

SOLSTICE

JULY	JUNE
AUG	MAY
SEPT	APRIL
OCT	MAR
NOV	FEB
DEC	JAN

SOLSTICE

PROJECTE DE CONSTRUCCIÓ D'UN
RELLOTGE DE SOL

Anna Güel I Bara

Abril 2008
IES Pons d'Icart

STAND ON DATE

I la teva ombra marcarà el pas del temps

ÍNDEX

1. Introducció	3
2. Definicions prèvies	4
3. Història	8
4. Tipus de rellotges de sol	11
4.1 Equatorial	11
4.2 Horitzontal	12
4.3 Vertical	12
4.4 De pastor	13
4.5 Analemàtic	13
5. Models Terra-Sol	15
6. Construcció del rellotge de sol portàtil	17
7. Projecte de construcció per l'institut	20
7.1 Funcionament	21
7.2 Càlculs	23
7.3 Dimensions	27
8. Conclusions	30
9. Annex	32
9.1 Canvi d'eixos	32
9.2 Equació del temps	36
9.3 Programa de construcció del rellotge de sol	37
9.4 Fotografies de rellotges	39
10. Bibliografia	41
11. Agraïments	43

1. Introducció

A primer de batxillerat vaig haver de triar un tema pel treball de recerca. Jo, com sempre, tenia dubtes a l'hora d'escollir. Però una cosa sí que la tenia clara, volia que el meu treball estigués dins l'àmbit de ciències. Així doncs, vaig dirigir-me al Ramon Nolla, professor de matemàtiques per preguntar-li si el departament tenia alguns temes per triar. Vaig llegir-me la llista i en vaig trobar dos o tres que m'atreien, al final em vaig decantar per *Construcció d'un rellotge de sol per l'institut*, tenia curiositat per saber com funcionaven, ja que quan era petita i anava pels pobles, sempre veia rellotges de sol i en llegia l'hora, però mai indicaven l'hora del meu. Si mai heu tingut la mateixa curiositat, seguïu llegint i descobrireu el perquè.

Aquest treball consta de dues parts. Una part teòrica, on he buscat informació a internet i consultat llibres, i finalment l'he adaptat en la redacció d'aquest projecte. I una part pràctica que a la vegada es pot dividir en dos. En aquesta part he tingut l'ajuda del meu tutor, ja que sola no hagués sigut capaç de sortir-me'n.

La primera pràctica ha sigut la construcció del rellotge de sol portàtil. I la segona, està formada per el projecte de construcció del rellotge de sol de l'institut. El meu tutor i jo vam considerar que el rellotge de sol analemàtic era el més adient, ja que és el tipus de rellotge més dinàmic. Inicialment havíem pensat de fer-ne un de vertical declinant a la paret del pati, però vam creure que el més fàcil i entenedor era l'analemàtic¹.

¹ Si es vol trobar més informació de la construcció dels altres rellotges, es pot visitar la pàgina web http://xtec.cat/cdec/recursos/pdf/protocol_prim/rellotgesol.pdf o consultar el llibre *Relojes de sol* de Gian Carlo Pavanello i Aldo Trincherò, de la Editorial de Vecchi.

2. Definicions prèvies

Analema: corba en forma de vuit. Es construeix segons dues variables: l'equació del temps (eix de les abscisses) i la declinació del Sol (eix de les ordenades).

Arcs resultants dels meridians i els paral·lels:

- **Latitud:** arc de meridià comprès entre el pla de l'Equador i un punt (0° - 90°). Cap al nord és positiu i cap al sud és negatiu.
- **Longitud:** arc de paral·lel comprès entre un meridià inicial i el meridià que té el punt (0° - 180°). Cap a l'est és positiu i cap a l'oest és negatiu. També es pot expressar en hores (0h - 12h) amb el mateix conveni de signes que els graus. Paral·lel a l'angle horari.
- **Meridià de referència:** Actualment el meridià zero de referència oficial és el de Greenwich.

Coordenades equatorials locals d'un astre o punt A:

- **Declinació:** arc de meridià comprès entre el pla de l'Equador i l'astre [-90° , 90°]. Positiu cap al nord i negatiu cap al sud.
- **Angle horari:** arc del pla de l'Equador comprès entre el peu de la declinació d'A i el meridià que conté el zenit [-180° , 180°]. Positiu cap a l'est i negatiu cap a l'oest.

Coordenades horitzontals d'un astre o punt A:

- **Altura:** arc de cercle màxim comprès entre el pla de l'horitzó i l'astre [-90° , 90°]. Positiu cap al zenit i negatiu cap al nadir.
- **Azimut:** arc de l'horitzó comprès entre el peu de l'altura d'A i el punt sud de l'horitzó [0° , 360°]. Positiu cap a l'oest i negatiu cap a l'est.

Declinació: aquest arc varia segons el dia de l'any. Al solstici d'estiu és de $23^{\circ} 27'$ ($23,45^{\circ}$) i al d'hivern de $-23^{\circ} 27'$. Hi ha dos dies a l'any, els equinoccis de primavera i tardor, en els quals δ és 0° .

Dia sideral: temps transcorregut entre dos passos consecutius d'una estrella (no el Sol) per el meridià del lloc. Temps que tarda la Terra en donar una volta al seu eix.

Dia solar verdader: interval de temps entre dos passos consecutius del Sol pel meridià del lloc.

Dia solar mitjà: període de temps transcorregut entre dues culminacions (passos pel meridià del lloc) successives del sol equatorial mitjà. La diferència del temps mitjà local i el temps verdader és l'equació del temps.

Eclíptica: trajectòria aparent que descriu el Sol al llarg d'un any en el firmament dels estels fixos.

Equador celest: circumferència de radi arbitrari, la qual és la projecció de l'Equador terrestre.

Equinoccis: punts de l'esfera celest en els quals l'equador celest talla l'eclíptica. Durant els equinoccis de primavera i de tardor la durada del dia és la mateixa que la de la nit.

Esfera celest: esfera ideal de radi arbitrari que té com a centre l'observador.

Estilet: instrument que forma part del rellotge de sol, la seva funció és projectar l'ombra del Sol sobre el quadrant solar.

Horitzó: intersecció del pla de l'horitzó i l'esfera celest.

Meridià: cercle màxim que passa per un punt de la Terra i pels dos pols.

Moviment real de la Terra: La Terra realitza dos moviments: el de rotació i el de translació.

En el de rotació, la Terra gira sobre el seu eix terrestre durant 23 hores 56 minuts i 4,091 segons, no les 24 hores exactes oficials. Això és així perquè la Terra també gira al voltant del Sol (moviment de translació). La diferència d'aquests 4 minuts aproximadament entre el dia solar i dia sideral es deu a que el primer es refereix al Sol que es desplaça en sentit retrògrad respecte estrelles.

En el de translació la Terra gira, amb el seu eix inclinat de manera fixa, al voltant de Sol durant 365,25 dies (exactament 365 dies 6 hores i 9 minuts) tot descrivint una òrbita el·líptica. Cada quatre anys, aquestes 6 hores es tradueixen en un dia, que s'afegeix al febrer i constitueix l'any bixest. La velocitat en què ho fa no és constant, sinó que depèn de la distància en què estigui del Sol.

Nadir: punt de l'esfera celest oposat al zenit.

Paral·lel: cercle que passa per un punt de la Terra i és paral·lel a l'Equador. Aquest ja no és un cercle màxim, perquè no té el centre en el centre de la Terra.

Pla de l'equador: pla ideal situat sobre l'Equador.

Pla de l'horitzó: pla ideal tangent a l'esfera en el punt de l'observador.

Quadrant solar: rellotge de sol.

Sol verdader: també anomenat sol aparent. La seva posició es calcula mitjançant l'equació del temps i la declinació del Sol, el gràfic resultant és

l'analema. La velocitat del Sol no és constant, ja que depèn de la distància que hi ha entre aquest i la Terra.

Sol equatorial mitjà: punt de l'esfera celest que es mou per l'equador celest de manera uniforme, de manera que el temps transcorregut entre dos passos consecutius del Sol mitjà pel meridià del lloc sigui la mitjana de tots els dies solars veritaders en un any.

Sol mitjà: també anomenat sol imaginari. El Sol recorre l'equador celest amb moviment uniforme i constant, de valor igual a la mitja del sol vertader.

Solstici: punts de l'eclíptica en els quals la declinació del Sol arriba al seu valor màxim.

Temps mitjà local: angle del sol mitjà en mesura horària. Dos llocs que tenen la mateixa longitud, tindran el mateix temps mitjà local.

Temps vertader: temps transcorregut des de la culminació inferior fins a qualsevol posició.

Zenit: intersecció de la recta que passa pel centre de la Terra i l'observador amb l'esfera celest.

3. Història

Des de l'antiguitat, el moviment dels astres va ser utilitzat per mesurar el pas del temps. Els cicles de la Lluna van ajudar a fixar uns períodes de temps determinats anomenats: dies, setmanes, mesos, estacions i anys.

Però, com se'ls va acudir de construir un objecte per mesurar el temps amb l'ajut de la posició del sol?

Cal dir que l'explicació següent només és una especulació.

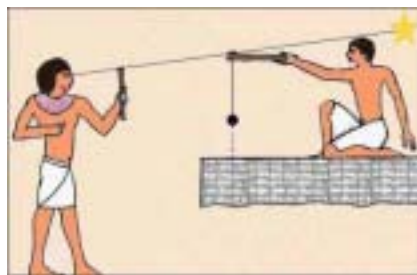
La primera observació que havien de fer era adonar-se de la diferència entre el dia i la nit. Tot seguit, van detectar el fet que les ombres dels arbres s'allargaven i s'escurçaven depenent del moment del dia. Tot això aplicat als seus interessos: la caça, la millor època per plantar els cereals (abans guiats per les llunes)... Així van descobrir les temporades més fredes i les més càlides.

Quan van adonar-se que el recorregut diari del Sol es podia dividir en diferents parts horàries, la curiositat de l'home va fer que el seu cap anés donant voltes i més voltes fins a arribar a construir el primer rellotge de sol, i amb el temps se'n fessin destacables obres d'art.

Els egipcis van ser els primers a dividir el dia en 24 hores i l'any en 365 dies. Segurament per motius religiosos, ja que en egipci l'equivalent a hora era "deure sacerdotal". Dividien la nit en 12 hores iguals, ajudant-se dels *decan* (constel·lacions) que apareixien cada hora.

El rellotge de sol més antic que es conserva data del segle XIV aC, es va construir durant el regnat del faraó Tutmosis III. S'utilitzava en l'agricultura, per conèixer els cicles del riu Nil i aplicar-lo als conreus.

Els sacerdots egipcis utilitzaven els *merkhet*, un petit rellotge de sol mòbil que es basava amb la longitud de les ombres per indicar l'hora.



Representació d'un merkhet

La primera referència literària d'un rellotge de sol és el *Cuadrante de Achaz*, al segle VII aC, descrit a la Bíblia.

Durant els primers segles del cristianisme els rellotges de sol van patir una decadència, que es va superar gràcies a la religió. El segle VI, Sant Benet, fundador de l'orde religiosa dels benedictins, va escriure unes determinades



lleis per les quals s'havien de regir tots els monjos d'Europa. Una d'aquestes lleis dictava que hi havia unes determinades hores del dia, anomenades hores canòniques, destinades a resar. Així van sorgir els rellotges anomenats *de missa* o *d'hores canòniques*, en els quals s'indicaven les hores per resar. Normalment se situaven a les parets meridionals dels monestirs o esglésies.

Sant Benet en un retaule de Jaume Bacó a la catedral de València

Al començament del segle XIV apareixen uns instruments mecànics que mesuren el temps de manera regular. El 1398 s'instal·la un rellotge a la Catedral de Salisbury i el 1400, durant el regnat de Carles II, es col·loca el primer rellotge mecànic amb campanes a l'església de Santa Maria de Sevilla.

Uns rellotges curiosos són els que es construeixen entre els tròpics i l'Equador, com és el cas del rellotge de sol vertical de la fotografia del costat, a l'illa de La Asunción (Veneçuela), ja que han d'estar construïts amb un doble disc horari. El disc que queda al sud s'utilitza des de l'agost fins a l'abril i el que queda al nord, des de l'abril fins l'agost. Dos dies a l'any, a finals d'abril i començament d'agost, es pot llegir l'hora a les dues parts, ja que el Sol passa pel zenit del lloc i es pot llegir l'hora als dos costats.



Rellotge de sol a l'illa La Asunción

4. Tipus de rellotges de sol

Els rellotges de sol estan formats per un estilet (o gnòmon), element que produeix l'ombra, i pel quadrant, superfície on es projecta aquesta ombra.

Com ja he dit abans el quadrant és la superfície on es projecta l'ombra produïda per l'estilet.

N'hi ha de diferents tipus segons la superfície i l'orientació²:

4.1 Equatorial

Són els que representen més clarament la posició de la terra respecte del sol.

Estan formats per un semicercle, que representa l'equador, i per una barra inclinada que fa d'eix terrestre, per tant està perpendicular al semicercle. Les hores es llegeixen gràcies a l'ombra projectada per l'estilet al semicercle.



Rellotge equatorial fabricat a Itàlia durant el Renaixement (segle XVI).

² Se'n poden veure més exemples a l'annex 9.4 (són fotografies fetes per mi).

4.2 Horitzontal



Aquest rellotge es troba sobre una superfície paral·lela al pla de l'horitzó, normalment és una llosa orientada al sud, on se li han marcat les hores. L'estilet, orientat al nord, està formant un angle determinat (ja que ha de ser perpendicular a l'equador, en el nostre cas, Tarragona, és de 41°). Molt utilitzat en places d'esglésies, jardins, parcs...

Rellotge de sol horitzontal elaborat amb el coure del vaixell de l'almirall Nelson. al quadrant hi ha gravada la seva famosa frase: "Anglaterra espera que cada home compleixi amb el seu deure."

4.3 Vertical

És el rellotge de sol que tenim més present. Es troba sobre una superfície vertical, generalment parets. D'aquests rellotges n'hi ha de dos tipus segons l'orientació. Els més comuns segons el primer criteri són els orientats al sud (est - oest), ja que l'estilet (que fa d'eix de la terra), no està desviat cap a cap costat (està orientat nord - sud); l'altre tipus és el vertical declinant, en aquests les hores no estan marcades simètricament, ja que la paret no està orientada exactament al sud, sinó que és l'estilet el que està orientat al nord-sud.



Rellotge de sol vertical



Rellotge de sol vertical declinant

4.4 De pastor

Es creu que es van descobrir el segle II dC.



Aquests van sorgir amb la necessitat de tenir un rellotge mòbil. Estaven construïts per una latitud determinada, ja que mesuren la inclinació del sol. Estan formats per un cilindre on hi ha representats: verticalment, els diferents mesos de l'any, creuant-lo amb línies corbes hi ha les diferents hores i a la part superior hi trobem la data. En aquesta part també hi ha un tap giratori amb un estilet que sobresurt. Quan el gnòmon es posa sobre el dia i orientem el rellotge a ple sol, l'ombra es projecta verticalment al cilindre indicant-ne l'hora.

Rellotge de sol de pastor fet de marfil

4.5 Analemàtic

Aquest rellotge solar està construït sobre el terra i consta d'un gnòmon mòbil vertical, generalment una persona.

L'observador se situa sobre l'eix menor de la el·lipse (el qual està en direcció nord-sud) depenent de la data (dia i mes). L'hora es llegeix gràcies a l'ombra que es projecta del cos de l'observador.



Rellojge analemàtic de l'IES Lorenzo Hervás y Panduro (Cuenca)



Rellojge analemàtic de Sabadell

5. Model s Terra-Sol

En aquest apartat es pot veure l'evolució de les diferents teories Terra-Sol fins arribar a Kepler, ja que aquest científic va formular una llei, la segona, que s'utilitza per calcular l'equació del temps.

Si observem el cel durant la nit podem entendre perfectament el fet que els primers astrònoms haguessin cregut que el centre de l'Univers era la Terra i els astres de la volta celeste giressin al voltant del planeta. Aquest model s'anomenà geocèntric i fou ideat per Plató i astrònoms de l'Acadèmia, com **Aristòtil**. Permetia calcular la posició dels astres amb força precisió. Triomfà fins a principis del segle XV aproximadament, quan **Copèrnic** (1473-1543) publicà el seu nou model, l'heliocèntric, el qual situava el Sol al centre de l'Univers i tots els planetes i els astres giraven, de manera circular, al seu voltant (la Terra inclosa), amb la Lluna com a excepció, aquesta donava voltes a la Terra.

Kepler (1571-1630), enlluernat per les investigacions de Copèrnic, va seguir amb les comprovacions d'aquest, però per contra seva, els resultats no eren els esperats. Així fou quan corregí el model geocèntric, tot publicant les seves tres famoses lleis:

1. Els planetes es mouen per òrbites el·líptiques i el Sol és un dels focus.
2. Els planetes no es mouen uniformement, sinó que el radi-vector que uneix el centre de la Terra amb el Sol escombra àrees iguals en temps iguals.
3. El cub de la distància mitjana d'un planeta al Sol és proporcional al quadrat del seu període.

Amb el descobriment de la teoria gravitacional de Newton es pogueren demostrar les lleis amb mètodes físics.

Gràcies a aquestes lleis i uns quants càlculs, arribem a la conclusió que un dia té aproximadament 24 hores (23 hores 56 minuts) o un any té 365 dies 6 hores 9 minuts. Aquests quatre minuts cada dia o 6 hores cada any s'acumulen durant quatre anys i donen lloc a un dia, el 29 de febrer de l'any bixest o de traspàs.

6. Construcció del rellotge de sol portàtil

Abans de fer el projecte per l'institut, vaig construir un rellotge de sol portàtil per la latitud de Tarragona (aproximadament 41°), per tant aquest rellotge és específic per qualsevol zona amb aquesta latitud. Aquest és el resultat de la combinació de tres tipus de rellotges de sol: horitzontal, vertical i equatorial.

El rellotge té unes dimensions de 220 mm per 534 mm i consta de quatre parts: l'estilet, la part central i dues parts externes.

L'**estilet** és un triangle rectangle amb un angle de 41° de la base (que és la latitud de Tarragona). Això fa determinar la mida de tot el rellotge de sol, ja que la part horitzontal d'aquest (183,3 mm) ha de mesurar exactament igual que la base de l'estilet, i l'altura del triangle (162,5 mm), com la vertical.

La hipotenusa de l'estilet representa l'**eix terrestre**.

La **part central** està formada per un quadrat on hi ha una circumferència inscrita de 220 mm de diàmetre dividida en 24 sectors de 15° cadascun, cada sector representa una hora del dia. L'extensió de les rectes dels sectors fins la seva intersecció amb la prolongació dels dos costats del quadrat on està inscrita la circumferència determina uns punts que fent-los convergir al punt mig de l'extrem superior de les parts vertical i horitzontal ens indiquen les hores.

Aquesta part s'ha de plegar per tal que pugui representar el **pla de l'Equador**, així com també s'ha de doblegar la unió entre les parts externes i la central.

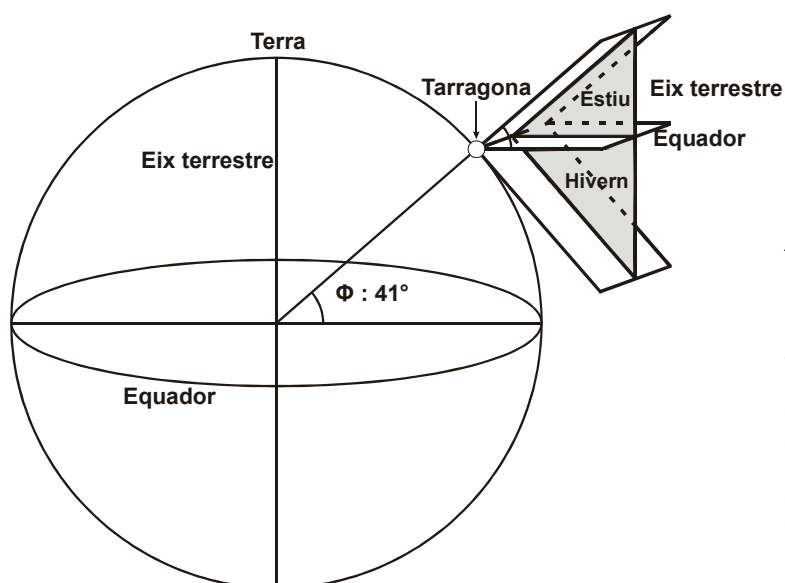
Les **parts externes**, horitzontal (183,3 mm) i vertical (162,5 mm), són dos rectangles de 220 mm de base, l'altura varia en cadascun segons la mesura de l'estilet.

Aquests plans representen el **pla de l'horitzó** i el **pla vertical** de Tarragona. L'hora es llegeix des d'aquestes parts.

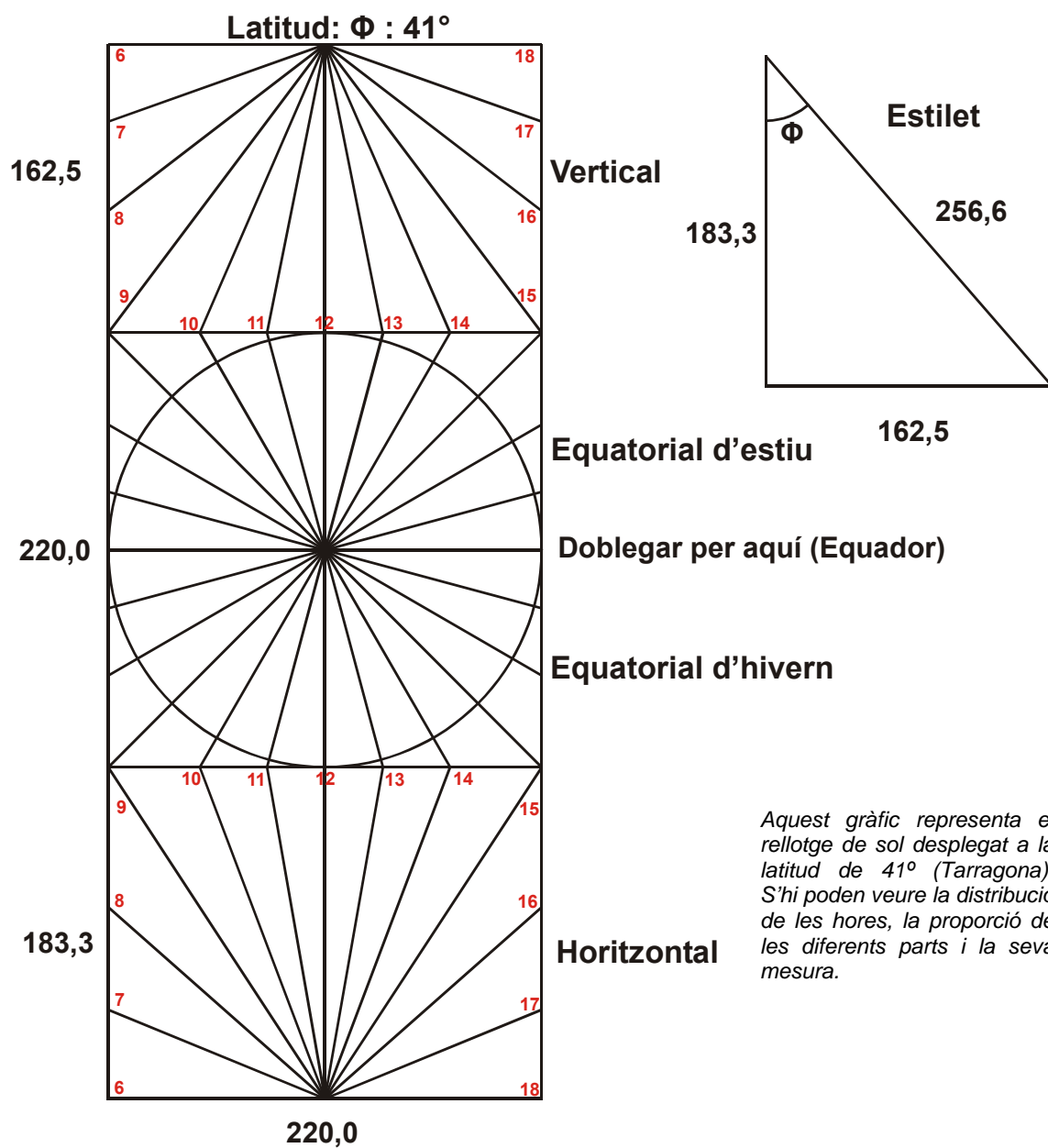
Si dibuixem les hores en els sectors de 15° de l'equatorial, llavors queden determinades les hores en l'horitzontal i el vertical tal com es veu en el dibuix de la pàgina següent.

Segons l'època de l'any haurem de llegir l'hora a una part o a l'altre del rellotge:

- A l'hivern, el recorregut que fa el Sol és més baix (degut a la inclinació de l'eix terrestre), és a dir, forma un angle més petit amb l'Equador, i per tant, l'hora es llegeix a la part horitzontal.
- A l'estiu, com que el curs del Sol és més alt, es llegeix l'hora a la part vertical.



Aquest gràfic mostra la posició del rellotge de sol respecte la Terra. Es veu que l'Equador terrestre i l'Equador del rellotge són paral·lels, així com els dos eixos terrestres. També s'aprecia l'angle recte que formen l'eix i l'Equador. L'angle resultant de la unió de l'horitzó vertical i l'Equador és el mateix que la latitud de Tarragona.



Aquest gràfic representa el rellotge de sol desplegat a la latitud de 41° (Tarragona). S'hi poden veure la distribució de les hores, la proporció de les diferents parts i la seva mesura.

7. Projecte de construcció per l'institut

El rellotge de sol analemàtic del pati de l'institut és el producte d'una sèrie de càlculs matemàtics.

En primer lloc, el 18 de gener de 2008 vaig calcular l'hora solar verdadera a través l'hora oficial (14:30h) i de l'equació del temps³ segons la següent expressió:

hora oficial = hora solar verdadera - equació del temps - longitud geogràfica (est) + 1h (hivern) o 2h (estiu)

Em vaig presentar al pati amb un fil i un pes per construir una plomada, i el rellotge de sol portàtil que havia construït. El material era per comprovar que aplicant un gir de 21° 57' (azimut⁴) a la direcció de l'ombra que indicava la plomada coincidia amb la direcció de l'estilet del rellotge portàtil, d'aquesta manera experimentant amb els dos mètodes, l'error era menys probable. També volia verificar que el meu rellotge funcionava correctament.

Així doncs, el principal mètode consistia en construir una plomada i situar-la de tal manera que l'ombra d'aquest no es vegés tapada per cap altre objecte. Vam esperar l'hora en què ens havíem fixat -14:30h-, i just llavors vam fer la marca de l'ombra de la plomada al terra. Aplicant un gir de 21° 57' (el gir va ser de 22°) a l'ombra, la recta resultant havia d'indicar el sud, així doncs, vam traçar aquesta recta resultant.

Aquests 21° 57' es van obtenir utilitzant les equacions deduïdes a l'annex 9.1:

Sabem que δ és la declinació i que aquell dia mesurava -20,6°, ϕ és la latitud de Tarragona i H és l'angle horari, que a les 13:25 hora solar són 21,3°.

³ L'equació del temps la vaig buscar a la web <http://www.srrb.noaa.gov/highlights/sunrise/azel.html>, ja que el seu càlcul és molt complex.

⁴ Veure definició apartat 2.

%%Substituint a la següent equació n'obtenim l'altura (h)%%

$$\sin h = \cos \delta \cdot \cos H \cdot \cos \phi + \sin \delta \cdot \sin \phi \quad \rightarrow \quad h = 25,18^\circ$$

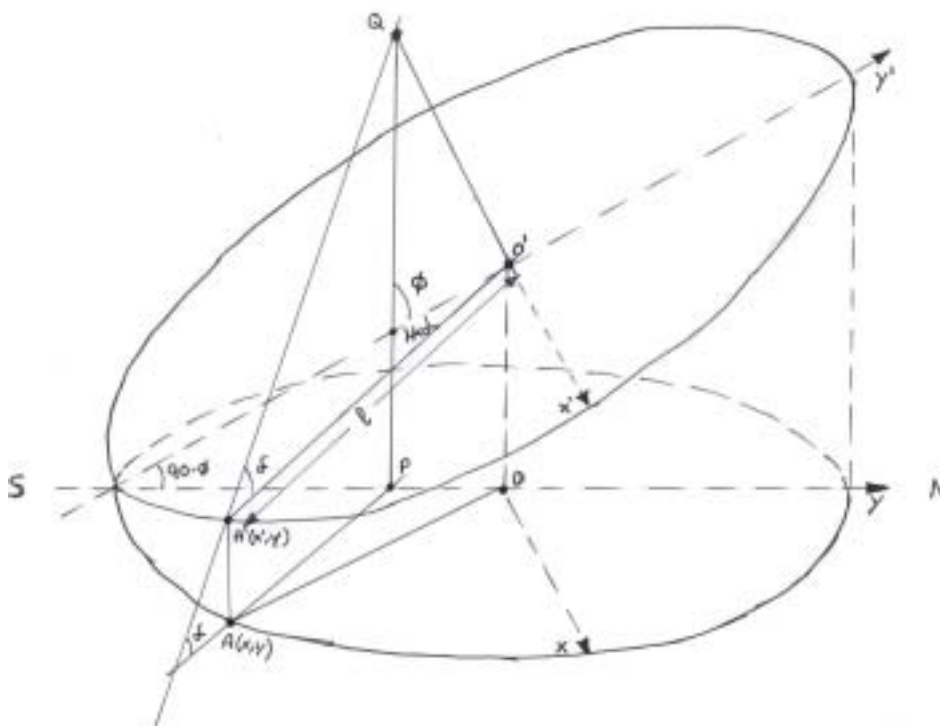
%%Amb l'expressió següent i amb l'altura, trobo l'azimut (a)%%

$$\cos h \cdot \sin a = \cos \delta \cdot \sin H \quad \rightarrow \quad a = 21'08''$$

Per tal de comprovar els resultats vam utilitzar el rellotge de sol portàtil. Abans d'anar a l'institut, vaig fer, com ja he dit abans, els càlculs, i se'm va acudir que podia fer una marca a les 13:25h⁵ al pla de l'horitzó horitzontal del rellotge portàtil, ja que si en aquest moment orientava el rellotge de tal manera que l'ombra de l'estilet arribés fins aquesta marca, l'estilet marcaria el sud.

7.1 Funcionament

Tot seguit es pot veure un gràfic que explica el funcionament d'un rellotge analemàtic i d'on se'n poden deduir unes equacions necessàries pel càlcul del rellotge que dissenyaré.



⁵ Hora solar verdadera (14:30 hora oficial):
 Hora solar verdadera = 14 h 30 min - 10 min 18 seg + 5 min + 1h = 13 h 25 min

El gràfic de la pàgina anterior permet deduir dues expressions necessàries per la construcció del rellotge analemàtic, tal i com es pot veure a l'apartat 7.2:

$$p(x) := [-l \cdot \sin(x), -l \cdot \cos(x) \cdot \sin(\Phi)]$$

$$q(x) := -l \cdot \tan(x) \cdot \cos(\Phi)$$

A més, també ens ensenya el funcionament del rellotge analemàtic.

Si ens posem sobre un punt P de l'eix d'ordenades, els rajos del sol incidiran en un punt Q del nostre cos i aquest projectarà una ombra al terra, la qual arribarà fins a un punt A' del pla de l'Equador que es traduirà en punt A quan es projecti al pla de l'horitzó, ja que ambdós punts es troben al mateix pla determinat per P, Q i \overline{QA} .

Si al llarg de tot el dia la persona es quedés quieta sobre el punt P (el qual és un punt de l'estilet), els diferents punts A del llarg del dia donarien lloc a una el·lipse que contindria les 24 hores del dia, a la vegada aquestes conformarien una circumferència a l'Equador.

La persona, però, s'ha d'anar desplaçant cada mes, o per ser més exactes, cada dia, al llarg de l'eix d'ordenades (N-S) originant els diferents punts P, els quals depenen de la declinació del sol. El punt Q és la intersecció dels rajos del Sol amb l'eix del món, aquest punt depèn de la declinació del Sol: quan és màxima, $23^\circ 27'$ (al voltant del 24 de juny), el punt Q és màxim i es troba per sobre l'Equador, en canvi quan la declinació és mínima, $-23^\circ 27'$ (pels volts de Nadal), el punt Q és mínim i es troba per sota l'Equador. Aquest punt Q serà el que determinarà la posició de la persona sobre l'estilet, és a dir, el punt P.

7.2 Càlculs

El següent pas era calcular els diferents elements que formen el rellotge analemàtic utilitzant el programa de càlcul DERIVE. El programa sencer es troba a l'annex 9.3.

L'**el·lipse** és el resultat dels següents càlculs, on Φ és la latitud de Tarragona.

%%La l determina el radi de l'equador, és a dir, l'eix major de l'el·lipse, el qual fa 2 metres%%

$l:=2$, en metres

%%La primera equació dibuixa un punt A, és a dir, una hora solar, la segona indica que hi haurà disset punts al pla de l'horitzó (tal i com es veu al gràfic següent), els quals distaran 15° entre ells al pla de l'equador, per tant, es veuran disset hores: des de les 4:00 de la matinada fins les 8:00 del vespre%%

$$p(x) := [-l \cdot \sin(x), -l \cdot \cos(x) \cdot \sin(\Phi)]$$

$$w := \text{VECTOR}(p(h), h, -120 \cdot \text{deg}, 120 \cdot \text{deg}, 15 \cdot \text{deg})$$



Tot seguit vaig situar l'**estilet**. Aquest informa del mes on ens hem de posar per tal de llegir l'hora. A continuació es veu el programa que vaig utilitzar.

%%L'epsilon i la l són paràmetres que després s'usen per dibuixar l'estilet%%

$$\epsilon := 23.43811 \cdot \text{deg}^6$$

$l := 2$, en metres

%%L'equació de la $\Lambda(d)$ és necessària per calcular la $\text{Declinacio}(d)$ que determinarà els punts de l'eix d'ordenades%%

$$\Lambda(d) := \text{temps}(d) \cdot 180/\pi + 0.4337 \cdot \sin(\text{temps}(d)) + 1.8645 \cdot \cos(\text{temps}(d)) - 0.0179 \cdot \sin(2 \cdot \text{temps}(d)) + 0.0088 \cdot \cos(2 \cdot \text{temps}(d))$$

$$\text{Declinacio}(d) := \text{asin}(\sin(\Lambda(d) \cdot \pi/180) \cdot \sin(\epsilon)) / \text{deg}^7$$

%%Aquests dies són els que després es poden usar a l'equació $q(\text{Declinacio}(i))$ per aconseguir la posició de l'estilet. Determina el primer i quinze dia de cada mes. Per obtenir el tercer número vaig sumar els 31 dies de gener més l'1 de febrer, i així successivament%%

$$\text{Dies} := [1, 15, 32, 46, 60, 74, 91, 105, 121, 135, 152, 166, 182, 196, 213, 227, 244, 258, 274, 288, 305, 319, 335, 349]$$

%%L'estil1 i l'estil2 són les dues equacions que determinen el lloc per on s'haurà de desplaçar la persona. Estan separades per 12 centímetres per tal que els mesos no se superposin. L'estil1 indica que a la part esquerra del rellotge s'hi llegiran els mesos des de gener fins a juny i a l'estil2, des de juliol fins a desembre%%

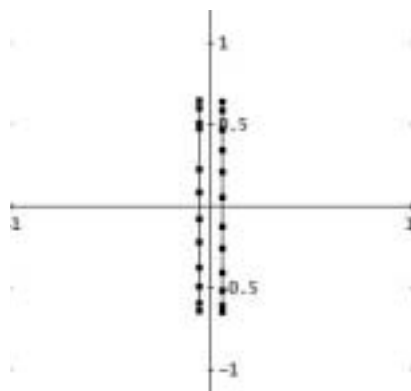
$$q(x) := -l \cdot \tan(x) \cdot \cos(\phi)$$

$$\text{estil1} := \text{VECTOR}([0.06, q(\text{Declinacio}(i) \cdot \text{deg}), i, \text{VECTOR}(\text{Dies}_j, j, 1, 12)])$$

$$\text{estil2} := \text{VECTOR}([-0.06, q(\text{Declinacio}(i) \cdot \text{deg}), i, \text{VECTOR}(\text{Dies}_j, j, 13, 24)])$$

⁶ Extret de la pàgina web <http://www.de-zonnewijzerkring.nl/eng/index-vlakke-zonw.htm>

⁷ Tant la $\Lambda(d)$ com la $\text{Declinacio}(d)$ están extretes de la pàgina web <http://www.de-zonnewijzerkring.nl/eng/index-vlakke-zonw.htm>



En aquest gràfic l'estil1 és el de la dreta i l'estil2 el de l'esquerra. Això és així perquè després se li aplica un gir de 180° per tal que l'el·lipse quedi davant de la persona.

Després vaig fer el gràfic de l'**analema** per l'any 2009, utilitzant l'equació del temps com a eix d'ordenades i la declinació com a eix d'abscisses. A continuació mostro el programa que vaig utilitzar:

%%Les següents equacions les vaig trobar a la web: <http://www.de-zonnewijzerkring.nl/eng/index-vlakke-zonw.htm> i són específiques per l'any 2009. Determinen els punts, un cada quinze dies, de l'estilet a l'eix d'ordenades%%

$$\text{temps}(d) := (d \cdot 360 / (365.2422) - 80.951001) \cdot \text{deg}$$

$$\begin{aligned} \text{EquaTemps}(d) := & -(-108.5723 \cdot \sin(\text{temps}(d)) - 28.2268 \cdot \cos(\text{temps}(d)) + 596.0103 \cdot \sin(2 \cdot \\ & \cdot \text{temps}(d)) - 2.1171 \cdot \cos(2 \cdot \text{temps}(d)) + 4.4791 \cdot \sin(3 \cdot \text{temps}(d)) + 19.2552 \cdot \cos(3 \cdot \\ & \cdot \text{temps}(d)) - 12.7306 \cdot \sin(4 \cdot \text{temps}(d))) / 60 \quad ^8 \end{aligned}$$

%%El següent programa, que determina els punts de l'equació del temps a l'eix d'abscisses, és el mateix que l'utilitzat per l'estilet%%

$$\begin{aligned} \text{Lambda}(d) := & \text{temps}(d) \cdot 180 / \pi + 0.4337 \cdot \sin(\text{temps}(d)) + 1.8645 \cdot \cos(\text{temps}(d)) - \\ & 0.0179 \cdot \sin(2 \cdot \text{temps}(d)) + 0.0088 \cdot \cos(2 \cdot \text{temps}(d)) \end{aligned}$$

$$\text{Dies} := [1, 15, 32, 46, 60, 74, 91, 105, 121, 135, 152, 166, 182, 196, 213, 227, 244, 258, 274, 288, 305, 319, 335, 349]$$

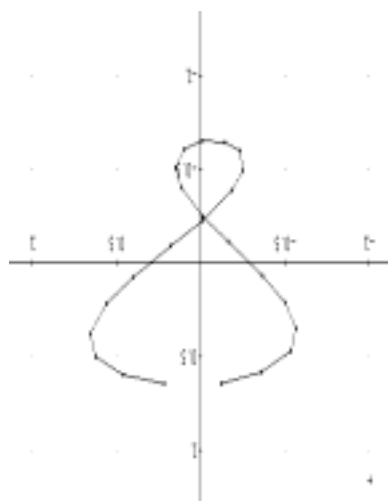
$$\text{Declinacio}(d) := \text{asin}(\sin(\text{Lambda}(d) \cdot \pi / 180) \cdot \sin(\text{epsilon})) / \text{deg}$$

$$q(x) := -l \cdot \tan(x) \cdot \cos(\text{phi})$$

⁸ Tant el $\text{temps}(d)$ com l' $\text{EquaTemps}(d)$ estan extretes de la pàgina web <http://www.de-zonnewijzerkring.nl/eng/index-vlakke-zonw.htm>

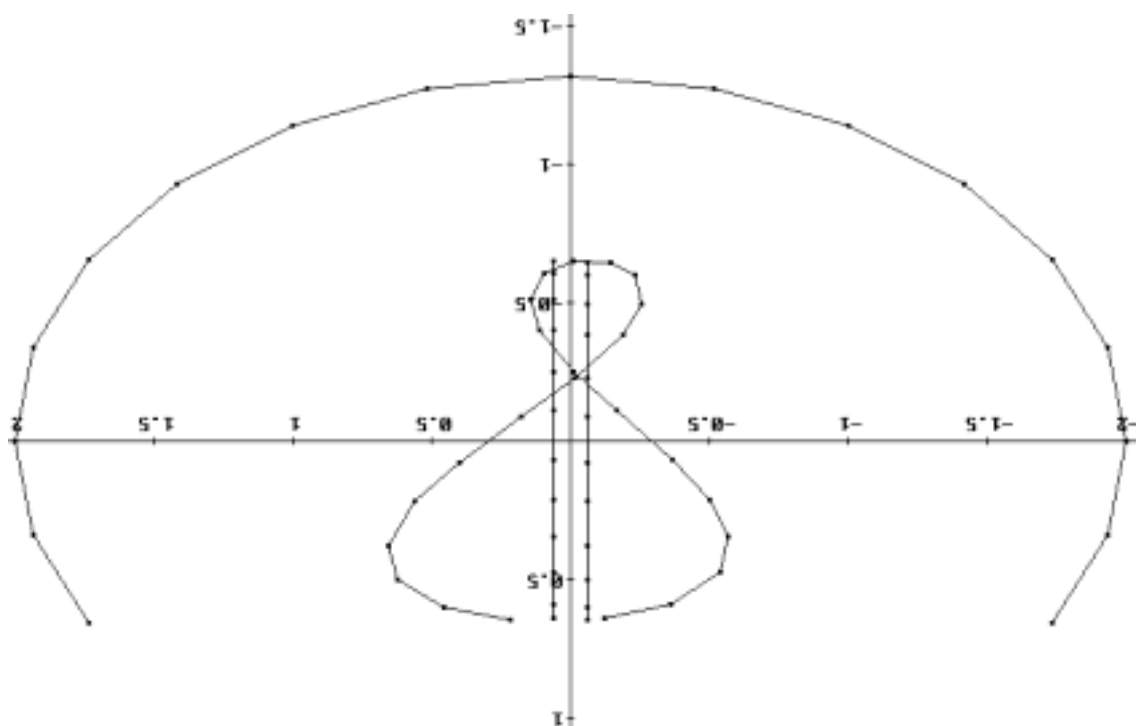
%%La següent expressió uneix, tal i com he dit abans l'equació del temps i la declinació amb els dies com a variables%%

`VECTOR([-EquaTemps(i)/25,q(Declinacio(i)*deg)],i,Dies)`

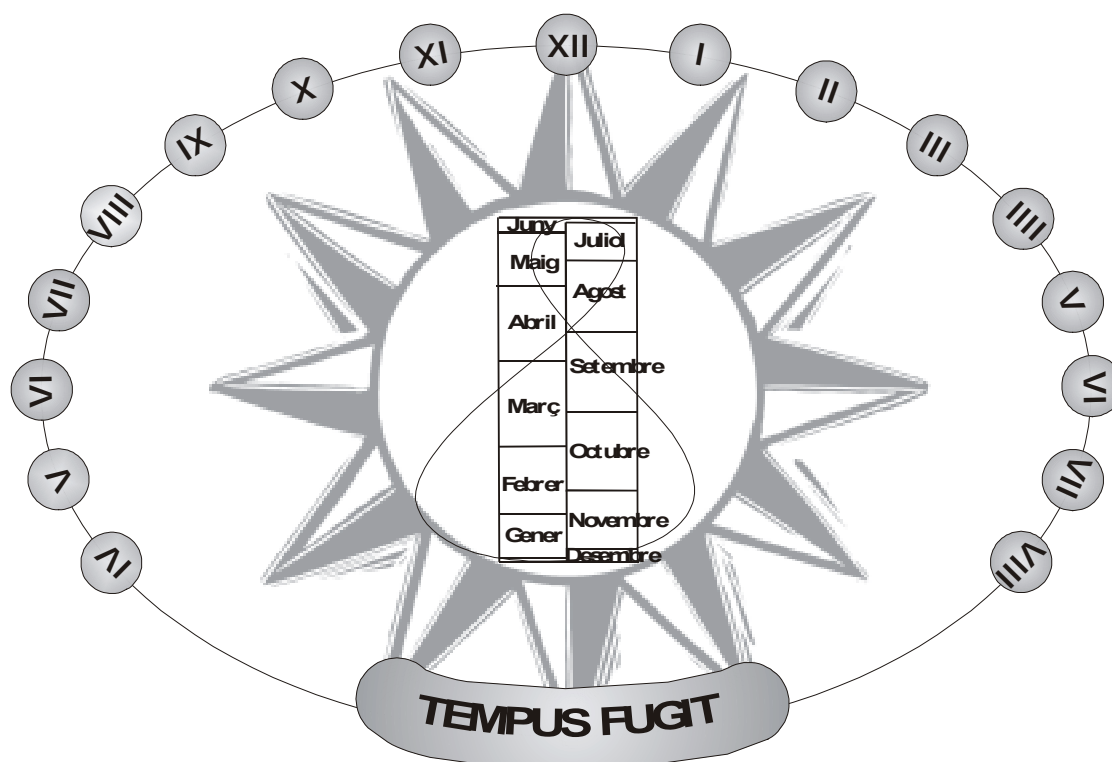


Analema de l'any 2009

El resultat de la unió de tots els elements (girats 180°, excepte l'analema) és el **rellotge de sol** analemàtic. Al gràfic hi podem veure part de l'el·lipse amb les diferents hores marcades per punts, l'analema i els dos estilets.



Jo he dissenyat un possible rellotge de sol analemàtic per al pati de l'institut, és el següent:

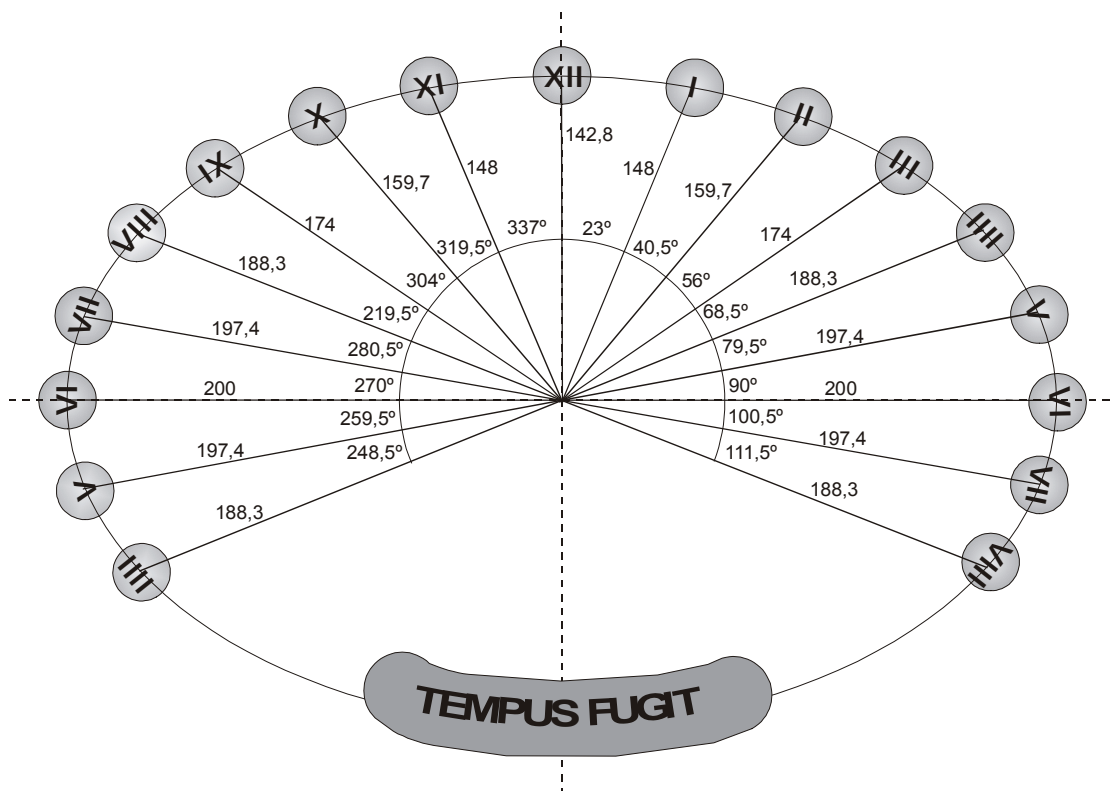


7.3 Dimensions del rellotge

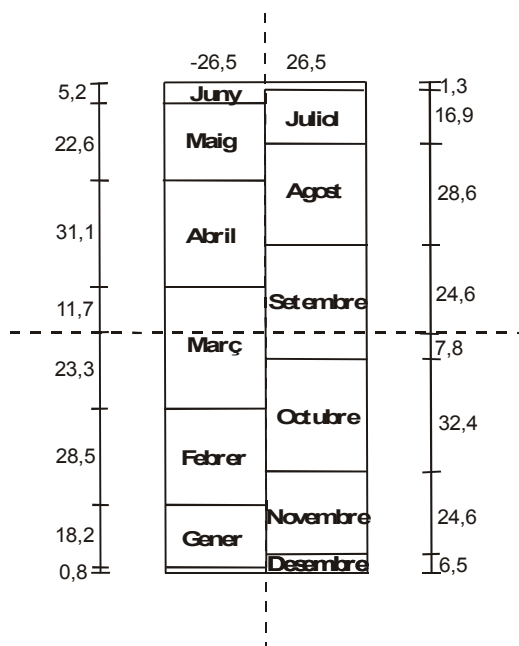
Tot seguit mostro les diferents parts del rellotge per separat per poder conèixer les seves dimensions.

El gràfic de la pàgina següent assenjala les distàncies, en centímetres, de cada hora respecte el centre i els seus graus en sentit horari respecte les XII.

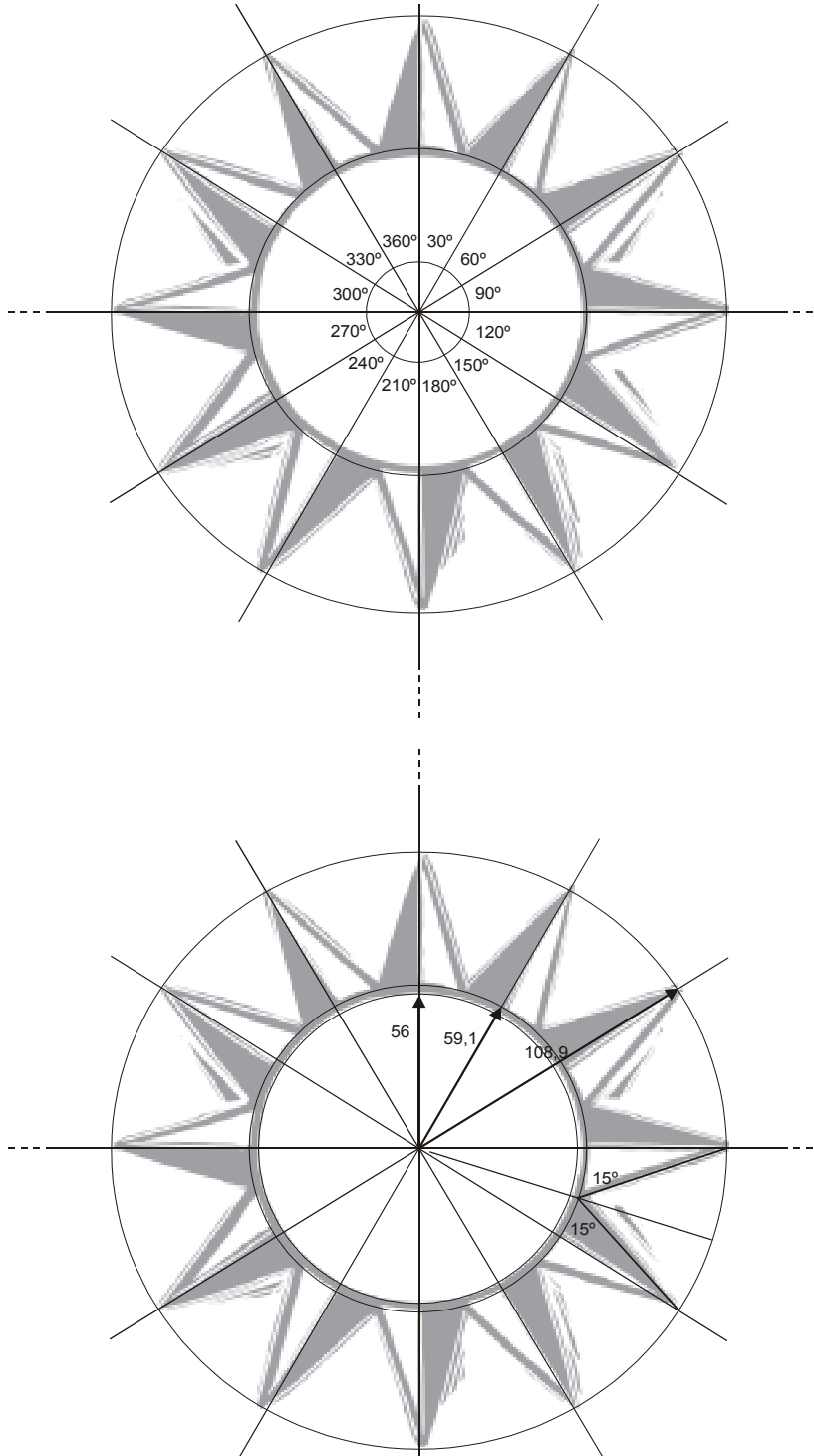
Projecte de construcció d'un rellotge de sol



El següent esquema indica les dimensions, en centímetres, de la superfície on ens hem de situar per llegir l'hora:



Per últim, indico les dimensions del gràfic del sol⁹ dibuixat com a motiu de decoració del rellotge. El primer mostra els graus en sentit horari i el segon el radi de cada circumferència:



⁹ Sol extret de la web www.flickr.com i modificat amb l'ajuda del programa Photoshop.

8. Conclusions

He gaudit molt fent aquest treball de recerca, encara que hi ha hagut moments on no hi veia el final, ja que tot se'm feia una muntanya: exàmens, deures, treballs, activitats extraescolars...

No obstant, he entrat dins d'un món fins ara desconegut per mi, una mica complex matemàticament parlant, però amb representacions i figures impressionants. La necessitat de mesurar el temps ens ha aportat models de rellotges que fins i tot són obres d'art. És increïble com des de temps tan antics, ja s'interessaven pel temps per moltes raons, entre d'altres el de millorar el rendiment agrícola, és a dir, la qualitat de vida. Crec que per fer un treball sobre rellotges de sol és important conèixer una mica la història i els diferents tipus, tot i que només vaig escriure una petita introducció en alguns apartats (3, 4, 5), ja que el meu objectiu era dissenyar-ne un.

Cal dir que els rellotges de sol no marquen l'hora oficial, sinó l'hora solar, a la qual s'hi ha d'afegir una o dues hores (depenent de si és l'horari d'estiu o d'hivern). A més, a aquesta diferència s'hi acumula l'equació del temps, la qual varia entre uns 14 minuts i -16 minuts.

La primera aproximació pràctica als rellotges de sol va ser construir el rellotge portàtil, la qual cosa no va ser gaire difícil, només vaig haver de vigilar de no equivocar-me amb les mides, sobretot de graus, amplada i allargada de la superfície. És un rellotge de sol força manejable i alhora fàcil de llegir l'hora.

També, en un primer moment, ens havíem plantejat la construcció d'un rellotge de sol vertical declinant, ja que així aprofitaríem una paret del pati de l'institut. Però després vam descobrir un tipus de rellotge que ens havia cridat l'atenció pel seu dinamisme i el seu atractiu, aquest era el rellotge analemàtic. Tot i això, crec que és el més difícil d'entendre el seu funcionament i de calcular.

El camp dels rellotges de sol és un món molt ampli, com més aprofundeixes, més te n'adones dels possibles estudis a fer. El meu treball només ha sigut una petita introducció als rellotges de sol, amb el projecte d'un d'aquests.

Tot i això, a l'hora de buscar informació em va ser difícil trobar llibres que expliquessin la construcció de rellotges de sol o els seus elements. L'únic llibre que vaig trobar que explicava la seva construcció va ser *Relojes de sol* de Gian Carlo Pavanello i Aldo Trincherò o els diferents elements. La informació l'he extret bàsicament d'Internet.

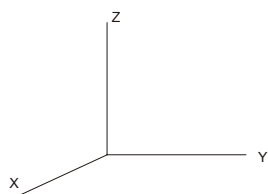
No obstant estic satisfeta per haver assolit els objectius. Ara només queda construir-lo al pati de l'institut.

9. Annex

9.1 Canvi d'eixos

Abans dels càlculs també és necessari fer una petita introducció a les equacions de les rectes a l'espai.

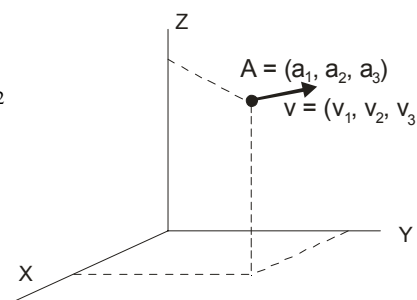
Tenim els tres eixos x , y , z , tots perpendiculars entre ells:



L'equació vectorial ens dóna una relació entre les tres coordenades d'un punt:

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \rightarrow \begin{aligned} x &= a_1 + \lambda v_1 \\ y &= a_2 + \lambda v_2 \\ z &= a_3 + \lambda v_3 \end{aligned}$$

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$



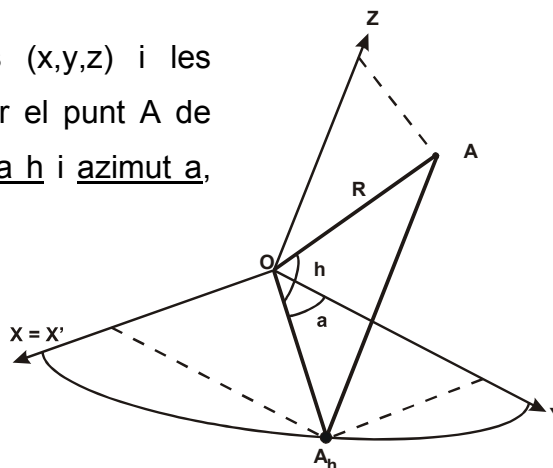
Una vegada entesos tots aquests termes es pot començar a fer definir les equacions que utilitzarem per fer el canvi d'eixos:

a) Coordenades horitzontals

Si (x, y, z) és un sistema ortonormal, llavors podem definir:

$$\left\{ \begin{array}{l} O \rightarrow \text{centre de la Terra (observador)} \\ O_{xy} \rightarrow \text{pla de l'horitzó} \\ O_{y^+} \rightarrow \text{direcció sud} \\ O_{x^+} \rightarrow \text{direcció oest} \\ O_{z^+} \rightarrow \text{zenit} \end{array} \right.$$

La relació entre les coordenades (x,y,z) i les coordenades horitzontals per obtenir el punt A de radi arbitrari R són els angles: altura h i azimut a, tal i com ens mostra el gràfic.



Mitjançant una mica de trigonometria podem treure les equacions següents:

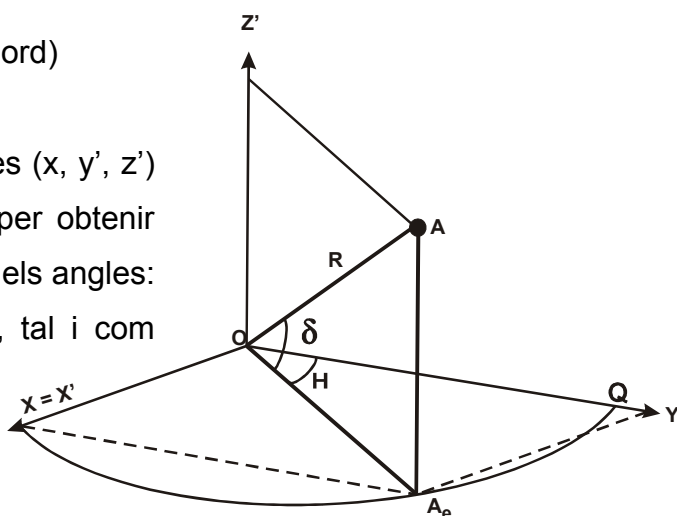
$$\begin{cases} x = R \cosh \cdot \sin a \\ y = R \cosh \cdot \cos a \\ z = R \sinh \end{cases}$$

b) Coordenades equatorials

Si (x, y', z') és un sistema ortonormal, llavors podem definir:

$$\begin{cases} O \rightarrow \text{observador} \\ O_{x'y'} \rightarrow \text{pla de l'equador} \\ O_{y'+} \rightarrow OQ \text{ (Q: intersecció de l'equador i el meridià)} \\ O_{x'+} \rightarrow O_x \\ O_{z'+} \rightarrow \text{pol celest boreal (pol nord)} \end{cases}$$

La relació entre les coordenades (x, y', z') i les coordenades equatorials per obtenir el punt A de radi arbitrari R són els angles: declinació δ i l'angle horari H, tal i com ens mostra el gràfic.



Mitjançant una mica de trigonometria obtenim les següents equacions:

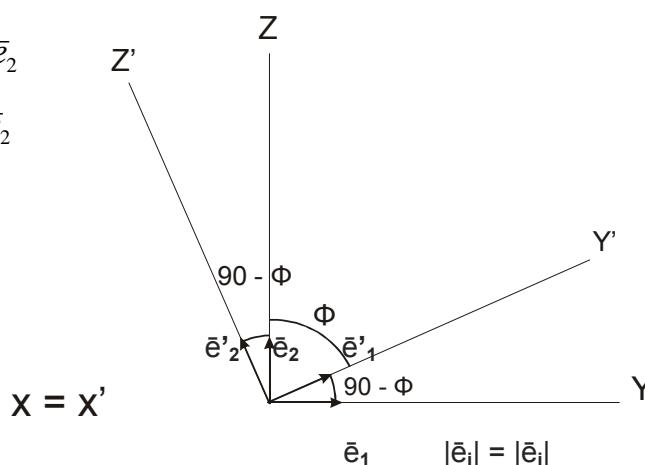
$$\begin{cases} x = x' = R \cos \delta \cdot \sin H \\ Y' = R \cos \delta \cdot \cos H \\ z' = R \sin \delta \end{cases}$$

El procés per realitzar el **canvi d'eixos** o **canvi de coordenades** és el següent (girem un angle de $90-\phi$, on ϕ és la latitud del punt):

1. Relacionar (x, y, z) i (x', y', z') des d'un mateix punt.
2. Trobar les equacions que relacionen els eixos y i z amb els y' i z' , els quals són els únics que canvien:

$$\begin{cases} \bar{e}'_1 = \cos(90-\phi) \cdot \bar{e}_1 + \sin(90-\phi) \cdot \bar{e}_2 \\ \bar{e}'_2 = \cos(180-\phi) \cdot \bar{e}_1 + \sin(270-\phi) \cdot \bar{e}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{e}'_1 = \sin \phi \bar{e}_1 + \cos \phi \bar{e}_2 \\ \bar{e}'_2 = -\cos \phi \bar{e}_1 + \sin \phi \bar{e}_2 \end{cases}$$



3. Substitució de les equacions anteriors a la següent:

$$y \cdot \bar{e}_1 + z \cdot \bar{e}_2 = y' \cdot \bar{e}'_1 + z' \cdot \bar{e}'_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow y \cdot \bar{e}_1 + z \cdot \bar{e}_2 = y' (\sin \phi \bar{e}_1 + \cos \phi \bar{e}_2) + z' (-\cos \phi \bar{e}_1 + \sin \phi \bar{e}_2)$$

Tot seguit descomponem l'equació anterior per obtenir les seves coordenades (y, z) aïllades, hem de tenir en compte que x és una coordenada fixa:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \cdot \sin \phi - z' \cdot \cos \phi \\ z = z' \cdot \cos \phi + z' \cdot \sin \phi \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{substituïm les coordenades (x, y, z)} \\ \text{i (x', y', z')} \text{ per les equacions} \\ \text{deduïdes anteriorment} \end{array} \rightarrow$$

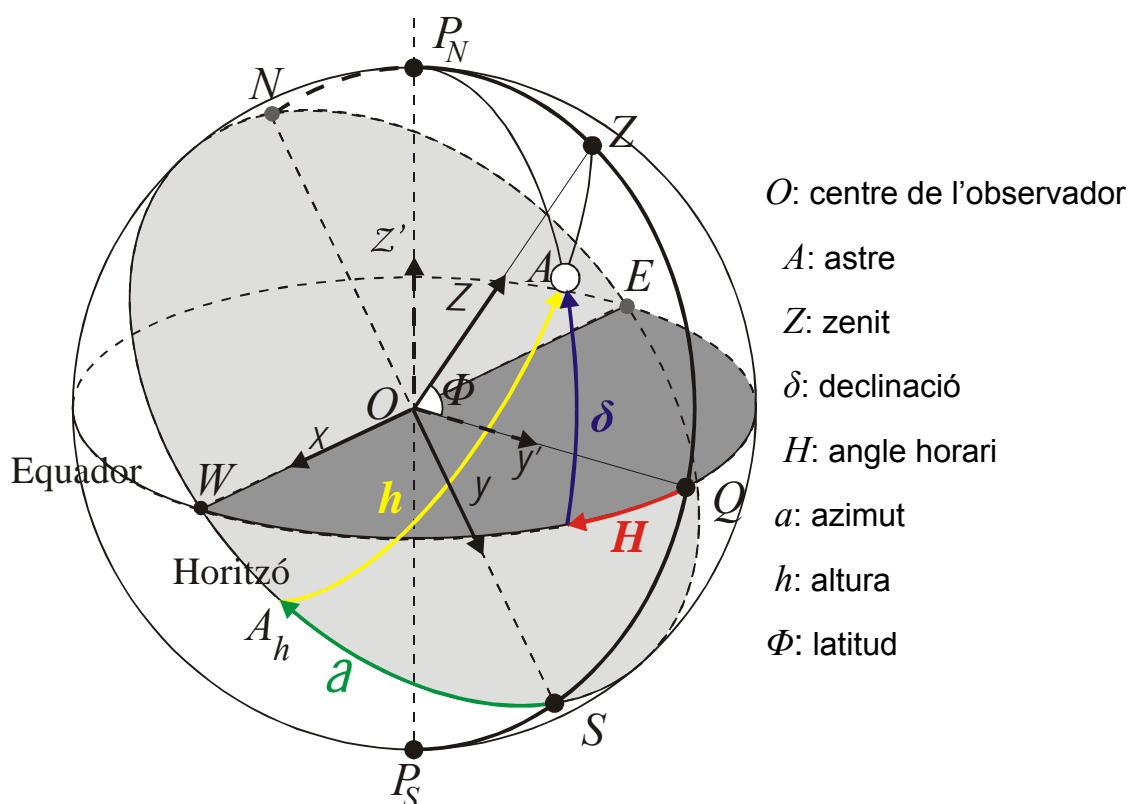
$$\rightarrow \begin{cases} \cosh \cdot \sin a = \cos \delta \cdot \sin H \\ \cosh \cdot \cos a = \cos \delta \cdot \cos H \cdot \sin \phi - \sin \delta \cdot \cos \phi \\ \sinh = \cos \delta \cdot \cos H \cdot \cos \phi + \sin \delta \cdot \sin \phi \end{cases}$$

Fem el mateix amb les coordenades (y', z'):

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \cdot \sin \phi + z \cdot \cos \phi \\ z' = z \cdot \cos \phi + z \cdot \sin \phi \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{substituïm altre cop les coordenades} \\ \text{(x, y, z) i (x', y', z')} \text{ per les deduïdes} \\ \text{anteriorment} \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos \delta \cdot \sin H = \cosh \cdot \sin a \\ \cos \delta \cdot \cos H = \cosh \cdot \cos a \cdot \sin \phi + \sinh \cdot \cos \phi \\ \sin \delta = -\cosh \cdot \cos a \cdot \cos \phi + \sinh \cdot \sin \phi \end{cases}$$

El següent gràfic mostra la relació entre els diferents angles de les coordenades:



9.2 Equació del temps

Com ja s'ha dit abans a l'apartat 5 (primera llei de Kepler), el recorregut de la Terra al voltant del Sol no és una circumferència, sinó una el·lipse. Això implica que la distància de la Terra amb el Sol és variable segons el dia.

Però a més, sabem que la declinació canvia al llarg de l'any, ja que el recorregut al voltant del Sol transcorre per l'eclíptica i no per l'Equador.

Aquestes dues situacions juntes provoquen una diferència notable entre el sol mitjà i el sol verdader, anomenada **equació del temps**.

Equació del temps = temps mitjà – temps verdader
--

Aquesta correcció del temps verdader al rellotge solar analemàtic es veu reflectida en una corba en forma de vuit anomenada analema.

Hora oficial = hora solar - equació del temps - longitud geogràfica (est) + 1h (hivern)

Hora oficial = hora solar - equació del temps - longitud geogràfica (est) + 2h (estiu)

Però la fórmula de l'equació del temps és molt més complexa:

$$eqtemps = -107.0605 \cdot \sin L - 428.6697 \cdot \cos L + 596.1009 \cdot \sin(2L) - 2.0898 \cdot \cos(2L) + 4.4173 \cdot \sin(3L) + 19.2776 \cdot \cos(3L) - 12.7338 \cdot \sin(4L)$$

La primera imatge que hi ha a continuació representa l'analema de l'any 2009, la qual té com a eix d'abscissa l'equació del temps en minuts [-14,26' , 16,47'] i com a eix d'ordenada la declinació solar en graus [-23,44 , 23,43]. La imatge del costat és un muntatge amb fotografies fetes al Sol des del mateix lloc i a la mateixa hora durant tot un any.



9.3 Programa de construcció del rellotge de sol

Tot seguit es pot veure el programa utilitzat per arribar al projecte final, és a dir, al disseny del rellotge.

En primer lloc, definim els paràmetres:

%% Latitud, inclinació de l'eix terrestre, longitud, eix major de l'el·lipse %%

$$phi:=41\cdot deg+7/60\cdot deg$$

$$epsilon:=23.43811\cdot deg$$

$$lambda:=1\cdot deg+15/60\cdot deg$$

$$l:=2 \text{ , en metres}$$

En segon lloc ja es pot llegir el programa utilitzat¹⁰:

%% Funcions per determinar les posicions horàries a l'el·lipse i la posició de l'estilet %%

%% Les dues primeres equacions surten del gràfic de la pàgina 21 %%

$$p(x):=[-l\cdot\sin(x),-l\cdot\cos(x)\cdot\sin(phi)]$$

$$q(x):=-l\cdot\tan(x)\cdot\cos(phi)$$

$$temps(d):=(d\cdot 360/(365.2422)-80.951001)\cdot deg$$

$$Lambda(d):=temps(d)\cdot 180/pi+0.4337\cdot\sin(temps(d))+1.8645\cdot\cos(temps(d))-0.0179\cdot\sin(2\cdot temps(d))+0.0088\cdot\cos(2\cdot temps(d))$$

$$EquaTemps(d):=(-108.5723\cdot\sin(temps(d))-28.2268\cdot\cos(temps(d))+596.0103\cdot\sin(2\cdot temps(d))-2.1171\cdot\cos(2\cdot temps(d))+4.4791\cdot\sin(3\cdot temps(d))+19.2552\cdot\cos(3\cdot temps(d))-12.7306\cdot\sin(4\cdot temps(d)))/60$$

%% El dies de la pàgina següent (el dia 1 i 15 de cada mes) són els que faré servir per fer el càlcul de l'estilet %%

¹⁰ Algunes d'aquestes equacions han estat extretes de la pàgina web <http://www.de-zonnewijzerkring.nl/eng/index-vlakke-zonw.htm>

$Dies := [1, 15, 32, 46, 60, 74, 91, 105, 121, 135, 152, 166, 182, 196, 213, 227, 244, 258, 274, 288, 305, 319, 335, 349]$

$Declinacio(d) := \text{asin}(\sin(\text{Lambda}(d) \cdot \pi / 180) \cdot \sin(\text{epsilon})) / \text{deg}$

$w := \text{VECTOR}(p(h), h, -120 \cdot \text{deg}, 120 \cdot \text{deg}, 15 \cdot \text{deg})$

$\text{VECTOR}([-EquaTemps(i)/25, q(Declinacio(i) \cdot \text{deg})], i, Dies)$ ¹¹

$estil1 := \text{VECTOR}([0.06, q(Declinacio(i) \cdot \text{deg})], i, \text{VECTOR}(Dies_j, j, 1, 12))$

$estil2 := \text{VECTOR}([-0.06, q(Declinacio(i) \cdot \text{deg})], i, \text{VECTOR}(Dies_j, j, 13, 24))$

9.4 Fotografies de rellotges

Les següents imatges són fotografies de rellotges de sol que he en diferents pobles. Alguns rellotges ja sabia que estaven allà, però d'altres me'ls vaig trobar per casualitat.

Les primeres fotografies són d'un rellotge horitzontal d'un poble del Camp de Tarragona, Renau. És una font i rellotge de sol. Com es pot veure l'aixeta és l'estilet i a la pica hi ha les hores.



¹¹ El 25 és un factor d'escala.

Les següents fotografies són d'un rellotge vertical declinant a d'un poble de l'illa de Sardenya, la Madalena. Es pot veure la latitud del lloc ($41^{\circ} 12,8'$) i la longitud ($9^{\circ} 24,3'$), també es pot observar la inclinació de l'estilet.



Les últimes fotografies són d'un curiós rellotge de sol de la Selva del Camp, al Baix Camp. Es tracta d'un rellotge de sol on els rajos del sol il·luminen la plataforma inclinada tot indicant l'hora, que sobresurt per sobre de l'ombra, la qual l'envolta.



10. Bibliografia

- <http://www.infomet.fcr.es/aa0/indexrs.html>
- <http://www.gnomonica.cat/tipus.cfm>
- http://www.xtec.cat/~mmulet/rsol/e_temps.htm#
- http://es.wikipedia.org/wiki/Cuadrante_solar
- http://www.xtec.cat/cdec/recursos/pdf/protocol_prim/rellotgesol.pdf
- <http://www.astromia.com/glosario/ecuaciontiempo.htm>
- <http://www.srrb.noaa.gov/highlights/sunrise/azel.html>
- <http://www.proteccioncivil.org/vademecum/vdm035.htm>
- <http://www.esi.us.es/php/infgen/aulav/energrenov/ejerprevrad.pdf>
- <http://www.timezone.com/extras/200711101492>
- <http://info.ifpan.edu.pl/firststep/aw-works/fsll/mul/mueller.html>
- <http://www.de-zonnewijzerkring.nl/eng/index-vlakke-zonw.htm>
- <http://www.encyclopedia-catalana.com/fototeca/fotop/co14937.jpg>
- <http://www.antiquus.es/catalogo.php?sm=2&q=6>
- <http://www.davidharbersundials.co.uk/es/reloj/varios2.html>
- <http://www.antiquus.es/catalogo.php?sm=2&q=8>
- <http://www.crystalinks.com/clocks.html>
- <http://mat.uab.es/matmat/PDFv2006/v2006n14.pdf>
- http://www.google.es/search?hl=ca&q=movimientos+tierra+ppt+fisica+aplicada&meta=lr%3Dlang_de%7Clang_en%7Clang_es%7Clang_ca%7Clang_fr%7Clang_it%7Clang_pt
- <http://www.ua.es/personal/viana/Documentos/Astronomia/RelojesSolTema02.pdf>
- <http://www.xtec.es/~rmasip1/GEOME/NODE167.htm>
- http://culturaclasicasagunt.wikispaces.com/space/showimage/temporecapto_val.pdf

http://images.google.es/imgres?imgurl=http://pages.ca.inter.net/~deepsky/Analemma_Temple_of_Zeus1.jpg&imgrefurl=http://pages.ca.inter.net/~deepsky/&h=512&w=384&sz=148&hl=ca&start=26&tbnid=zBuY2TYszoWtaM:&tbnh=131&tbnw=98&prev=/images%3Fq%3Danalemma%2Bsolar%26start%3D18%26gbv%3D2%26ndsp%3D18%26hl%3Dca%26sa%3DN

<http://www.flickr.com>

- PAVANELLO I TRINCHERO, Gian Carlo i Aldo: *Relojos de sol*. Editorial de Vecchio. Barcelona, 1998.
- *Filosofia batxillerat*, grup Edebé. Barcelona. 2002.
- Programa utilitzat pels gràfics: CorelDRAW 11
- Programa utilitzat pels càlculs i gràfics: Derive

11. Agraïments

Vull agrair a la meua família, als meus avis, al meu tiet Toni, és a dir, a totes aquelles persones que han posat de la seva part ajudant-me a realitzar aquest treball, ja sigui buscant rellotges de sol pels diferents pobles, fent fotos o preguntant a coneguts...

També vull donar les gràcies al Jordi Boltaina per la seva col·laboració en el disseny del rellotge.

També al Ramon Masip per facilitar-me part de la informació.

Però sobretot, molt especialment al meu tutor del treball, el professor Ramon Nolla, qui m'ha fet costat i m'ha ajudat en tot moment.