+8 + 12p + 6p^2 + p^3$<br>$-4 - 2p$<br>$-5$ |
| SOMME. | | $-1 + 10p + 6p^2 + p^3$ |
| $0{,}1 + q = p$ | $+p^3$<br>$+6p^2$<br>$+10p$<br>$-1$ | $+0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$<br>$+0{,}06 \quad +1{,}2 \quad +6$<br>$+1, \quad +10,$<br>$-1,$ |
| SOMME. | | $+0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$ |
| $-0{,}0054 + r = q.$ | $+q^3$<br>$+6{,}3q^2$<br>$+11{,}23q$<br>$+0{,}061$ | $-0{,}000000157464 + 0{,}000087478r - 0{,}0162r^2 + r^3$<br>$+0{,}000183708 \quad -0{,}06804 \quad +6{,}3$<br>$-0{,}060642 \quad +11{,}23$<br>$+0{,}061$ |
| SOMME. | | $+0{,}0000416 \quad +11{,}162r$ |
| $-0{,}00004852 + s = r$ | | |

*Methodus Fluxionum et Serierum infinitarum.*
Traducció de G.L. LECREC DE BUFFON, 1740.

$12x^2 - 12x + 1 = 0 \Longrightarrow$ Primera aproximació: $x \approx 0.0917$

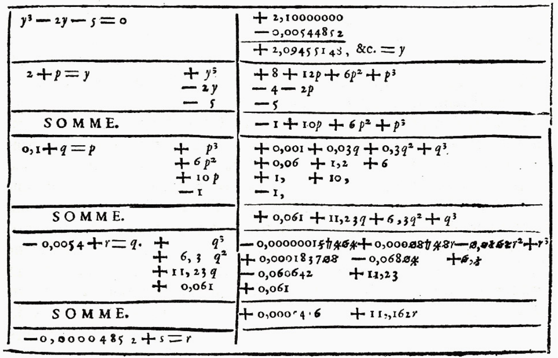
Per a $\boxed{y = x - 0.0917}$, tenim amb el *tianyuan*, $12y^2 - 9.7992y + 0.00050668 = 0$.

Procediment per als petits decimals:

$$y \approx \frac{0.00050668}{9.7992} = 0.0000517062617 \Longrightarrow$$

# Problema 2. Mètode de Newton

– Mètode de Newton en el *Taisei sankei*, (*Tractat consumat de matemàtiques*), en 12 volums.
– Redactat els anys 1683-1711 per Seki i els germans Takebe té l'objectiu d'exposar l'art del *sekisa* (*shisuo* en xinès, "desfer el bloqueig"). [mètode de resolució de problemes que impliquen extracció d'arrels]
– En una secció dedicada a l'extracció d'arrels presenten com fer l'estimació dels seus petits decimals.



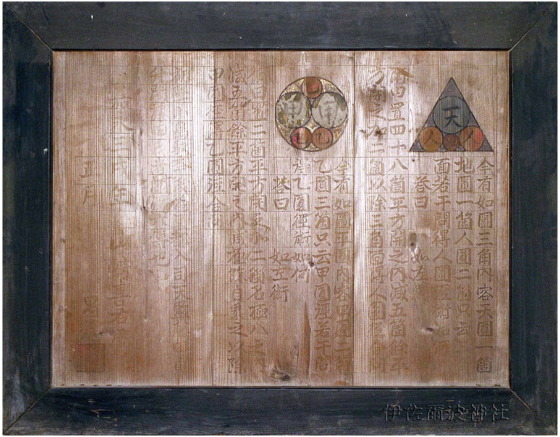
| | |
|---|---|
| $y^3 - 2y - 5 = 0$ | $+2{,}10000000$ <br> $-0{,}00544852$ <br> $+2{,}09455148$, &c. $= y$ |
| $2 + p = y$   $+y^3$ <br> $-2y$ <br> $-5$ | $+8 + 12p + 6p^2 + p^3$ <br> $-4 - 2p$ <br> $-5$ |
| SOMME. | $-1 + 10p + 6p^2 + p^3$ |
| $0{,}1 + q = p$   $+p^3$ <br> $+6p^2$ <br> $+10p$ <br> $-1$ | $+0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$ <br> $+0{,}06 + 1{,}2 + 6$ <br> $+1, + 10,$ <br> $-1,$ |
| SOMME. | $+0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$ |
| $-0{,}0054 + r = q.$   $+q^3$ <br> $+6{,}3q^2$ <br> $+11{,}23q$ <br> $+0{,}061$ | $-0{,}000000157464 + 0{,}00008748r - 0{,}0162r^2 + r^3$ <br> $+0{,}000183708 - 0{,}06804 + 6{,}3$ <br> $-0{,}060642 + 11{,}23$ <br> $+0{,}061$ |
| SOMME. | $+0{,}0000416 + 11{,}162r$ |
| $-0{,}00004852 + s = r$ | |

*Methodus Fluxionum et Serierum infinitarum.*
Traducció de G.L. Lecrec de Buffon, 1740.

$12x^2 - 12x + 1 = 0 \Longrightarrow$ Primera aproximació: $x \approx 0.0917$
Per a $\boxed{y = x - 0.0917}$, tenim amb el *tianyuan*, $12y^2 - 9.7992y + 0.00050668 = 0$.
Procediment per als petits decimals:

$$y \approx \frac{0.00050668}{9.7992} = 0.0000517062617 \Longrightarrow x = 0.0917 + 0.000051706 = 0.0917\underline{51706}$$

# Problema 3. Complexitat algèbrica

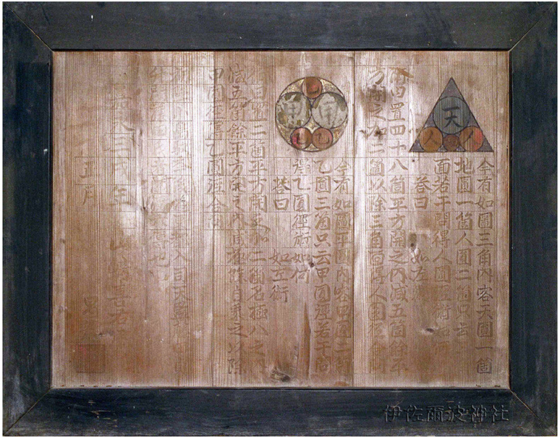


Penjat el 1850 per Kiuemon Yamasaki

Santuari Isaniwa de la prefectura d'Ehime. (86×111 cm)

- Els problemes presentats en els sangakus, tractats amb el teorema de Pitàgores o la semblança, podien presentar una gran complexitat.
- La seva resolució podia implicar sistemes d'equacions en vàries incògnites de grau qualsevol que poden ser irracionals.
- En el *Hatsubi Sanpō* (Tractat de matemàtiques que revela el sentit amagat) del 1674 i en la revisió posterior deTakebe, *Hatsubi Sanpō endan genkai* (Comentari en vernacular dels *endan* del *Hatsubi Sanpō*) del 1685 es donen estratègies per a la seva resolució:

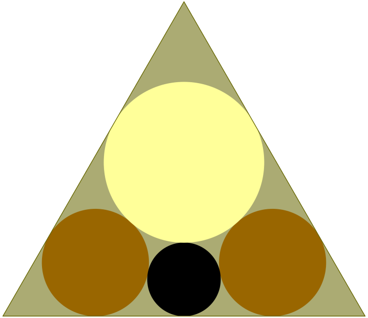
# Problema 3. Complexitat algèbrica



Penjat el 1850 per Kiuemon Yamasaki

Santuari Isaniwa de la prefectura d'Ehime. (86×111 cm)

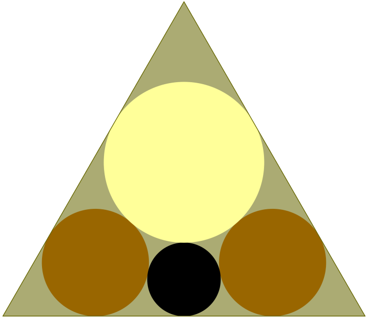
- Considerar incògnites "ficticies" (auxiliars).
- Combinar linealment les equacions o les seves potències per eliminar-les.
- Resoldre amb el *tianyuan* l'equació amb una incògnita obtinguda.



Calcular la relació dels tres radis amb el costat $2a$ del triangle.

Solució:
$$r = 0.202454a$$
$$x = 0.295107a$$
$$R = 0.442381a$$

HTM GGB

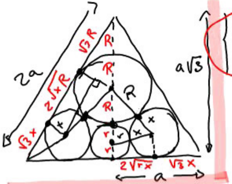


Calcular la relació dels tres radis amb el costat $2a$ del triangle.

Solució:

$$r = 0.202454a$$
$$x = 0.295107a$$
$$R = 0.442381a$$

HTM GGB




$$\begin{cases} 3R+2r = a\sqrt{3} \\ \sqrt{3}R + 2\sqrt{xR} + \sqrt{3}x = 2a \\ 2\sqrt{rx} + \sqrt{3}x = a \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{R} = \alpha \\ \sqrt{r} = \beta \\ \sqrt{x} = \omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha^2 + 2\beta^2 = a\sqrt{3} & \to (E_1) \\ \sqrt{3}\alpha^2 + 2\alpha\omega + \sqrt{3}\omega^2 = 2a & \to (E_2) \\ 2\beta\omega + \sqrt{3}\omega^2 = a & \to (E_3) \end{cases}$$

$$2\omega^2 E_1 : \quad 6\omega^2\alpha^2 + 4\omega^2\beta^2 = 2a\sqrt{3}\,\omega^2$$
$$E_3^2 : \quad 4\omega^2\beta^2 = (a-\sqrt{3}\,\omega^2)^2$$

$$2\omega^2 E_1 - E_3^2 : \quad 6\omega^2\alpha^2 = 2a\sqrt{3}\,\omega^2 - (a-\sqrt{3}\,\omega^2)^2 \quad \to (E_4)$$
$$2\sqrt{3}\,\omega^2 E_2 : \quad 6\omega^2\alpha^2 + 6\omega^4 + 4\sqrt{3}\,\alpha\omega^3 = 4a\sqrt{3}\,\omega^2$$

$$2\sqrt{3}\,\omega^2 E_2 - E_4 : \quad 6\omega^4 + 4\sqrt{3}\,\alpha\omega^3 = 4a\sqrt{3}\,\omega^2 - 2a\sqrt{3}\,\omega^2 + (a-\sqrt{3}\,\omega^2)^2$$
$$6\omega^4 + 4\sqrt{3}\,\alpha\omega^3 = a^2 + 3\omega^4$$
$$4\sqrt{3}\,\alpha\omega^3 = a^2 - 3\omega^4$$
$$48\alpha^2\omega^6 = a^4 + 9\omega^8 - 6a^2\omega^4 \quad \to (E_5)$$

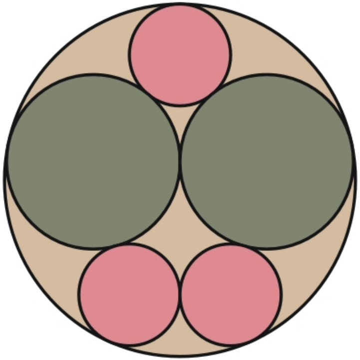
$$8\omega^4 E_4 : \quad 48\omega^6\alpha^2 = 16a\sqrt{3}\,\omega^6 - 8\omega^4(a-\sqrt{3}\,\omega^2)^2$$

$$E_5 - 8\omega^4 E_4 : \quad \boxed{0 = 33\omega^8 - 32a\sqrt{3}\,\omega^6 + 2a^2\omega^4 + a^4}$$

$$\boxed{aZ = \sqrt{3}\,\omega^2}$$

$$0 = 33Z^4 - 96Z^3 + 6Z^2 + 9$$
$$\boxed{0 = 11Z^4 - 32Z^3 + 2Z^2 + 3}$$

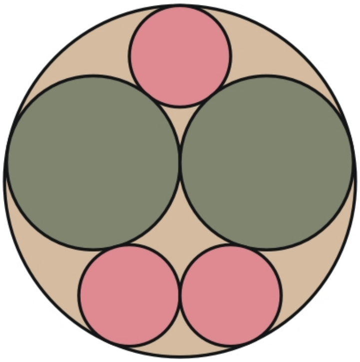
$$Z = 0{,}5111408978$$
$$x = \omega^2 = \frac{aZ}{\sqrt{3}} = 0{,}2951073349a$$
$$r = 0{,}2024544916a$$
$$R = 0{,}4423806081a$$

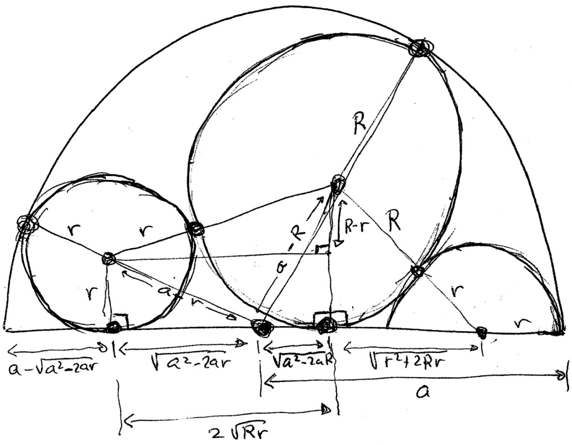


Calcular la relació dels dos radis de les circumferències inscrites amb el radi $a$ de la circumferència exterior.

Solució: $r = 0.288374a$

$R = 0.494520a$






Calcular la relació dels dos radis de les circumferències inscrites amb el radi $a$ de la circumferència exterior.

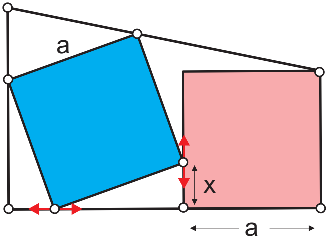
Solució: $r = 0.288374a$
$R = 0.494520a$

$$\begin{cases} \sqrt{a^2-2ar}+\sqrt{a^2-2ar}=2\sqrt{Rr} \\ a-r-\sqrt{a^2-2ar}=\sqrt{r^2+2Rr} \end{cases}$$

$$a=1 \Rightarrow 49r^4-52r^3-2r^2+28r-7=0$$

# Problema 4. Optimització

Problema extret del *Juntendō sanpu*. 1873, o *Escola Fukuda de matemàtiques* de FUKUDA RIKEN [1815-1889]. Extret d'un *sangaku* penjat el 1846 en el santuari Sumiyoshi d'Osaka.




Considerem dos quadrats iguals de costat $a$. El de la dreta està fix. El de l'esquerra es mou amb un vèrtex que llisca sobre un costat vertical de l'altre i el vèrtex adjacent, sobre la prolongació del costat horitzontal del primer. En el trapezi rectangle de la figura, trobeu el valor màxim del costat vertical esquerre.

Solució: $\left(\sqrt{10\sqrt{5}-22}+1\right)\, a \approx 1.600566\, a$

Té interès la relació entre el costat $a$ del quadrat i el segment inferior $x$ determinat sobre el costat del quadrat, pel punt que llisca verticalment.

Extret de [FUKAGAWA–ROTHMAN] 2008, 119.

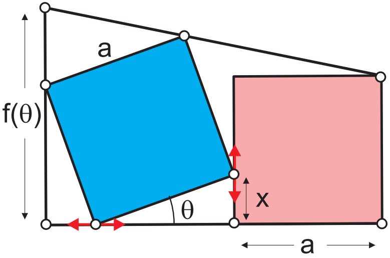
HTM GGB

# Problema 4. Propostes de resolució

- Fukagawa-Rothman [2008] proposen una solució "moderna" en no haver-ne trobat cap de tradicional. Recorren a l'ús del càlcul de derivades tal com es concep a Occident.

# Problema 4. Propostes de resolució

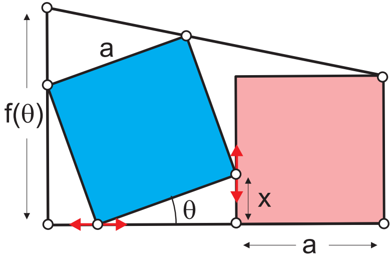
- Fukagawa-Rothman [2008] proposen una solució "moderna" en no haver-ne trobat cap de tradicional. Recorren a l'ús del càlcul de derivades tal com es concep a Occident. Troben la solució a partir de l'estudi de la funció




$$f(\theta) = \frac{2a\cos(2\theta)(1+\sin\theta) - a\sin(2\theta)\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2}.$$

Però aquest era un llenguatge desconegut al Japó.

# Problema 4. Propostes de resolució




- FUKAGAWA-ROTHMAN [2008] proposen una solució "moderna" en no haver-ne trobat cap de tradicional. Recorren a l'ús del càlcul de derivades tal com es concep a Occident. Troben la solució a partir de l'estudi de la funció

$$f(\theta) = \frac{2a\cos(2\theta)(1+\sin\theta) - a\sin(2\theta)\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2}.$$

Però aquest era un llenguatge desconegut al Japó.

- Una innovació del *wasan* és la recerca de condicions sobre els coeficients de les equacions que permeten establir la condició perquè el nombre de solucions d'una equació canviï. Això els porta al descobriment de condicions sobre un polinomi que fan el seu valor màxim o mínim. Presentarem el seu mètode, anul·lació del rang quadrat, a partir d'un problema extret del *Tetsujutsu sankei* [1722] de TAKEBE i després l'aplicarem al nostre problema.

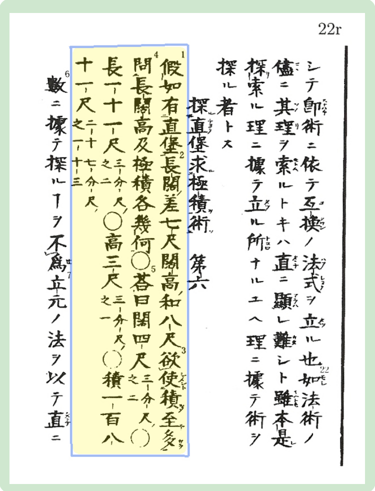
# Sisè exemple del *Tetsujutsu Sankei*

Amb el títol de "*Investigació del procediment de recerca del valor extrem d'un paral·lelepípede*" és un dels problemes que presenta com exemple d'investigació "per mitjà del principi".

## Enunciat

Sigui un paral·lelepípede en què la diferència entre la llargada i l'amplada és de 7 *shaku* i la suma de l'amplada i l'alçada és de 8 *shaku*. Es vol que el volum sigui el més gran possible. Es demana la llargada, l'amplada, l'altura i el volum màxim.

**Solució:** Amplada 4 i 2/3 *shaku*, llargada 11 i 2/3 *shaku*, alçada 3 i 1/3 *shaku*, volum 181 i 13/27 *shaku*.

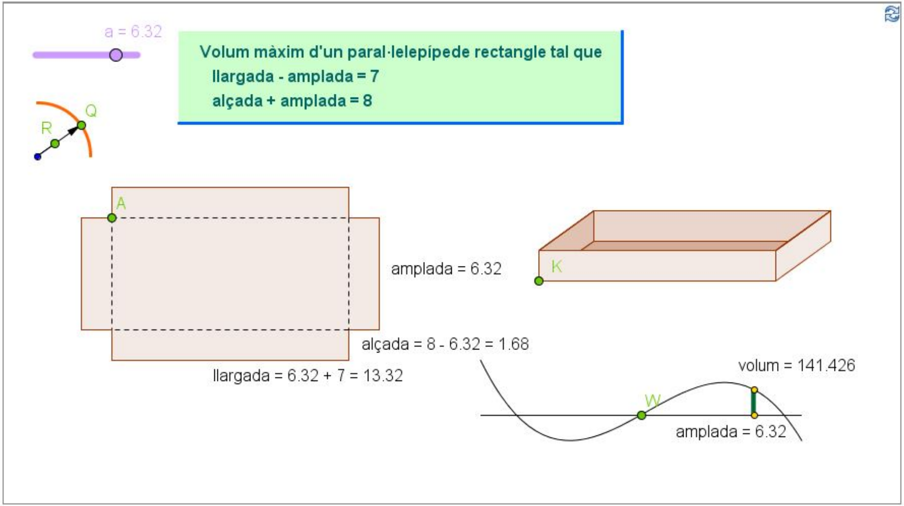


22r

シテ卽術ニ依テ互換ノ法式ヲ立ル也。如法術ノ
儘ニ其理ヲ索ルトキハ直ニ顯レ難シト雖本是
探索ル理ニ據テ立ル所ナルユヘ理ニ據テ術ヲ
探ル者トス
探直堡求極積術　第六
假如有直堡長闊差七尺闊高和八尺欲使積至多
問長闊高及極積各幾何○荅曰闊四尺三分尺之二○
長一十一尺三分尺之二○高三尺三分尺之一○積一百八
十一尺二十七分尺之一十三
數ニ據テ探ルヿヲ不爲元ノ法ヲ以テ直ニ

---

(1) 1 shaku ≈ 30 cm. (2) Vegeu Takebe, 178


a = 6.32
Q
R
Volum màxim d'un paral·lelepípede rectangle tal que
llargada - amplada = 7
alçada + amplada = 8
A
amplada = 6.32
K
alçada = 8 - 6.32 = 1.68
llargada = 6.32 + 7 = 13.32
volum = 141.426
W
amplada = 6.32

HTM GGB

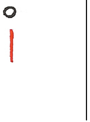
## Sisè exemple del *Tetsujutsu Sankei*. Etapes

1. Aplicació del *tianyuan*
   - Expressió del volum en funció de l'amplada.
   - Aplicació del mètode d'extracció de l'arrel amb l'amplada $x$ com a quocient, per obtenir el rang quadrat.
2. Anul·lació del rang quadrat.
3. Resolució de l'equació resultant i conclusió.

# Expressió del volum en funció de l'amplada

## Expressió del volum en funció de l'amplada

Col·loquem l'element celestial com l'**amplada**



# Expressió del volum en funció de l'amplada

Col·loquem l'element celestial com l'**amplada**

| | |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | $x$ |

**amplada** $= x$

# Expressió del volum en funció de l'amplada

Col·loquem l'element celestial com l'**amplada**

Li afegim la diferència i aquest fem la **longitud**

| | |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | $x$ |

**amplada** $= x$

---

Diferència ($d$) $\longleftrightarrow$ 差

# Expressió del volum en funció de l'amplada

Col·loquem l'element celestial com l'**amplada**

$$\begin{array}{|c||c|}\hline 0 & \\ \hline \color{red}{1} & x \\ \hline \end{array}$$

**amplada** $= x$

Li afegim la diferència i aquest fem la **longitud**


$$\begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline \color{red}{1} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|}\hline \color{red}{1\,d} \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c||c|}\hline \color{red}{1\,d} & \\ \hline \color{red}{1} & x \\ \hline \end{array}$$

**longitud** $= x + d$

---

Diferència $(d) \longleftrightarrow$ 差

## Expressió del volum en funció de l'amplada

Col·loquem l'element celestial com l'**amplada**

$$\begin{array}{|c||c|}\hline 0 & \\ \hline 1 & x \\ \hline\end{array}$$

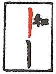
**amplada** $= x$

Li afegim la diferència i aquest fem la **longitud**

$$\begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|}\hline 1\ d \\ \hline 0 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c||c|}\hline 1\ d & \\ \hline 1 & x \\ \hline\end{array}$$

**longitud** $= x + d$

L'amplada restem de la suma i aquest fem l'**alçada**



Diferència $(d) \longleftrightarrow$ 差 Suma $(s) \longleftrightarrow$ 和

# Expressió del volum en funció de l'amplada

Col·loquem l'element celestial com l'**amplada**

$$\begin{array}{|c||c|}\hline 0 & \\ \hline {\color{red}1} & x \\ \hline \end{array}$$

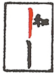
**amplada** $= x$

Li afegim la diferència i aquest fem la **longitud**


$$\begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline {\color{red}1} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|}\hline {\color{red}1\ d} \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c||c|}\hline {\color{red}1\ d} & \\ \hline {\color{red}1} & x \\ \hline \end{array}$$

**longitud** $= x + d$

L'amplada restem de la suma i aquest fem l'**alçada**




$$\begin{array}{|c|}\hline {\color{red}1\ s} \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline {\color{red}1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c||c|}\hline {\color{red}1\ s} & \\ \hline 1 & x \\ \hline \end{array}$$

**alçada** $= s - x$

---

Diferència ($d$) $\longleftrightarrow$ 差 Suma ($s$) $\longleftrightarrow$ 和

# Expressió del volum en funció de l'amplada

Col·loquem l'element celestial com l'**amplada**

$$\begin{array}{|c||c|}\hline 0 & \\ \hline 1 & x \\ \hline\end{array}$$

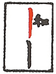
**amplada** $= x$

Li afegim la diferència i aquest fem la **longitud**

$$\begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|}\hline 1\ d \\ \hline 0 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c||c|}\hline 1\ d & \\ \hline 1 & x \\ \hline\end{array}$$

**longitud** $= x + d$

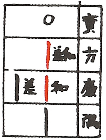
L'amplada restem de la suma i aquest fem l'**alçada**



$$\begin{array}{|c|}\hline 1\ s \\ \hline 0 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c||c|}\hline 1\ s & \\ \hline 1 & x \\ \hline\end{array}$$

**alçada** $= s - x$

Multipliquem la longitud, l'amplada i l'alçada i aquest fem el **volum**



---

Diferència ($d$) $\longleftrightarrow$ 差  Suma ($s$) $\longleftrightarrow$ 和

# Expressió del volum en funció de l'amplada

Col·loquem l'element celestial com l'**amplada**

$$\begin{array}{|c||c|}\hline 0 & \\ \hline 1 & x \\ \hline \end{array}$$

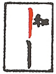
**amplada** $= x$

Li afegim la diferència i aquest fem la **longitud**

$$\begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|}\hline 1\,d \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c||c|}\hline 1\,d & \\ \hline 1 & x \\ \hline \end{array}$$

**longitud** $= x + d$

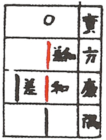
L'amplada restem de la suma i aquest fem l'**alçada**



$$\begin{array}{|c|}\hline 1\,s \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c||c|}\hline 1\,s & \\ \hline 1 & x \\ \hline \end{array}$$

**alçada** $= s - x$

Multipliquem la longitud, l'amplada i l'alçada i aquest fem el **volum**



$$\begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline 1\,d \\ \hline 1 \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline 1\,s \\ \hline 1 \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 1\,d \\ \hline 1 \\ \hline \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline 1\,s \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c||c|}\hline 0 & \\ \hline 1\,d\,s & x \\ \hline 1\,d \quad 1\,s & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}$$

**volum** $= x(x+d)(s-x) = (d\,s)\,x + (-d+s)x^2 - x^3$

Diferència $(d) \longleftrightarrow$ 差 Suma $(s) \longleftrightarrow$ 和

# Obtenció del rang quadrat

**volum** $= (d\,s)\,x + (-d+s)x^2 - x^3$

Fem l'amplada el quocient . Col·loquem -1 al rang cantonada inicial i multipliquem aquest pel quocient; li afegim al rang costat inicial i fem aquest el primer nombre que ha d'extreure el rang costat 

| quocient | cantonada | costat | quadrat | realitat |
|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | $-d+s$ | $d\,s$ | $0$ |
| $\mathbf{x}$ | | $-\mathbf{x}$ | | |
| | $-\mathbf{1}$ | $(-\mathbf{d}+\mathbf{s})-\mathbf{x}$ | | |

# Obtenció del rang quadrat

**volum** $= (d\,s)\,x + (-d + s)x^2 - x^3$

Fem l'amplada el quocient . Col·loquem -1 al rang cantonada inicial i multipliquem aquest pel quocient; li afegim al rang costat inicial i fem aquest el primer nombre que ha d'extreure el rang costat 

| quocient | cantonada | costat | quadrat | realitat |
|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | $-d + s$ | $d\,s$ | $0$ |
| $\mathbf{x}$ | | $-\mathbf{x}$ | | |
| | $-\mathbf{1}$ | $(-\mathbf{d} + \mathbf{s}) - \mathbf{x}$ | | |

$$x \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = x$$

# Obtenció del rang quadrat

**volum** $= (d\,s)\,x + (-d+s)x^2 - x^3$

Fem l'amplada el quocient . Col·loquem -1 al rang cantonada inicial i multipliquem aquest pel quocient; li afegim al rang costat inicial i fem aquest el primer nombre que ha d'extreure el rang costat 

| quocient | cantonada | costat | quadrat | realitat |
|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | $-d+s$ | $d\,s$ | $0$ |
| $\mathbf{x}$ | | $-\mathbf{x}$ | | |
| | $-\mathbf{1}$ | $(-\mathbf{d}+\mathbf{s})-\mathbf{x}$ | | |

$$x \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = x$$

$$x \begin{array}{|c|c|}\hline 1\,d & 1\,s \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = (-d+s)-x$$

# Obtenció del rang quadrat

Després multipliquem aquest pel quocient i fem aquest el primer nombre que ha d'extreure el rang quadrat 

| quocient | cantonada | costat | quadrat | realitat |
|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | $-d+s$ | $d\,s$ | $0$ |
| $\mathbf{x}$ | | $-x$ | $(-\mathbf{d}+\mathbf{s})\mathbf{x}-\mathbf{x}^2$ | |
| | $-1$ | $(-\mathbf{d}+\mathbf{s})-\mathbf{x}$ | $(-\mathbf{d}+\mathbf{s})\mathbf{x}-\mathbf{x}^2$ | |

# Obtenció del rang quadrat

Després multipliquem aquest pel quocient i fem aquest el primer nombre que ha d'extreure el rang quadrat 

| quocient | cantonada | costat | quadrat | realitat |
|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | $-d+s$ | $d\ s$ | $0$ |
| $\mathbf{x}$ | | $-x$ | $\mathbf{(-d+s)x-x^2}$ | |
| | $-1$ | $\mathbf{(-d+s)-x}$ | $\mathbf{(-d+s)x-x^2}$ | |

| | | |
|---|---|---|
| | $1\ d$ | $0$ |
| | | $1\ s$ |
| $x$ | | $1$ |

$$= (-d+s)x - x^2$$

# Obtenció del rang quadrat

També, col·loquem la cantonada inicial i multipliquem aquesta pel quocient, afegim aquest al primer nombre que ha d'extreure el rang costat i fem aquest el "segon nombre ha d'extreure el rang costat" 

| quocient | cantonada | costat | quadrat | realitat |
|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | $-d+s$ | $d\ s$ | $0$ |
| $x$ | | $-x$ | $(-d+s)x-x^2$ | |
| | $-1$ | $(-d+s)-x$ | $(-d+s)x-x^2$ | |
| $\mathbf{x}$ | | $\mathbf{-x}$ | | |
| | $\mathbf{-1}$ | $\mathbf{(-d+s)-2x}$ | | |

# Obtenció del rang quadrat

També, col·loquem la cantonada inicial i multipliquem aquesta pel quocient, afegim aquest al primer nombre que ha d'extreure el rang costat i fem aquest el "segon nombre ha d'extreure el rang costat" 

| quocient | cantonada | costat | quadrat | realitat |
|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | $-d+s$ | $d\ s$ | $0$ |
| $x$ | | $-x$ | $(-d+s)x-x^2$ | |
| | $-1$ | $(-d+s)-x$ | $(-d+s)x-x^2$ | |
| $\mathbf{x}$ | | $\mathbf{-x}$ | | |
| | $\mathbf{-1}$ | $\mathbf{(-d+s)-2x}$ | | |

| | | |
|---|---|---|
| | $1\,d$ | $1\,s$ |
| $x$ | | $2$ |

$$= (-d+s) - 2x$$

# Obtenció del rang quadrat

Després, multipliquem aquest pel quocient i fem aquest "el segon nombre que ha d'extreure el rang quadrat" 

| quocient | cantonada | costat | quadrat | realitat |
|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | $-d+s$ | $d\,s$ | $0$ |
| $x$ | | $-x$ | $(-d+s)x-x^2$ | |
| | $-1$ | $(-d+s)-x$ | $(-d+s)x-x^2$ | |
| $\mathbf{x}$ | | $-x$ | $\mathbf{(-d+s)x-2x^2}$ | |
| | $-1$ | $\mathbf{(-d+s)-2x}$ | | |

# Obtenció del rang quadrat

Després, multipliquem aquest pel quocient i fem aquest “el segon nombre que ha d’extreure el rang quadrat” 

| quocient | cantonada | costat | quadrat | realitat |
|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | $-d+s$ | $d\ s$ | $0$ |
| $x$ | | $-x$ | $(-d+s)x - x^2$ | |
| | $-1$ | $(-d+s) - x$ | $(-d+s)x - x^2$ | |
| $\mathbf{x}$ | | $-x$ | $\mathbf{(-d+s)x - 2x^2}$ | |
| | $-1$ | $\mathbf{(-d+s) - 2x}$ | | |

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $1\,d$ | $1\,s$ |
| | | $2$ |

$$= (-d+s)x - 2x^2$$

# Obtenció del rang quadrat

Afegim aquest al primer nombre que ha d'extreure el rang quadrat i fem aquest "el el cas extrem del rang quadrat" 

| quocient | cantonada | costat | quadrat | realitat |
|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | $-d+s$ | $d\,s$ | $0$ |
| $x$ | | $-x$ | $(-d+s)x-x^2$ | |
| | $-1$ | $(-d+s)-x$ | $\mathbf{(-d+s)x-x^2}$ | |
| $x$ | | $-x$ | $\mathbf{(-d+s)x-2x^2}$ | |
| | $-1$ | $(-d+s)-2x$ | $\mathbf{2(-d+s)x-3x^2}$ | |

# Obtenció del rang quadrat

Afegim aquest al primer nombre que ha d'extreure el rang quadrat i fem aquest "el el cas extrem del rang quadrat" 

| quocient | cantonada | costat | quadrat | realitat |
|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | $-d+s$ | $d\,s$ | $0$ |
| $x$ | | $-x$ | $(-d+s)x-x^2$ | |
| | $-1$ | $(-d+s)-x$ | $\mathbf{(-d+s)x-x^2}$ | |
| $x$ | | $-x$ | $\mathbf{(-d+s)x-2x^2}$ | |
| | $-1$ | $(-d+s)-2x$ | $\mathbf{2(-d+s)x-3x^2}$ | |

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $2\,d$ | $2\,s$ |
| | | $3$ |

$$= 2(-d+s)x - 3x^2$$

# Anul·lació del rang quadrat

Movem aquest a l'esquerra. Col·loquem el rang quadrat inicial i el cancel·lem amb el que hem mogut a l'esquerra. Obtenim l'equació 

| quocient | cantonada | costat | quadrat | realitat |
|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | $-d+s$ | $\mathbf{d\,s}$ | $0$ |
| $x$ | | $-x$ | $(-d+s)x-x^2$ | |
| | $-1$ | $(-d+s)-x$ | $(-d+s)x-x^2$ | |
| $x$ | | $-x$ | $(-d+s)x-2x^2$ | |
| | $-1$ | $(-d+s)-2x$ | $\mathbf{2(-d+s)x-3x^2}$ | |
| | | | $\mathbf{d\,s+2(-d+s)x-3x^2}$ | |

# Anul·lació del rang quadrat

Movem aquest a l'esquerra. Col·loquem el rang quadrat inicial i el cancel·lem amb el que hem mogut a l'esquerra. Obtenim l'equació 

| quocient | cantonada | costat | quadrat | realitat |
|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | $-d+s$ | $\mathbf{d\,s}$ | $0$ |
| $x$ | | $-x$ | $(-d+s)x-x^2$ | |
| | $-1$ | $(-d+s)-x$ | $(-d+s)x-x^2$ | |
| $x$ | | $-x$ | $(-d+s)x-2x^2$ | |
| | $-1$ | $(-d+s)-2x$ | $\mathbf{2(-d+s)x-3x^2}$ | |
| | | | $\mathbf{d\,s+2(-d+s)x-3x^2}$ | |

| | | |
|---|---|---|
| | | $1\,d\,s$ |
| $x$ | $2\,d$ | $2\,s$ |
| | | $3$ |

$$= \underbrace{d\,s+2(-d+s)x-3x^2}_{\substack{\shortparallel \\ 0}}$$

## Anul·lació del rang quadrat. Solució de l'equació

En la resolució del problema concret, fent $s = 8$ i $d = 7$, Takebe escriu:

L'amplada obtinguda té dígit inexhaurible sota el *shaku*. Consegüentment, en la fórmula original, multipliquem el rang realitat per 3, deixem el rang quadrat igual i dividim el rang costat per 3, i extraient l'arrel quadrada d'aquesta obtenim 14. La dividim per 3 i obtenim 4 i 2/3 *shaku*.

| quocient | costat | quadrat | realitat |
|---|---|---|---|
| | $-3$ | $2\cdot(8-7)$ | $8\cdot 7$ |
| 4 | | $-12$ | $-40$ |
| | $-3$ | $-10$ | 16 ? |
| | $-3$ | 2 | 56 |
| 5 | | $-15$ | $-65$ |
| | $-3$ | $-13$ | $-9$ |

# Anul·lació del rang quadrat. Solució de l'equació

En la resolució del problema concret, fent $s = 8$ i $d = 7$, Takebe escriu:

L'amplada obtinguda té dígit inexhaurible sota el *shaku*. Consegüentment, en la fórmula original, multipliquem el rang realitat per 3, deixem el rang quadrat igual i dividim el rang costat per 3, i extraient l'arrel quadrada d'aquesta obtenim 14. La dividim per 3 i obtenim 4 i 2/3 *shaku*.

| quocient | costat | quadrat | realitat |
|---|---|---|---|
| | $-3$ | $2\cdot(8-7)$ | $8\cdot 7$ |
| 4 | | $-12$ | $-40$ |
| | $-3$ | $-10$ | 16 ? |
| | $-3$ | 2 | 56 |
| 5 | | $-15$ | $-65$ |
| | $-3$ | $-13$ | $-9$ |

$$\boxed{-3x^2+2x+56=0}$$
$$-9x^2+6x+168=0$$
$$3x=t$$
$$\boxed{-t^2+2t+168=0}$$

# Anul·lació del rang quadrat. Solució de l'equació

En la resolució del problema concret, fent $s = 8$ i $d = 7$, Takebe escriu:

L'amplada obtinguda té dígit inexhaurible sota el *shaku*. Conseqüentment, en la fórmula original, multipliquem el rang realitat per 3, deixem el rang quadrat igual i dividim el rang costat per 3, i extraient l'arrel quadrada d'aquesta obtenim 14. La dividim per 3 i obtenim 4 i 2/3 *shaku*.

| quocient | costat | quadrat | realitat |
|---|---|---|---|
| | $-3$ | $2\cdot(8-7)$ | $8\cdot 7$ |
| 4 | | $-12$ | $-40$ |
| | $-3$ | $-10$ | 16 ? |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $-3$ | 2 | 56 |
| 5 | | $-15$ | $-65$ |
| | $-3$ | $-13$ | $-9$ |

$$-3x^2+2x+56=0$$
$$-9x^2+6x+168=0$$
$$3x=t$$
$$-t^2+2t+168=0$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $-1$ | 2 | 168 |
| 10 | | $-10$ | $-80$ |
| | $-1$ | $-8$ | $-88$ |
| 10 | | $-10$ | |
| | $-1$ | $-18$ | 88 |
| 4 | | $-4$ | $-88$ |
| | $-1$ | $-22$ | 0 |

$$t=14\Rightarrow x=\frac{14}{3}=4+\frac{2}{3}$$

# Anul·lació del rang quadrat. Anàlisi

Necessitat de l'anul·lació del rang quadrat per a l'existència d'extrem en $x_0$. Segon grau. (A partir de l'observació de valors pròxims $x_0 + h$.)

# Anul·lació del rang quadrat. Anàlisi

Necessitat de l'anul·lació del rang quadrat per a l'existència d'extrem en $x_0$. Segon grau. (A partir de l'observació de valors pròxims $x_0 + h$.)

## Expressió quadràtica

$$
\begin{array}{c|lll}
 & a & b & c \\
x_0 & & ax_0 & (ax_0+b)x_0 \\
\hline
 & a & ax_0+b & ax_0^2+bx_0+c \\
x_0 & & ax_0 & \\
\hline
 & a & 2ax_0+b &
\end{array}
$$

# Anul·lació del rang quadrat. Anàlisi

Necessitat de l'anul·lació del rang quadrat per a l'existència d'extrem en $x_0$. Segon grau. (A partir de l'observació de valors pròxims $x_0 + h$.)

## Expressió quadràtica

$$
\begin{array}{c|lll}
 & a & b & c \\
x_0 & & ax_0 & (ax_0+b)x_0 \\
\hline
 & a & ax_0+b & ax_0^2+bx_0+c \\
x_0 & & ax_0 & \\
\hline
 & a & \boxed{2ax_0+b} & [= \text{rang quadrat}]
\end{array}
$$

# Anul·lació del rang quadrat. Anàlisi

Necessitat de l'anul·lació del rang quadrat per a l'existència d'extrem en $x_0$. Segon grau. (A partir de l'observació de valors pròxims $x_0 + h$.)

## Expressió quadràtica

$$
\begin{array}{c|lll}
 & a & b & c \\
x_0 & & ax_0 & (ax_0+b)x_0 \\
\hline
 & a & ax_0+b & ax_0^2+bx_0+c \\
x_0 & & ax_0 & \\
\hline
 & a & \boxed{2ax_0+b} & [= \text{rang quadrat}]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|lll}
 & a & 2ax_0+b & ax_0^2+bx_0+c \\
h & & ah & \big(ah+(2ax_0+b)\big)h \\
\hline
 & a & ah+(2ax_0+b) &
\end{array}
$$

# Anul·lació del rang quadrat. Anàlisi

Necessitat de l'anul·lació del rang quadrat per a l'existència d'extrem en $x_0$. Segon grau. (A partir de l'observació de valors pròxims $x_0 + h$.)

## Expressió quadràtica

$$
\begin{array}{c|llll}
 & a & b & c & \\
x_0 & & ax_0 & (ax_0+b)x_0 & \\
\hline
 & a & ax_0+b & ax_0^2+bx_0+c & \\
x_0 & & ax_0 & & \\
\hline
 & a & \boxed{2ax_0+b} & [= \text{rang quadrat}] &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|lll}
 & a & 2ax_0+b & ax_0^2+bx_0+c \ [= p(x_0)] \\
h & & ah & (ah+(2ax_0+b))h \\
\hline
 & a & ah+(2ax_0+b) & p(x_0) + \underbrace{((2ax_0+b)h+ah^2)}_{(*)}
\end{array}
$$

Per $h$ suficientment petit en valor absolut, si $h$ canvia de signe,

$\mathbf{2ax_0 + b \neq 0}$
$\Longrightarrow (*)$ canvia de signe

$\mathbf{2ax_0 + b = 0}$
$\Longrightarrow (*) = ah^2$ no canvia de signe

# Anul·lació del rang quadrat. Anàlisi

Necessitat de l'anul·lació del rang quadrat per a l'existència d'extrem en $x_0$. Segon grau. (A partir de l'observació de valors pròxims $x_0 + h$.)

## Expressió quadràtica

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | $c$ |
| $x_0$ | | $ax_0$ | $(ax_0+b)x_0$ |
| | $a$ | $ax_0+b$ | $ax_0^2+bx_0+c$ |
| $x_0$ | | $ax_0$ | |
| | $a$ | $2ax_0+b$ | [= rang quadrat] |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $a$ | $2ax_0+b$ | $ax_0^2+bx_0+c$ $[=p(x_0)]$ |
| $h$ | | $ah$ | $(ah+(2ax_0+b))h$ |
| | $a$ | $ah+(2ax_0+b)$ | $p(x_0)$ + $((2ax_0+b)h+ah^2)$ |
| | | | $(*)$ |

Per $h$ suficientment petit en valor absolut, si $h$ canvia de signe,

$\mathbf{2ax_0+b\neq 0}$ $\Longrightarrow$ $(*)$ canvia de signe

$\mathbf{2ax_0+b=0}$ $\Longrightarrow$ $(*) = ah^2$ no canvia de signe

Implica l'existència d'extrem en $x_0$

Necessitat de l'anul·lació del rang quadrat per a l'existència d'extrem en $x_0$. Tercer grau. (A partir de l'observació de valors pròxims $x_0 + h$.)

## Necessitat de l'anul·lació del rang quadrat per a l'existència d'extrem en $x_0$. Tercer grau. (A partir de l'observació de valors pròxims $x_0 + h$.)

### Expressió cúbica

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $x_0$ | | $ax_0$ | $(ax_0+b)x_0$ | $(ax_0^2+bx_0+c)x_0$ |
| | $a$ | $ax_0+b$ | $ax_0^2+bx_0+c$ | $ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d$ |
| $x_0$ | | $ax_0$ | $2ax_0^2+bx_0$ | |
| | $a$ | $2ax_0+b$ | $3ax_0^2+bx_0+c$ | |
| $x_0$ | | $ax_0$ | | |
| | $a$ | $3ax_0+b$ | | |

Necessitat de l'anul·lació del rang quadrat per a l'existència d'extrem en $x_0$. Tercer grau. (A partir de l'observació de valors pròxims $x_0 + h$.)

## Expressió cúbica

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $x_0$ | | $ax_0$ | $(ax_0 + b)x_0$ | $(ax_0^2 + bx_0 + c)x_0$ |
| | $a$ | $ax_0 + b$ | $ax_0^2 + bx_0 + c$ | $ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$ |
| $x_0$ | | $ax_0$ | $2ax_0^2 + bx_0$ | |
| | $a$ | $2ax_0 + b$ | $3ax_0^2 + 2bx_0 + c$ | [= rang quadrat] |
| $x_0$ | | $ax_0$ | | |
| | $a$ | $3ax_0 + b$ | | |

## Necessitat de l'anul·lació del rang quadrat per a l'existència d'extrem en $x_0$. Tercer grau. (A partir de l'observació de valors pròxims $x_0 + h$.)

### Expressió cúbica

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $x_0$ | | $ax_0$ | $(ax_0+b)x_0$ | $(ax_0^2+bx_0+c)x_0$ |
| | $a$ | $ax_0+b$ | $ax_0^2+bx_0+c$ | $ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d$ |
| $x_0$ | | $ax_0$ | $2ax_0^2+bx_0$ | |
| | $a$ | $2ax_0+b$ | $3ax_0^2+2bx_0+c$ | [= rang quadrat] |
| $x_0$ | | $ax_0$ | | |
| | $a$ | $3ax_0+b$ | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $3ax_0+b$ | $3ax_0^2+2bx_0+c$ | $ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d$ |
| $h$ | | $ah$ | $\cdots$ | |
| | $a$ | $\cdots$ | $\cdots$ | |

## Necessitat de l'anul·lació del rang quadrat per a l'existència d'extrem en $x_0$. Tercer grau. (A partir de l'observació de valors pròxims $x_0 + h$.)

### Expressió cúbica

$$
\begin{array}{c|llll}
 & a & b & c & d \\
x_0 & & ax_0 & (ax_0+b)x_0 & (ax_0^2+bx_0+c)x_0 \\
\hline
 & a & ax_0+b & ax_0^2+bx_0+c & ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d \\
x_0 & & ax_0 & 2ax_0^2+bx_0 & \\
\hline
 & a & 2ax_0+b & \boxed{3ax_0^2+2bx_0+c} & [= \text{rang quadrat}] \\
x_0 & & ax_0 & & \\
\hline
 & a & 3ax_0+b & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|lllll}
 & a & 3ax_0+b & 3ax_0^2+2bx_0+c & ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d & [= p(x_0)] \\
h & & ah & \cdots & & \\
\hline
 & a & \cdots & \cdots & p(x_0) & + \left((3ax_0^2+2bx_0+c)h+(3ax_0+b)h^2+ah^3\right) \\
 & & & & & (*)
\end{array}
$$

## Necessitat de l'anul·lació del rang quadrat per a l'existència d'extrem en $x_0$. Tercer grau. (A partir de l'observació de valors pròxims $x_0 + h$.)

### Expressió cúbica

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $x_0$ | | $ax_0$ | $(ax_0+b)x_0$ | $(ax_0^2+bx_0+c)x_0$ |
| | $a$ | $ax_0+b$ | $ax_0^2+bx_0+c$ | $ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d$ |
| $x_0$ | | $ax_0$ | $2ax_0^2+bx_0$ | |
| | $a$ | $2ax_0+b$ | $3ax_0^2+2bx_0+c$ | [= rang quadrat] |
| $x_0$ | | $ax_0$ | | |
| | $a$ | $3ax_0+b$ | | |

Si $h$ canvia de signe,

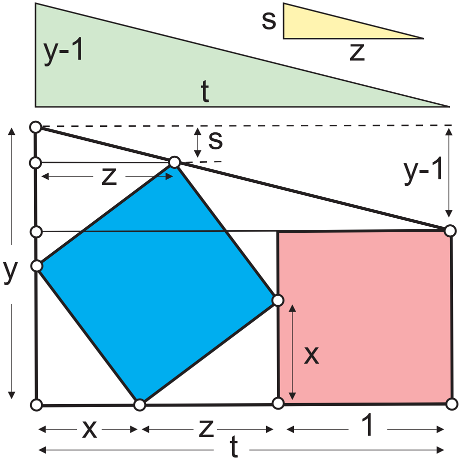
$\mathbf{3ax_0^2+2bx_0+c \neq 0}$ $\Longrightarrow$ $(*)$ canvia de signe

$\mathbf{3ax_0^2+2bx_0+c = 0}$ $\Longrightarrow$ $(*)$ no canvia de signe si $3ax_0+b\neq 0$

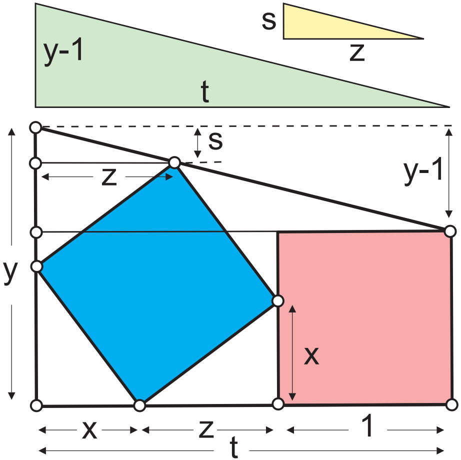
Implica l'existència d'extrem en $x_0$ si $3ax_0+b\neq 0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $3ax_0+b$ | $3ax_0^2+2bx_0+c$ | $ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d$ $[=p(x_0)]$ |
| $h$ | | $ah$ | $\cdots$ | |
| | $a$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $p(x_0) + \underbrace{\left((3ax_0^2+2bx_0+c)h+(3ax_0+b)h^2+ah^3\right)}_{(*)}$ |

# Problema 4. Resolució



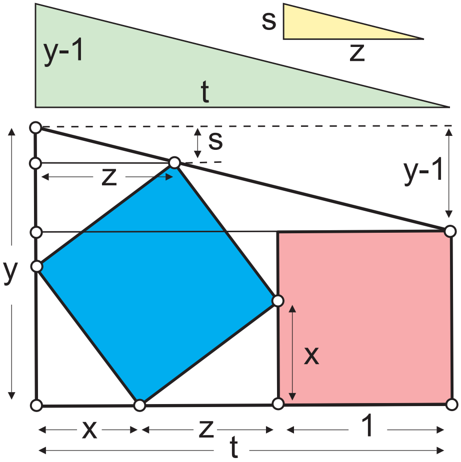
# Problema 4. Resolució




SEKI escriu tres tractats (1680-1690) de síntesi amb els mètodes per resoldre els problemes “aparents”, els “ocults” i els “dissimulats”.

$$\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ t=x+z+1 \\ s=y-x-z \\ z\cdot(y-1)=t\cdot s \end{cases}$$

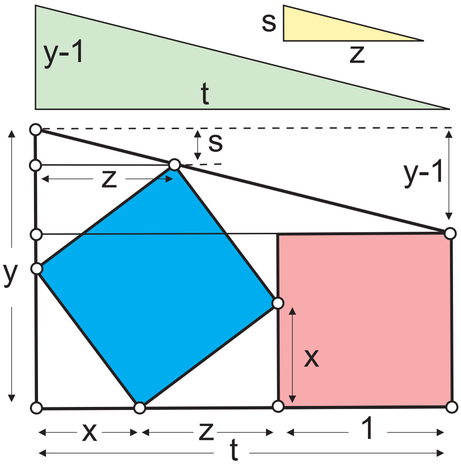
# Problema 4. Resolució




El tercer, *Kaifukudai no hō*, el dedica als problemes que exigeixen diverses incògnites i tècniques d'eliminació.

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ t = x + z + 1 \\ s = y - x - z \\ z \cdot (y-1) = t \cdot s \end{cases}$$

# Problema 4. Resolució




$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ t = x + z + 1 \\ s = y - x - z \\ z \cdot (y-1) = t \cdot s \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + Mx + M &= 0 \quad (E_1) \\ 3x^2 - 2x + M &= 0 \quad (E_2) \end{aligned} \qquad \left[ M = \left( \frac{y-1}{2} \right)^2 \right.$$

- Eliminació de les incògnites $y$, $z$, $s$, $t$, mitjançant combinacions lineals de les equacions i les seves potències

# Problema 4. Resolució

$$\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ t=x+z+1 \\ s=y-x-z \\ z\cdot(y-1)=t\cdot s \end{cases}$$

- Eliminació de les incògnites $y$, $z$, $s$, $t$, mitjançant combinacions lineals de les equacions i les seves potències

$$\begin{aligned} x^3-x^2+Mx+M&=0 \quad (E_1) \\ 3x^2-2x+M&=0 \quad (E_2) \end{aligned} \qquad \left[M=\left(\frac{y-1}{2}\right)^2\right.$$

- Transformació d'un sistema de dos equacions, amb una incògnita, de grau 3, en un sistema de 3 equacions de grau 2

$E_3 = 3x^2\cdot E_1 + x^2\cdot E_2 - x^3\cdot E_2$
$F_3 =$ Eliminació del factor $2x^2$de $E_3$
$E_4 = 2x\cdot E_1 + M\cdot x\cdot E_2 - E_3$
$F_4 =$ Eliminació del factor $Mx$ de $E_4$

# Problema 4. Resolució

$$\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ t=x+z+1 \\ s=y-x-z \\ z\cdot(y-1)=t\cdot s \end{cases}$$

- Eliminació de les incògnites $y$, $z$, $s$, $t$, mitjançant combinacions lineals de les equacions i les seves potències

$$\begin{aligned} x^3-x^2+Mx+M&=0 \quad (E_1) \\ 3x^2-2x+M&=0 \quad (E_2) \end{aligned} \qquad \left[M=\left(\frac{y-1}{2}\right)^2\right.$$

- Transformació d'un sistema de dos equacions, amb una incògnita, de grau 3, en un sistema de 3 equacions de grau 2

$E_3 = 3x^2\cdot E_1 + x^2\cdot E_2 - x^3\cdot E_2$

$F_3 =$ Eliminació del factor $2x^2$de $E_3$

$E_4 = 2x\cdot E_1 + M\cdot x\cdot E_2 - E_3$

$F_4 =$ Eliminació del factor $Mx$ de $E_4$

$$\begin{aligned} &3x^2-2x+M=0 && (E_2) \\ &x^2+(M-1)x+2M=0 && (F_3) \\ &x^2-4x+(M+2)=0 && (F_4) \end{aligned}$$

# Problema 4. Resolució

En general, fan la transformació d'un sistema de dos equacions, amb una incògnita, de grau $n$, en un sistema de $n$ equacions de grau $n-1$

$$\begin{cases} P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\ Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1(x) = a_n Q(x) - b_n P(x) \\ R_k(x) = \ a_{n-k+1} Q(x) \\ \qquad\qquad - b_{n-k+1} P(x) \\ \qquad\qquad + x R_{k-1}(x), \quad 2 \leq k \leq n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ t = x + z + 1 \\ s = y - x - z \\ z \cdot (y-1) = t \cdot s \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} x^3 - x^2 + Mx + M = 0 & (E_1) \\ 3x^2 - 2x + M = 0 & (E_2) \end{array} \quad \left[ M = \left( \frac{y-1}{2} \right)^2 \right.$$

$E_3 = 3x^2 \cdot E_1 + x^2 \cdot E_2 - x^3 \cdot E_2$

$F_3 =$ Eliminació del factor $2x^2$de $E_3$

$E_4 = 2x \cdot E_1 + M \cdot x \cdot E_2 - E_3$

$F_4 =$ Eliminació del factor $Mx$ de $E_4$

$$\begin{array}{ll} 3x^2 - 2x + M = 0 & (E_2) \\ x^2 + (M-1)x + 2M = 0 & (F_3) \\ x^2 - 4x + (M+2) = 0 & (F_4) \end{array}$$

# Problema 4. Resolució

En general, per establir la compatibilitat del sistema: $\begin{cases} C_1+B_1x+A_1x^2=0 \ (E_1) \\ C_2+B_2x+A_2x^2=0 \ (E_2) \\ C_3+B_3x+A_3x^2=0 \ (E_3) \end{cases}$

# Problema 4. Resolució

En general, per establir la compatibilitat del sistema: $\begin{cases} C_1+B_1x+A_1x^2=0 \ (E_1) \\ C_2+B_2x+A_2x^2=0 \ (E_2) \\ C_3+B_3x+A_3x^2=0 \ (E_3) \end{cases}$

(1) Multiplica les equacions pels coeficients: $\begin{cases} +B_2A_3\cdot(E_1), \ -B_3A_2\cdot(E_1) \\ -B_1A_3\cdot(E_2), \ +B_3A_1\cdot(E_2) \\ +B_1A_2\cdot(E_3), \ -B_1A_2\cdot(E_1) \end{cases}$

# Problema 4. Resolució

En general, per establir la compatibilitat del sistema: $\begin{cases} C_1+B_1x+A_1x^2=0 \ (E_1) \\ C_2+B_2x+A_2x^2=0 \ (E_2) \\ C_3+B_3x+A_3x^2=0 \ (E_3) \end{cases}$

(1) Multiplica les equacions pels coeficients: $\begin{cases} +B_2A_3\cdot(E_1), \ -B_3A_2\cdot(E_1) \\ -B_1A_3\cdot(E_2), \ +B_3A_1\cdot(E_2) \\ +B_1A_2\cdot(E_3), \ -B_1A_2\cdot(E_1) \end{cases}$

(2) Suma les equacions resultants i obté:

$$C_1B_2A_3 + A_1B_3C_2 + B_1A_2C_3 - A_2B_3C_1 - B_1A_3C_2 - A_1B_2C_3 = 0$$

# Problema 4. Resolució

En general, per establir la compatibilitat del sistema: $\begin{cases} C_1+B_1x+A_1x^2=0 \ (E_1) \\ C_2+B_2x+A_2x^2=0 \ (E_2) \\ C_3+B_3x+A_3x^2=0 \ (E_3) \end{cases}$

(1) Multiplica les equacions pels coeficients: $\begin{cases} +B_2A_3\cdot(E_1), & -B_3A_2\cdot(E_1) \\ -B_1A_3\cdot(E_2), & +B_3A_1\cdot(E_2) \\ +B_1A_2\cdot(E_3), & -B_1A_2\cdot(E_1) \end{cases}$

(2) Suma les equacions resultants i obté:

$$C_1B_2A_3 + A_1B_3C_2 + B_1A_2C_3 - A_2B_3C_1 - B_1A_3C_2 - A_1B_2C_3 = 0$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x + M = 0 \\ x^2 + (M-1)x + 2M = 0 \\ x^2 - 4x + (M+2) = 0 \end{cases}$$

$$2M^2 + 22M - 2 = 0$$

$$(y-1)^2 = 4M = 2(5\sqrt{5} - 11)$$

$$\Longrightarrow y = 1 + \sqrt{10\sqrt{5} - 22} \approx 1.6000566$$

# Problema 4. Resolució

En general, per establir la compatibilitat del sistema: $\begin{cases} C_1+B_1x+A_1x^2=0 \ (E_1) \\ C_2+B_2x+A_2x^2=0 \ (E_2) \\ C_3+B_3x+A_3x^2=0 \ (E_3) \end{cases}$

(1) Multiplica les equacions pels coeficients: $\begin{cases} +B_2A_3\cdot(E_1), & -B_3A_2\cdot(E_1) \\ -B_1A_3\cdot(E_2), & +B_3A_1\cdot(E_2) \\ +B_1A_2\cdot(E_3), & -B_1A_2\cdot(E_1) \end{cases}$

(2) Suma les equacions resultants i obté:

$$C_1B_2A_3 + A_1B_3C_2 + B_1A_2C_3 - A_2B_3C_1 - B_1A_3C_2 - A_1B_2C_3 = 0$$

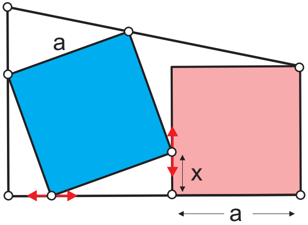
$$\begin{cases} 3x^2 - 2x + M = 0 \\ x^2 + (M-1)x + 2M = 0 \\ x^2 - 4x + (M+2) = 0 \end{cases}$$

$$2M^2 + 22M - 2 = 0$$

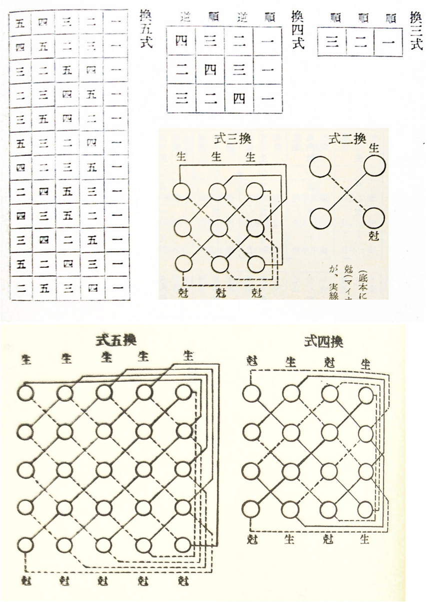
$$(y-1)^2 = 4M = 2(5\sqrt{5} - 11)$$

$$\Longrightarrow y = 1 + \sqrt{10\sqrt{5} - 22} \approx 1.6000566$$

**Exercici:** $\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{\Phi}} = \dfrac{\sqrt{\mathbf{5}} - \mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

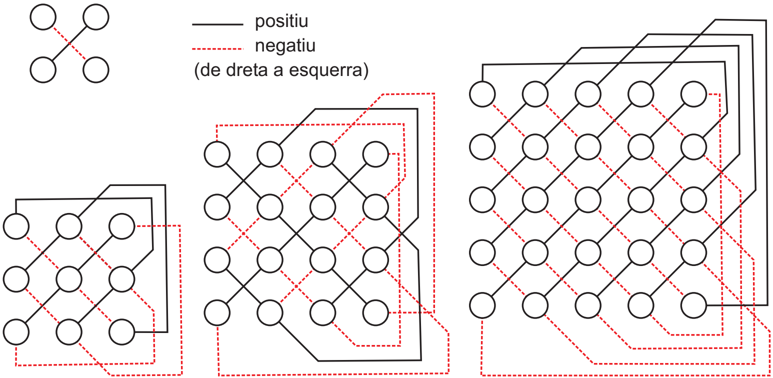


# Problema 4. Resolució. Determinants



- SEKI escriu tres tractats (1680-1690) de síntesi amb els mètodes per resoldre els problemes "aparents", els "ocults" i els "dissimulats".
- El tercer, *Kaifukudai no hō*, el dedica als problemes que exigeixen diverses incògnites i tècniques d'eliminació i hi presenta els *determinants*.
- El problema que els origina és el de la conversió d'un sistema de 2 equacions de grau $n$, en un de $n$ equacions de grau $n-1$.
- Presenta els càlculs que s'han de fer amb els coeficients dels sistemes $n \times n$ obtinguts, $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$, per establir la seva compatibilitat. Apareixen els determinants.
- Paral·lelament, trobem els determinants en la correspondència entre Leibniz i l'Hôpital (1693).

# Problema 4. Resolució. Determinants




$n=2$

| | |
|---|---|
| 2 | 1 |

$n=3$

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 |

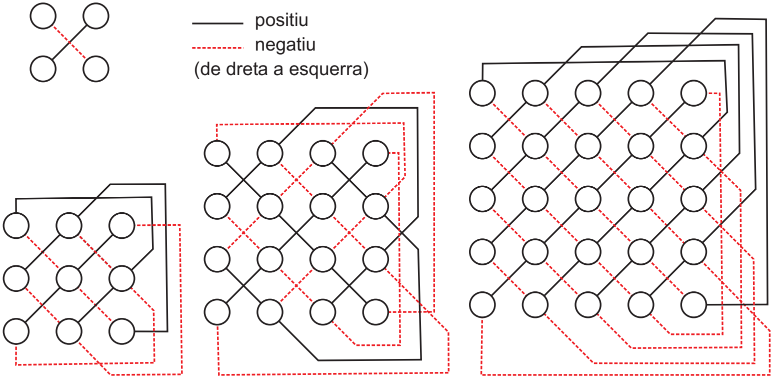
$n=4$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 4 | 1 |

$n=5$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 4 | 5 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 5 | 4 | 1 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 5 | 4 | 2 | 1 |
| 5 | 3 | 2 | 4 | 1 |
| 4 | 2 | 3 | 5 | 1 |
| 2 | 4 | 5 | 3 | 1 |
| 4 | 3 | 5 | 2 | 1 |
| 3 | 4 | 2 | 5 | 1 |
| 5 | 2 | 4 | 3 | 1 |
| 2 | 5 | 3 | 4 | 1 |

# Problema 4. Resolució. Determinants




$n = 2$

| | |
|---|---|
| 2 | 1 |

$n = 3$

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 |

$n = 4$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 4 | 1 |

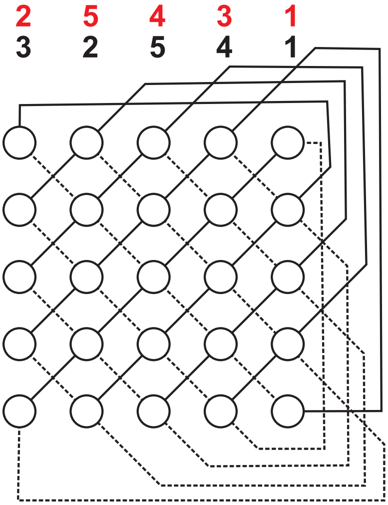
$n = 5$ (*)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 5 | 4 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 5 | 4 | 1 |
| 4 | 3 | 2 | 5 | 1 |
| 3 | 5 | 4 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 5 | 4 | 1 |
| 4 | 2 | 3 | 5 | 1 |
| 5 | 4 | 2 | 3 | 1 |
| 4 | 3 | 5 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 3 | 5 | 1 |
| 5 | 2 | 4 | 3 | 1 |
| 3 | 5 | 2 | 4 | 1 |

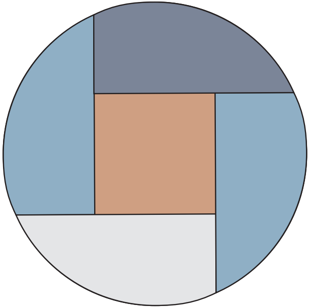
(*) TATSUKAWA, RYOJI [2003]. *A Study of Japanese Mathematics, Wasan* ▸ PDF

# Problema 4. Resolució. Determinants

- Les indicacions de SEKI per construir les permutacions de columnes són poc explícites i per al cas $n = 5$ té algun error (origina productes repetits).
- Un cop construïdes les permutacions, els productes queden ben determinats a partir dels seus esquemes.
- Si triem la permutació de columnes 1 4 5 2 3, (SEKI–TATSUKAWA), obtenim 5 productes positius i 5 de negatius correctes.
- Amb la tria 1 3 4 5 2, (TATSUKAWA), obtenim els signes canviats.
- Amb la tria de les dotze permutacions corregides, obtindríem els 120 productes amb el signe correcte.



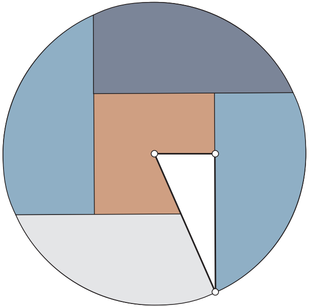
# Problema 5



Sobre un camp circular de diàmetre 100, tracem quatre línies de longitud $t$, de manera que parteixen el cercle en cinc àrees iguals, una de les quals és un quadrat de costat $d$. Trobeu $t$ i $d$, utilitzant $\pi = 3.16$.

Solució: $t = 69.75494$ i $d = 39.7494$

# Problema 5



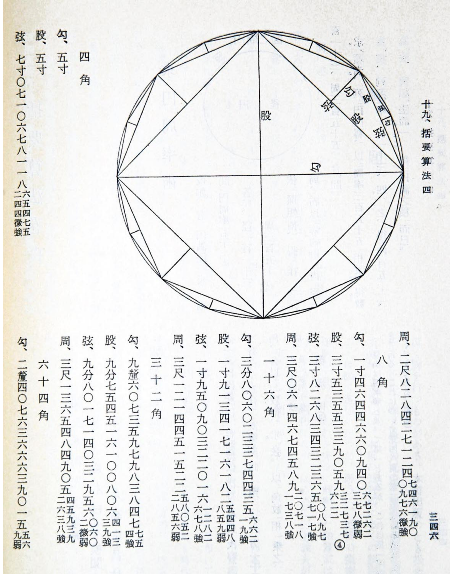
Sobre un camp circular de diàmetre 100, tracem quatre línies de longitud $t$, de manera que parteixen el cercle en cinc àrees iguals, una de les quals és un quadrat de costat $d$. Trobeu $t$ i $d$, utilitzant $\pi = 3.16$.

Solució: $t = 69.75494$ i $d = 39.7494$

## Seki i el càlcul de $\pi$

En el *Katsuyō sampō*, (Compendi de mètodes matemàtics), presenta el valor de $\pi$ mitjançant un procés en dues etapes.

- Càlcul dels perímetres $s_n$ dels $2^n$-polígons regulars inscrits en la circumferència.
- Operació sense justificació sobre $s_{15}$, $s_{16}$ i $s_{17}$ per obtenir una millora de l'aproximació, en què es conjectura que aplica el *zōyakujutsu*, (mètode de simplificació per divisors incrementals).

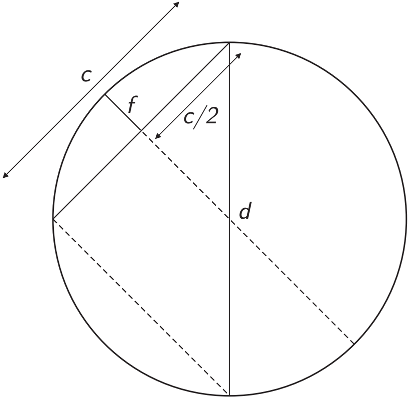


# Seki i el càlcul de $\pi$

- Per calcular els perímetres, utilitza les relacions entre costat $c$, fletxa $f$ i diàmetre $d$ del cercle.

$$f(d-f)=\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

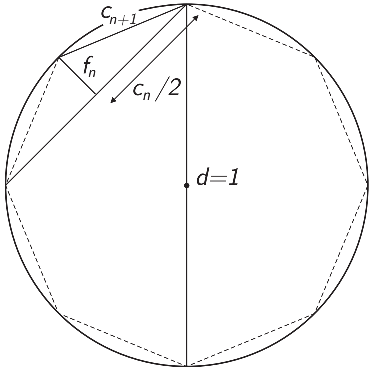
$$\frac{d-\sqrt{d^2-c^2}}{2}=f$$



# Seki i el càlcul de $\pi$. Successió de perímetres

Per a cada $2^{n+1}$-polígon presenta $f_n$, $c_n/2$, $c_{n+1}$ i $2^{n+1}c_{n+1}$, $1 \leq n \leq 16$.

| | |
|---|---|
| **8** | $2^{2+1}$ |
| 0.1464466094067262378 | $f_2$ |
| 0.3535533905932737622 | $c_2/2$ |
| 0.3826834323650897717 | $c_3$ |
| **3.0614674589207181738** | $2^3 \cdot c_3$ |
| **32768** | $2^{14+1}$ |
| 0.0000000091917853531 | $f_{14}$ |
| 0.0000958737986553517 | $c_{14}/2$ |
| 0.0000958737990959773 | $c_{15}$ |
| **3.1415926487769856708** | $2^{15} \cdot c_{15}$ |
| **65536** | $2^{15+1}$ |
| **3.1415926523865913571** | $2^{16} \cdot c_{16}$ |
| **131072** | $2^{16+1}$ |
| **3.1415926532889927759** | $2^{17} \cdot c_{17}$ |




$$\frac{d - \sqrt{d^2 - c_n^2}}{2} = f_n$$

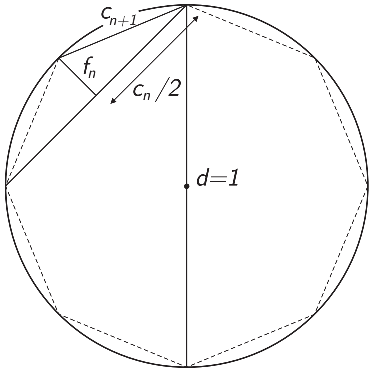
$$f_n(d - f_n) = (c_n/2)^2$$

$$\sqrt{f_n^2 + (c_n/2)^2} = c_{n+1}$$

# Seki i el càlcul de $\pi$. Successió de perímetres

Per a cada $2^{n+1}$-polígon presenta $f_n$, $c_n/2$, $c_{n+1}$ i $2^{n+1}c_{n+1}$, $1 \leq n \leq 16$.

| | |
|---|---|
| **8** | $2^{2+1}$ |
| 0.14644660940672 62378 | $f_2$ |
| 0.35355339059327 37622 | $c_2/2$ |
| 0.38268343236508 97717 | $c_3$ |
| **3.06146745892071 81738** | $2^3 \cdot c_3$ |
| **32768** | $2^{14+1}$ |
| 0.00000000919178 53531 | $f_{14}$ |
| 0.00009587379865 53517 | $c_{14}/2$ |
| 0.00009587379909 59773 | $c_{15}$ |
| **3.14159264877698 56708** | $2^{15} \cdot c_{15}$ |
| **65536** | $2^{15+1}$ |
| **3.14159265238659 13571** | $2^{16} \cdot c_{16}$ |
| **131072** | $2^{16+1}$ |
| **3.14159265328899 27759** | $2^{17} \cdot c_{17}$ |




$$c_1 = 1$$

$$c_{n+1}^2 = \frac{1-\sqrt{1-c_n^2}}{2}$$

## Seki i el càlcul de $\pi$. *zōyakujutsu*

Obté una aproximació més forta a partir de $s_{15}$, $s_{16}$ i $s_{17}$, on $s_n$ és el $2^n$-polígon:

$$\pi = s_{16} + \frac{(s_{16} - s_{15}) \cdot (s_{17} - s_{16})}{(s_{16} - s_{15}) - (s_{17} - s_{16})} = 3.14159265359^{89} \text{ “lleugerament inferior”}.$$

(Si es continua amb el càlcul dóna 3.141592653589793238, tots bons)

# Seki i el càlcul de $\pi$. *zōyakujutsu*

Obté una aproximació més forta a partir de $s_{15}$, $s_{16}$ i $s_{17}$, on $s_n$ és el $2^n$-polígon:

$$\pi = s_{16} + \frac{(s_{16}-s_{15})\cdot(s_{17}-s_{16})}{(s_{16}-s_{15})-(s_{17}-s_{16})} = 3.14159265359\overset{89}{\phantom{0}} \text{ “lleugerament inferior”}.$$

(Si es continua amb el càlcul dóna 3.141592653589793238, tots bons)

Interpretació mitjançant el *zōyakujutsu*

- Es considera la successió de diferències, $s_{16}-s_{15},\ s_{17}-s_{16},\ \ldots,\ s_{n+1}-s_n,\ \ldots$
- S'estima que $\dfrac{s_{n+1}-s_n}{s_n-s_{n-1}}$ convergeix.
- Es pren $r = \dfrac{s_{17}-s_{16}}{s_{16}-s_{15}}$ com una aproximació del límit.
- Assignant a la successió $s_{n+1}-s_n$ un comportament de progressió geomètrica de raó $r$ i, en ser $\pi$ el perímetre de la circumferència,

$$\sum_{n=16}^{\infty}(s_{n+1}-s_n) = \pi - s_{16} = \frac{s_{17}-s_{16}}{1-\frac{s_{17}-s_{16}}{s_{16}-s_{15}}} \Longrightarrow \pi = s_{16} + \frac{(s_{16}-s_{15})\cdot(s_{17}-s_{16})}{(s_{16}-s_{15})-(s_{17}-s_{16})}$$

## Aproximació de $\pi$ mitjançant fraccions racionals

| 周率 | 径率 | 周数 |
|---|---|---|
| 三 | 一 | 三整 |
| 七 | 二 | 三五整 |
| 一十 | 三 | 三三三三三三三三三三三三強 |
| 一十三 | 四 | 三二五整 |
| 一十六 | 五 | 三二整 |
| 一十九 | 六 | 三一六六六六六六六七弱 |
| 二十二 | 七 | 三一四二八五七一四三弱 |
| 二十五 | 八 | 三一二五整 |
| 二十九 | 九 | 三二二二二二二二二二二強 |
| 三十二 | 十 | 三二整 |
| 三十五 | 十一 | 三一八一八一八一八二弱 |
| 三十八 | 十二 | 三一六六六六六六六七弱 |
| 四十一 | 十三 | 三一五三八四六一五四弱 |
| 四十四 | 十四 | 三一四二八五七一四三弱 |
| 四十七 | 十五 | 三一三三三三三三三三強 |
| 五十一 | 十六 | 三一八七五整 |
| 五十四 | 十七 | 三一七六四七〇五八八強 |

# Seki i el càlcul de $\pi$. *reiyakujutsu*

- En el *Katsuyō Sampō* s'interessa en trobar una fracció que aproximi el nombre $\pi$.
- Utilitza el *reiyakujutsu*, (mètode de supressió dels petits decimals). Parteix de $s = 3.1415926539$ i construeix la successió de fraccions $p_n/q_n$

$$p_0 = 3, \;\; q_0 = 1$$

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + 4 \\ q_{n+1} = q_n + 1, \end{cases} \quad \text{si } \frac{p_n}{q_n} < s$$

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + 3 \\ q_{n+1} = q_n + 1, \end{cases} \quad \text{si } \frac{p_n}{q_n} > s$$

$$\begin{array}{ccccc} \frac{3}{1} & \frac{7}{2} & \frac{10}{3} & \frac{13}{4} & \frac{16}{5} \\ \frac{19}{6} & \frac{22}{7} & \frac{25}{8} & \frac{29}{9} & \frac{32}{10} \\ \frac{35}{11} & \frac{38}{12} & \frac{41}{13} & \frac{44}{14} & \frac{47}{15} \\ & \cdots & & \cdots & \\ \frac{343}{109} & \frac{346}{110} & \frac{349}{111} & \frac{352}{112} & \boxed{\frac{355}{113}} \end{array}$$

Obtingut 12 segles abans a la Xina

# Seki i el càlcul de $\pi$. *reiyakujutsu*

- En el *Katsuyō Sampō* s'interessa en trobar una fracció que aproximi el nombre $\pi$.
- Utilitza el *reiyakujutsu*, (mètode de supressió dels petits decimals). Parteix de $s = 3.1415926539$ i construeix la successió de fraccions $p_n/q_n$

$$p_0 = 3, \;\; q_0 = 1$$

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + 4 \\ q_{n+1} = q_n + 1, \end{cases} \quad \text{si } \frac{p_n}{q_n} < s$$

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + 3 \\ q_{n+1} = q_n + 1, \end{cases} \quad \text{si } \frac{p_n}{q_n} > s$$

$$\frac{3}{1} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{10}{3} \quad \frac{13}{4} \quad \frac{16}{5}$$

$$\frac{19}{6} \quad \frac{22}{7} \quad \frac{25}{8} \quad \frac{29}{9} \quad \frac{32}{10}$$

$$\frac{35}{11} \quad \frac{38}{12} \quad \frac{41}{13} \quad \frac{44}{14} \quad \frac{47}{15}$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$\frac{343}{109} \quad \frac{346}{110} \quad \frac{349}{111} \quad \frac{352}{112} \quad \boxed{\frac{355}{113}}$$

Obtingut 12 segles abans a la Xina

TAKEBE assolirà la fracció $\dfrac{5419351}{1725033}$, mitjançant l'algoritme d'EUCLIDES en dotze etapes, ( en el *Taisei Sankei*). Proporciona 3.14159265358981538 32...

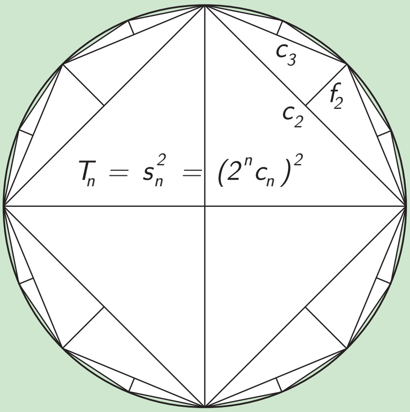
# Takebe i el càlcul de $\pi$

- En el *Taisei Sankei* i el *Tetsujutsu Sankei* presenta el valor de $\pi$ a partir d'una millora del *zōyakujutsu*.

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419712^{69}$$

# Takebe i el càlcul de $\pi$

- En el *Taisei Sankei* i el *Tetsujutsu Sankei* presenta el valor de $\pi$ a partir d'una millora del *zōyakujutsu*.
- Utilitza els quadrats dels perímetres $T_n = s_n^2$, dels $2^n$-polígons inscrits ($2 \le n \le 9$ o $10$). Afirma que això no se li va acudir fins dur a terme una recerca profunda i que li evita extreure l'arrel per passar de $c_n^2$ a $c_n$.

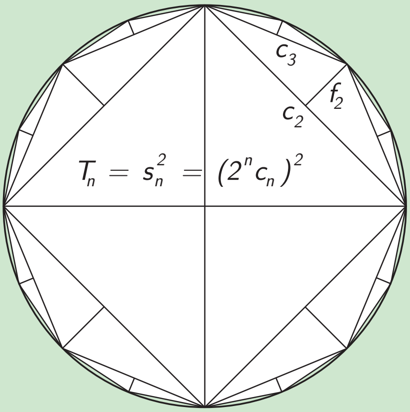



$T_2 = s_2^2,\ T_2 = s_3^2,\ \ldots\ ,\ T_{10} = s_{10}^2.$

$\pi = 3.141592653589793238462643383279502884197 1\overset{69}{2}$

# Takebe i el càlcul de $\pi$

- En el *Taisei Sankei* i el *Tetsujutsu Sankei* presenta el valor de $\pi$ a partir d'una millora del *zōyakujutsu*.
- Utilitza els quadrats dels perímetres $T_n = s_n^2$, dels $2^n$-polígons inscrits $(2 \leq n \leq 9$ o $10)$. Afirma que això no se li va acudir fins dur a terme una recerca profunda i que li evita extreure l'arrel per passar de $c_n^2$ a $c_n$.
- No presenta el procediment per trobar els quadrats dels perímetres, ni els nombres que determinen. Apunta que es troben en un altre tractat sobre les "raons del cercle"




$T_2 = s_2^2$, $T_2 = s_3^2$, ... , $T_{10} = s_{10}^2$.

$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971\overset{69}{2}$$

## Takebe i el càlcul de $\pi$

Procediment:

- Considera la successió de restes de termes consecutius: $T_3 - T_2,\ T_4 - T_3,\ \ldots\ ,\ T_9 - T_8$
- Busca la raó entre cada diferència i l'anterior i observa que
$$\frac{T_n - T_{n-1}}{T_{n-1} - T_{n-2}} \longrightarrow \frac{1}{4}$$
- Troba, pel mètode *zōyaku* (simplificació per divisors incrementals) una **successió $\mathbf{Q_{2,n}}$ de valors que aproximen el quadrat del perímetre**.

# Takebe i el càlcul de $\pi$

Procediment:

- Considera la successió de restes de termes consecutius: $T_3 - T_2,\ T_4 - T_3,\ \dots\ ,\ T_9 - T_8$
- Busca la raó entre cada diferència i l'anterior i observa que
$$\frac{T_n - T_{n-1}}{T_{n-1} - T_{n-2}} \longrightarrow \frac{1}{4}$$
- Troba, pel mètode *zōyaku* (simplificació per divisors incrementals) una **successió $\mathbf{Q_{2,n}}$ de valors que aproximen el quadrat del perímetre**.

$$Q_{2,1} - T_2 = \sum_{n=3}^{\infty}(T_n - T_{n-1}) = \frac{T_3 - T_2}{1 - \frac{1}{4}}$$
$$Q_{2,2} - T_3 = \sum_{n=4}^{\infty}(T_n - T_{n-1}) = \frac{T_4 - T_3}{1 - \frac{1}{4}}$$
$$\dots \qquad \dots$$
$$Q_{2,7} - T_8 = \sum_{n=9}^{\infty}(T_n - T_{n-1}) = \frac{T_9 - T_8}{1 - \frac{1}{4}}$$

---

$$\sqrt{\mathbf{Q_{2,n}}}$$
$$Q_{2,1} = T_3 + \tfrac{1}{3}(T_3 - T_2) \longrightarrow 3.13530073\dots$$
$$Q_{2,2} = T_4 + \tfrac{1}{3}(T_4 - T_3) \longrightarrow 3.14118323\dots$$
$$Q_{2,3} = T_5 + \tfrac{1}{3}(T_5 - T_4) \longrightarrow 3.14156680\dots$$
$$\dots \qquad \dots$$
$$Q_{2,6} = T_8 + \tfrac{1}{3}(T_8 - T_7) \longrightarrow 3.14159264\dots$$
$$Q_{2,7} = T_9 + \tfrac{1}{3}(T_9 - T_8) \longrightarrow 3.14159265\dots$$

# Takebe i el càlcul de $\pi$

- Considera: $Q_{2,2} - Q_{2,1},\ Q_{2,3} - Q_{2,2},\ \ldots\ , Q_{2,7} - Q_{2,6}$
- Observa que: $\dfrac{Q_{2,n} - Q_{2,n-1}}{Q_{2,n-1} - Q_{2,n-2}} \longrightarrow \dfrac{1}{4^2}$

# Takebe i el càlcul de $\pi$

- Considera: $Q_{2,2} - Q_{2,1},\ Q_{2,3} - Q_{2,2},\ \dots\ , Q_{2,7} - Q_{2,6}$
- Observa que: $\dfrac{Q_{2,n} - Q_{2,n-1}}{Q_{2,n-1} - Q_{2,n-2}} \longrightarrow \dfrac{1}{4^2}$
- Obté: $Q_{3,n} = Q_{2,n+1} + \dfrac{1}{4^2 - 1}(Q_{2,n+1} - Q_{2,n})$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $T_2$ | $T_3$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $T_9$ |
| $Q_{2,1}$ | $Q_{2,2}$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $Q_{2,7}$ | |
| $Q_{3,1}$ | $Q_{3,2}$ | $\cdots$ | $Q_{3,6}$ | | |

# Takebe i el càlcul de $\pi$

- Considera: $Q_{2,2} - Q_{2,1},\ Q_{2,3} - Q_{2,2},\ \dots\ , Q_{2,7} - Q_{2,6}$
- Observa que: $\dfrac{Q_{2,n} - Q_{2,n-1}}{Q_{2,n-1} - Q_{2,n-2}} \longrightarrow \dfrac{1}{4^2}$
- Obté: $Q_{3,n} = Q_{2,n+1} + \dfrac{1}{4^2-1}(Q_{2,n+1} - Q_{2,n})$

- Reitera i obté: $\dfrac{Q_{i,n} - Q_{i,n-1}}{Q_{i,n-1} - Q_{i,n-2}} \longrightarrow \dfrac{1}{4^i}$

$$Q_{i+1,n} = Q_{i,n+1} + \frac{1}{4^i-1}(Q_{i,n+1} - Q_{i,n})$$

| $T_2$ | $T_3$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $T_9$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $Q_{2,1}$ | $Q_{2,2}$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $Q_{2,7}$ | |
| $Q_{3,1}$ | $Q_{3,2}$ | $\cdots$ | $Q_{3,6}$ | | |
| $\vdots$ | | $\iddots$ | | | |
| $Q_{7,1}$ | $Q_{7,2}$ | | | | |
| $Q_{8,1}$ | | | | | |

## Takebe i el càlcul de $\pi$

- Considera: $Q_{2,2}-Q_{2,1},\ Q_{2,3}-Q_{2,2},\ \dots\ ,Q_{2,7}-Q_{2,6}$
- Observa que: $\dfrac{Q_{2,n}-Q_{2,n-1}}{Q_{2,n-1}-Q_{2,n-2}} \longrightarrow \dfrac{1}{4^2}$
- Obté: $Q_{3,n}=Q_{2,n+1}+\dfrac{1}{4^2-1}(Q_{2,n+1}-Q_{2,n})$

- Reitera i obté: $\dfrac{Q_{i,n}-Q_{i,n-1}}{Q_{i,n-1}-Q_{i,n-2}} \longrightarrow \dfrac{1}{4^i}$

$$Q_{i+1,n}=Q_{i,n+1}+\frac{1}{4^i-1}(Q_{i,n+1}-Q_{i,n})$$

$$\begin{array}{cccccc}
T_2 & T_3 & \cdots & \cdots & \cdots & T_9 \\
Q_{2,1} & Q_{2,2} & \cdots & \cdots & Q_{2,7} & \\
Q_{3,1} & Q_{3,2} & \cdots & Q_{3,6} & & \\
\vdots & & \iddots & & & \\
Q_{7,1} & Q_{7,2} & & & & \\
Q_{8,1} & & & & &
\end{array}$$

Finalment, HORIUCHI diu que obté $\pi$ amb 24 decimals:
$T_2,\dots,T_9 \Longrightarrow \pi=\sqrt{Q_{8,1}}=3.14159265358979323846264338327$ (29 amb DERIVE)

# Takebe i el càlcul de $\pi$

- Considera: $Q_{2,2} - Q_{2,1},\ Q_{2,3} - Q_{2,2},\ \ldots\ , Q_{2,7} - Q_{2,6}$
- Observa que: $\dfrac{Q_{2,n} - Q_{2,n-1}}{Q_{2,n-1} - Q_{2,n-2}} \longrightarrow \dfrac{1}{4^2}$
- Obté: $Q_{3,n} = Q_{2,n+1} + \dfrac{1}{4^2 - 1}(Q_{2,n+1} - Q_{2,n})$

- Reitera i obté: $\dfrac{Q_{i,n} - Q_{i,n-1}}{Q_{i,n-1} - Q_{i,n-2}} \longrightarrow \dfrac{1}{4^i}$

$$Q_{i+1,n} = Q_{i,n+1} + \frac{1}{4^i - 1}(Q_{i,n+1} - Q_{i,n})$$

$$\begin{array}{cccccc}
T_2 & T_3 & \cdots & \cdots & \cdots & T_9 \\
Q_{2,1} & Q_{2,2} & \cdots & \cdots & Q_{2,7} & \\
Q_{3,1} & Q_{3,2} & \cdots & Q_{3,6} & & \\
\vdots & & \iddots & & & \\
Q_{7,1} & Q_{7,2} & & & & \\
Q_{8,1} & & & & &
\end{array}$$

Finalment, Horiuchi diu que obté $\pi$ amb 24 decimals:

$T_2, \ldots, T_9 \Longrightarrow \pi = \sqrt{Q_{8,1}} = 3.14159265358979323846264338327$ (29 amb DERIVE)

$T_2, \ldots, T_{10} \Longrightarrow \pi = \sqrt{Q_{9,1}} = 3.14159265358979323846264338327950288419712$ (35)

# Takebe i el càlcul de $\pi$

- Considera: $Q_{2,2} - Q_{2,1},\ Q_{2,3} - Q_{2,2},\ \dots\ , Q_{2,7} - Q_{2,6}$
- Observa que: $\dfrac{Q_{2,n} - Q_{2,n-1}}{Q_{2,n-1} - Q_{2,n-2}} \longrightarrow \dfrac{1}{4^2}$
- Obté: $Q_{3,n} = Q_{2,n+1} + \dfrac{1}{4^2-1}(Q_{2,n+1} - Q_{2,n})$

- Reitera i obté: $\dfrac{Q_{i,n} - Q_{i,n-1}}{Q_{i,n-1} - Q_{i,n-2}} \longrightarrow \dfrac{1}{4^i}$

$$Q_{i+1,n} = Q_{i,n+1} + \frac{1}{4^i-1}(Q_{i,n+1} - Q_{i,n})$$

$$\begin{array}{cccccc}
T_2 & T_3 & \cdots & \cdots & \cdots & T_9 \\
Q_{2,1} & Q_{2,2} & \cdots & \cdots & Q_{2,7} & \\
Q_{3,1} & Q_{3,2} & \cdots & Q_{3,6} & & \\
\vdots & & \iddots & & & \\
Q_{7,1} & Q_{7,2} & & & & \\
Q_{8,1} & & & & &
\end{array}$$

Finalment, HORIUCHI diu que obté $\pi$ amb 24 decimals:

$T_2, \dots, T_9 \Longrightarrow \pi = \sqrt{Q_{8,1}} = 3.14159265358979323846264338327$ (29 amb DERIVE)

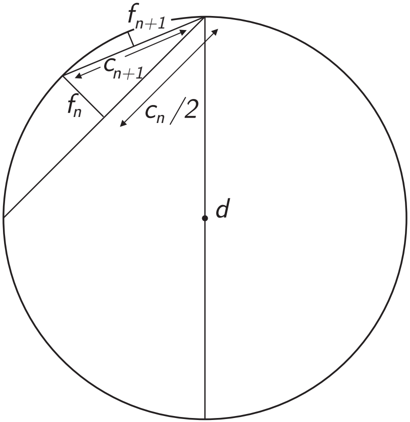
$T_2, \dots, T_{10} \Longrightarrow \pi = \sqrt{Q_{9,1}} = 3.14159265358979323846264338327950288419712$ (35)

$T_2, \dots, T_{11} \Longrightarrow \pi = \sqrt{Q_{10,1}} = 3.1415926535897932384626433832795028841971693$ (43)

# Longitud de l'arc. Apunt

Una de les estratègies de TAKEBE per trobar la longitud de l'arc parteix de la idea d'obtenir una sèrie a partir de l'extracció d'arrels de les succesives equacions amb coeficients literals

$$\boxed{-f_n d + 4dx - 4x^2 = 0}\text{, en què } x = f_{n+1}$$




---

Observem que,

$$f_{n+1}d = c_{n+2}^2 = \left(\frac{c_{n+1}}{2}\right)^2 + f_{n+1}^2 = \frac{(f_n d)^2}{4} + f_{n+1}^2$$

# Longitud de l'arc. Apunt

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \overbrace{f_0 d}^{X_0} + \overbrace{\frac{2^2}{3\cdot 4}\,\frac{f_0}{d}X_0}^{X_1} + \overbrace{\frac{4^2}{5\cdot 6}\,\frac{f_0}{d}X_1}^{X_2} + \overbrace{\frac{6^2}{7\cdot 8}\,\frac{f_0}{d}X_2}^{X_3} + \cdots$$

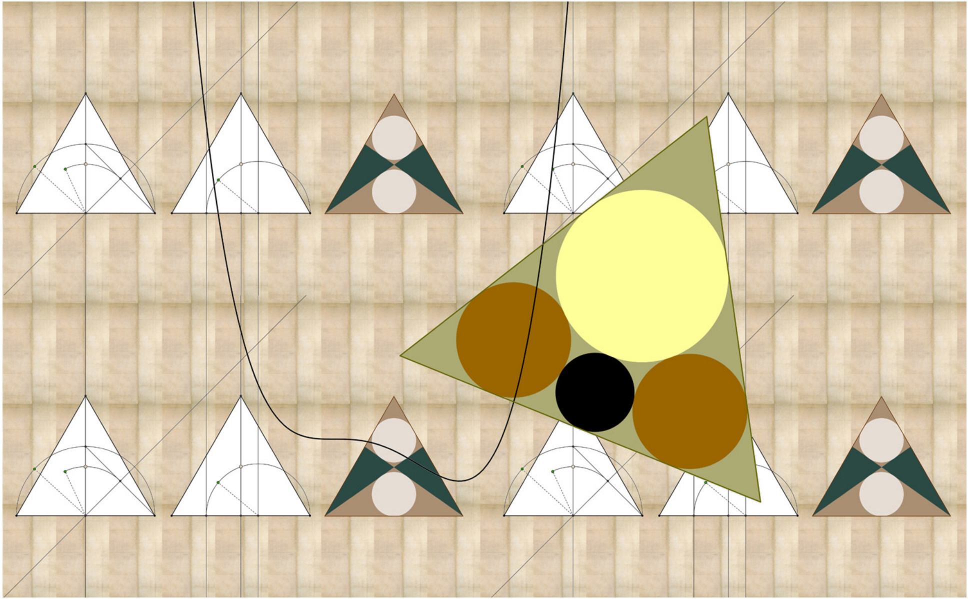
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = f_0 d\left(1 + \frac{2^2}{3\cdot 4}\,\frac{f_0}{d} + \frac{2^2\cdot 4^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left(\frac{f_0}{d}\right)^2 + \frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\left(\frac{f_0}{d}\right)^3 + \cdots\right)$$

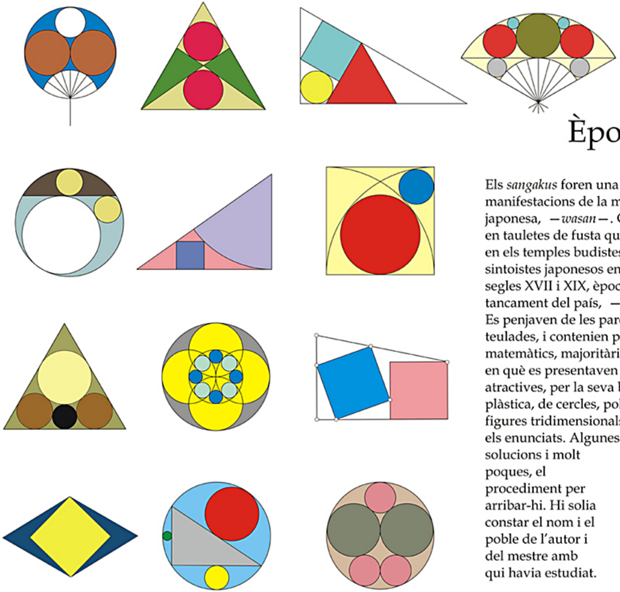
Tenint en compte que $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = d^2\left(\arcsin\sqrt{\frac{f_0}{d}}\right)^2$, si fem $t = \frac{f_0}{d}$ resulta

$$\left(\arcsin\sqrt{t}\right)^2 = t + \frac{2^2}{3\cdot 4}\,t^2 + \frac{2^2\cdot 4^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\,t^3 + \frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\,t^4 + \cdots$$

Resultat d'EULER en el *Journ. lit. d'Allemange, de Suisse et du Nord*, 2:1, 1743, per a $x = \sqrt{t}$ en el decurs del seu càlcul de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. $\left[\frac{\pi^3}{48}, \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right]$

$$\boxed{\frac{(\arcsin x)^2}{2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3\cdot 4}\,x^4 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 6}\,x^6 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 8}\,x^8 + \cdots}$$





# Sangakus
## 算額
## Època d'Edo (1600-1868)

Els *sangakus* foren una de les manifestacions de la matemàtica japonesa, —*wasan*—. Consistien en tauletes de fusta que s'oferien en els temples budistes i santuaris sintoistes japonesos entre els segles XVII i XIX, època de tancament del país, —*sakoku*—.

Es penjaven de les parets i ràfecs de les teulades, i contenien problemes matemàtics, majoritàriament geomètrics, en què es presentaven composicions atractives, per la seva bellesa formal i plàstica, de cercles, polígons, elipses i figures tridimensionals juntament amb els enunciats. Algunes contenien les solucions i molt poques, el procediment per arribar-hi. Hi solia constar el nom i el poble de l'autor i del mestre amb qui havia estudiat.

## Textos sobre *Sangakus*


- BOURSIN, Didier et al. [2005]. «Spécial Japon». *Tangente*, núm 107.
- FUKAGAWA, H. i PEDOE, D. [1989]. *Japanese Temple Geometry. Problems*. The Charles Babage Research Centre, Winnipeg, Canada.
- FUKAGAWA, H. i ROTHMAN, T. [1998]. «Japanese Temple Geometry». *Scientific American*, may 1998. [Traducció francesa: «Géométrie et religion au Japon». *Pour la Science*, núm 249.]
- FUKAGAWA, H. i ROTHMAN, T. [2008]. *Sacred Mathematics. Japanese Temple Geometry*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- HUVENT, Géry [2008]. *Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises*. Dunod, Paris.
- NOLLA, Ramon [2011]. «Sangakus : contemplació i raó». *Noubiaix*, 30, 43-61.

# Bibliografia

## Textos xinesos i japonesos anteriors al 1860

- CHEMLA K. i SHUCHUN G. [2004]. *Les Neuf chapitres. Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Dunod, Paris.
- YOSHIDA, Mitsuyoshi [1641 (1627)]. *Jinkōki*. Edició a càrrec del Wasan Institut, Tokyo, 2000.
- SEKI, Takakazu [1974]. *Takakazu Seki's Collected Works edited with Explanations*. Hirayama A., Shimodaira K. i Hirose H. editors. Osaka Kyōiku Tosho, Tokyo.
- TAKEBE, Katahiro [1722]. *Tetsujutsu Sankei*. Traducció i comentaris de Morimoto Mitsuo i Ogawa Tsukane, ≪Mathematical Treatise on the Technique of Linkage≫. *SCIAMVS*, 13, 157-286. Kyoto, 2012.

# Bibliografia

## Textos sobre historia de la matemàtica xinesa i japonesa


- HORIUCHI, Annick [1994]. *Les mathématiques japonaises a l'époque d'Edo*. Librairie philosophique J. Vrin, Paris.
- LI YAN, DU SHIRAN [1963]. *Zhongguo gudai shuxue jianshi*. Hong Kong. [Traducció anglesa a càrrec de John N. Crossley i Anthony W.-C. Lun, *Chinese Mathematics. A Concise History*. Oxford University Press, Oxford, 1987].
- MARTZLOFF, Jean-Claude [1987]. *Histoire des mathématiques chinoises*. Masson, Paris.
- MIKAMI, Y. [1913]. *The Development of Mathematics in China and Japan*. Chelsea Publishing Co., New York.
- PLA, Josep [2009]. *Liu Hui. Nueve capítulos de la matemática china*. NIVOLA libros y ediciones, Madrid.
- SMITH, D.E. i MIKAMI, Y. [1914]. *A History of Japanese Mathematics*. Open Court Pub. Co., Chicago. [Reeditat per Dover, New York, 2004]

## Enllaços externs referents a *sangakus*

- `http://www.wasan.jp/index.html`
- `http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Sangaku.shtml`
- `http://www.xtec.cat/~rnolla/Sangaku/Sangaku2/indexBlanc.htm`