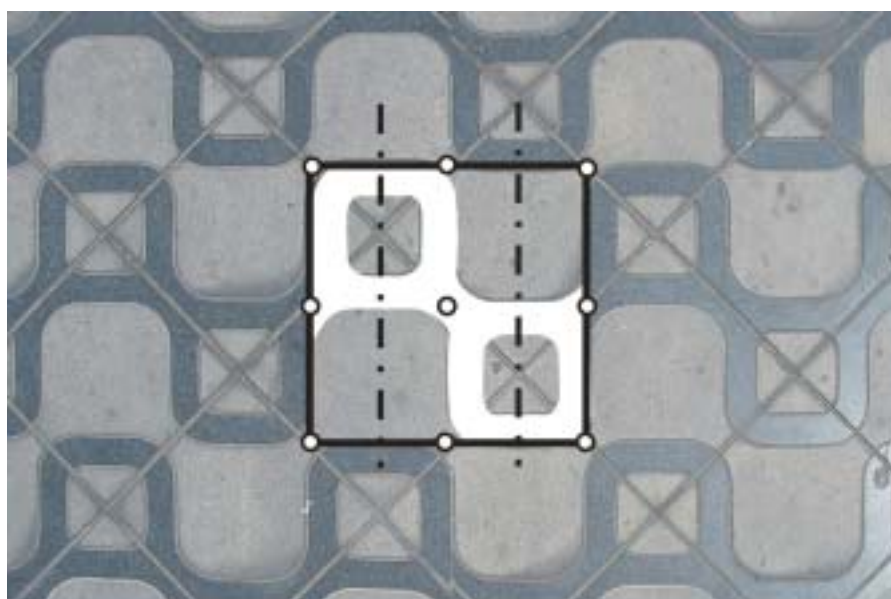


MOSAICS PERIÒDICS

Disseny, recerca i identificació
a l'entorn ciutadà



Georgina Mendoza

© Georgina Mendoza. Maig 2005.
Tutor: Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart
Tarragona

Índex

1.	INTRODUCCIÓ.....	3
1.1	Motivacions i breu descripció del treball	3
1.2	Objectius.....	4
1.3	Fases del treball	5
1.4	Recursos	6
1.5	Materials presentats	6
1.6	Agraïments	7
2.	ELS 17 TIPUS DE MOSAICS PERIÒDICS. PRESENTACIÓ I EXEMPLES	8
2.1	Concepte	8
2.2	Isometries	9
2.3	Els 17 tipus de mosaics.....	12
2.3.1	Mosaics d'ordre 1	13
2.3.2	Mosaics d'ordre 2	15
2.3.3	Mosaics d'ordre 3	18
2.3.4	Mosaics d'ordre 4	19
2.3.5	Mosaics d'ordre 6	21
2.4	Algorisme d'identificació del tipus de mosaic.	22
3.	Recerca de mosaics periòdics	23
3.1	Recerca de mosaics d'ordre 1	23
3.1.1	Recerca de mosaics P1	23

3.1.2	Recerca de mosaics CM	24
3.1.3	Recerca de mosaics PM.....	25
3.1.4	Recerca de mosaics PG	26
3.2	Recerca de mosaics d'ordre 2.....	27
3.2.1	Recerca de mosaics P2	27
3.2.2	Recerca de mosaics CMM.....	28
3.2.3	Recerca de mosaic PMM.....	31
3.2.4	Recerca de mosaics PMG	31
3.2.5	Recerca de mosaics PGG.....	34
3.3	Recerca de mosaics d'ordre 3.....	34
3.3.1	Recerca de mosaics P3	34
3.3.2	Recerca de mosaics P31M.....	35
3.3.3	Recerca de mosaics P3M1	36
3.4	Recerca de mosaics d'ordre 4.....	37
3.4.1	Recerca de mosaics P4	37
3.4.2	Recerca de mosaics P4G	38
3.4.3	Recerca de mosaics P4M.....	39
3.5	Recerca de mosaics d'ordre 6.....	42
3.5.1	Recerca de mosaics P6	42
3.5.2	Recerca de mosaics P6M.....	43
4.	Conclusions	45
5.	Bibliografia.....	46

1. INTRODUCCIÓ

1.1 Motivacions i breu descripció del treball

De les diferents propostes de treball de recerca que em va presentar el Departament de Matemàtiques de l'Institut, vaig trobar interessant la d'aprendre a visualitzar i distingir els diferents tipus de mosaics que hi ha al nostre entorn (a les rajoles del terra o a les parets com a elements decoratius), com es generaven i com n'és de curiós que només existeixin 17 tipus de mosaics periòdics, la qual cosa va ser demostrada per Fedorov l'any 1891. Tanmateix a l'Alhambra, des del s. XIV, existeixen aquests 17 tipus de mosaics com a elements decoratius, encara que no consta enlloc que els àrabs ja coneguessin o es plantejessin que aquests eren els únics tipus de mosaics periòdics. Fins aquell moment, mai no m'havia fixat en els mosaics que hi ha arreu, però l'interès se'm va despertar quan vaig adonar-me que de mosaics, n'hi ha per tot arreu i de diferents tipus. Per exemple, en les rajoles dels carrers. També vaig observar que a cada carrer i ciutat tenen les seves característiques pròpies. Cal dir que alguns tipus de mosaics són molt poc freqüents i difícils de cercar, en canvi n'hi ha d'altres que són molt abundants.

Em va agradar la idea de cercar mosaics pel meu entorn, fotografiar-los i esbrinar a quin tipus pertanyien. Des que em vaig decidir, per allà on vaig em fixo en el meu entorn i en els mosaics que vaig trobant.

En una primera aproximació volia aconseguir els objectius següents: la identificació i descripció dels diferents tipus de mosaics, intentar trobar-ne el màxim nombre de tipus possible a Tarragona i als diferents llocs que visités, classificar-los i trobar el motiu mínim de repetició i esbrinar com a partir d'aquest motiu es generaria tot el mosaic. Els objectius d'esbrinar per què només n'hi havia 17 tipus i d'estudiar les seves característiques segons la ciutat, regió o país, es van abandonar perquè això hagués requerit un temps de recerca més llarg.

En la recerca em vaig plantejar de trobar-ne almenys un de cada tipus, però n'hi va haver alguns que foren molt difícils de localitzar. Un exemple fou el d'un tipus, que més endavant anomenarem P31M, que en tot l'art Hispano-musulmà només es troba a l'Alhambra i a l'església de Sant Miquel de la Seu de Saragossa.

Un altre objectiu, fou el de crear unes macros o conjunt d'instruccions amb el programa Cabri II de geometria dinàmica. La finalitat era la de generar cada tipus de mosaic a partir dels motius mínims, i així, després, seria més senzill representar tots els mosaics que hagués cercat. Finalment amb el programa Corel Draw 8 de disseny i tractament d'imatges afinaria aquestes presentacions per inserir-les en el treball.

1.2 Objectius

Quan vaig ordenar totes les idees anteriors els objectius es van concretar en:

- Estudi dels diferents tipus de mosaics i creació d'exemples.
- Trobar la cel·la reticular de cada mosaic, és a dir, trobar el motiu de repetició del qual s'obté el mosaic i les dues translacions principals que el generen.

- Descobrir els moviments, (girs, simetries o lliscaments), que deixen invariable el mosaic.
- Identificació dels diferents tipus de mosaics trobats en la recerca pel meu entorn.
- Recerca d'informació i fotografies a través de diferents fonts dels tipus de mosaics no trobats en l'observació directa de l'entorn.
- Creació de macros amb el programa Cabri II per a la generació dels diferents tipus de mosaics periòdics.
- Creació d'exemples de cada tipus de mosaic i reproducció dels mosaic trobats en la recerca, amb indicació de la cel·la i motiu mínim generadors.
- Presentació del treball final en document imprès i en suport magnètic en formats WORD i PDF, amb enllaços a planes WEB interactives dels exemples creats i dels mosaics trobats i accés als fitxers creats amb el programa Cabri II.

1.3 Fases del treball

Per assolir els objectius anteriors vaig establir les fases següents:

1. Recerca d'informació sobre mosaics periòdics.
2. Recerca de mosaics pel meu entorn.
3. Estudi i identificació dels diferents tipus de mosaics a partir de les simetries que els caracteritzen.
4. Aprenentatge del programa Cabri II, per crear les macros que em permetin construir exemples dels diferents tipus de mosaics periòdics.
5. Millora de les presentacions dels exemples dels mosaics amb el programa Corel Draw.
6. Elaboració de les presentacions en format WORD I PDF i creació de les planes WEB amb ajut de l'aplicació CABRIJAVA.

1.4 Recursos

- Bibliografia citada al final del treball.
- Programa Cabri II de geometria dinàmica.
- Programa Corel Draw de disseny i tractament d'imatges.
- Aplicació CABRIJAVA.JAR per a la inserció dels mosaics creats amb el Cabri en una finestra interactiva d'una plana WEB.

1.5 Materials presentats

- Document imprès.
- CD amb el següent conjunt de carpetes i documents:
 - Document Word: **Mosaics periòdics.doc**
 - Document PDF: **Mosaics periòdics.pdf**
 - Document Power Point: **Mosaics periòdics.ppt**
 - Carpeta **HTM**:
 - Aplicació **CABRIJAVA.JAR**
 - Fitxers HTM (Planes WEB)
 - Carpeta **Figures** (Fitxers Cabri i Corel)
 - Carpeta **Imatges** (Fitxers JPG)
 - Carpeta **MacrosMosaics** (macros del Cabri)

Molt important:

- Si s'instal·la el contingut del CD en una carpeta del disc dur, cal que en la ruta de la carpeta no hi hagi espais buits. En cas contrari no es visualitzaran les finestres interactives de les planes WEB.

- Els fitxers CABRI que es poden descarregar des de les planes WEB, només es poden obrir si es té instal·lat el programa CABRI II distribuït pel Departament d'Educació de la Generalitat.

1.6 Agraïments

Vull agrair al tutor del treball de recerca la seva ajuda, ja que sense ella no hagués aconseguit tots els meus objectius. També agraeixo el suport de la meva família a qui, fins i tot, he despertat l'interès per anar observant els mosaics que els envolten i sempre em preguntaven: - aquest mosaic et serveix?

2. ELS 17 TIPUS DE MOSAICS PERIÒDICS. PRESENTACIÓ

I EXEMPLES

2.1 Concepte

En una primera aproximació, els mosaics periòdics són figures que es componen a partir d'un motiu mínim que es va repetint al llarg del pla i el recobreixen. El motiu mínim és la mínima superfície que genera tot el mosaic en aplicar-li els elements de simetria que el deixen invariable. Concretem els conceptes que determinen allò que és un mosaic:

- **Isometries:** les transformacions del pla que conserven les distàncies i consegüentment els angles.
- **Grup de simetria d'una figura:** El conjunt d'isometries que deixen invariable la figura, és a dir, que la superposen sobre ella mateixa.
- **Mosaic periòdic:** és una figura tal que entre les isometries que el deixen invariable hi ha translacions, totes elles generades per dues translacions mínimes de diferent direcció.
- **Cel·la reticular:** Paral·lelogram determinat per les dues translacions mínimes del grup de simetria del mosaic. Aquesta cel·la sotmesa a les translacions mínimes genera el mosaic.
- **Motiu mínim:** Mínima superfície que genera tot el mosaic al aplicar-li les isometries que el deixen invariable, és a dir les isometries del seu grup de simetria.

És a dir, un mosaic periòdic es pot construir a partir d'un motiu mínim que generi la cel·la reticular i reproduint aquesta cel·la mitjançant les translacions determinades pels seus costats.

Per trobar el motiu mínim cal:

- Cercar la cel·la reticular que proporcionarà els dos vectors que defineixen les translacions mínimes del grup de simetria.
- Mirar si dins la cel·la hi ha isometries que aplicades sobre una part d'ella generin la resta de la cel·la.

2.2 Isometries

Perquè la cel·la reticular es repeteixi pel pla és necessari que utilitzem diversos elements de simetria que són les transformacions que deixen invariable el mosaic, o sigui els elements del seu grup de simetria. Aquests elements de simetria, els hem anomenat isometries, i són la translació, el gir, la simetria i la simetria amb lliscament.

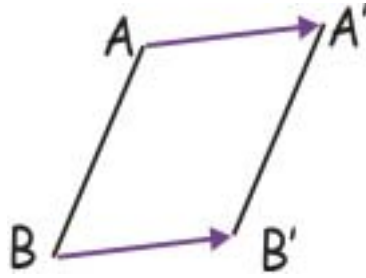
TRANSLACIONS

De manera simple, l'efecte d'una translació es pot identificar en un dibuix que es va repetint successivament seguint una direcció, un sentit i a distàncies iguals.

Un mosaic és el resultat d'una translació successiva de cel·les reticulars (que poden recordar les rajoles d'un terra) a partir de dues translacions principals determinades pels costats de la cel·la reticular.

Una definició més tècnica podria ser: En cada translació, a cada punt p se li aplica un vector v fixat i resulta un punt q tal que $pq = v$

Mostrarem un exemple, consistirà a traslladar un segment AB segons el vector v .



Dibuixem el segment AB i li apliquem als seus extrems el vector v , així obtenim A' i B' . Arribem a la conclusió que aquest vector transforma el segment AB en el segment $A'B'$, de manera que el segment $A'B'$ compleix aquests requisits:

- Té la mateixa longitud que el segment AB .
- És paral·lel al segment AB .

Les translacions són isometries perquè conserven les distàncies, els angles i el seu sentit.

GIRS

El gir és un moviment en el pla que permet passar de cada punt al seu homòleg aplicant-li un angle, el de gir, des d'un centre o punt fix. El gir ve determinat pel centre i l'angle de gir.

Un gir també és una isometria, perquè transforma qualsevol figura en una altra d'igual, és a dir, que manté la forma i la mesura de les figures.

Els girs són uns dels elements que possibiliten la repetició del motiu mínim. En els mosaics periòdics apareixen diferents tipus de centre de gir. L'ordre d'un centre de gir és el nombre de vegades que es pot aplicar el gir a un motiu del mosaic abans d'obtenir una superposició sobre el motiu inicial.

Hi ha infinits centres de cada tipus, ja que suposem que el mosaic es genera indefinidament en totes direccions.

L'ordre d'un mosaic és el màxim ordre dels seus centres de gir. Per exemple, un mosaic amb girs d'ordre 3 i d'ordre 6 es diu que és d'ordre 6. Els 17 mosaics s'agrupen en mosaics d'ordre 1, 2, 3, 4 i 6 i es pot demostrar que no n' existeixen de cap més ordre.

Un gir particular és el de centre un punt O i un angle de gir de 180° . Mitjançant aquest gir, qualsevol punt P del pla es transforma en el punt P' , de manera que el punt O és el punt mitjà del segment d'extremes els punts P i P' . Aquest tipus de gir s'anomena **simetria central**.

SIMETRIES AXIALS

També s'anomenen **simetries** i vénen determinades per un eix de simetria.

Donada una recta e , una simetria axial d'eix e és el moviment que transforma un punt p amb un altre punt p' de manera que:

- El segment pp' és perpendicular a e
- Els punts p i p' equidisten de l'eix e .

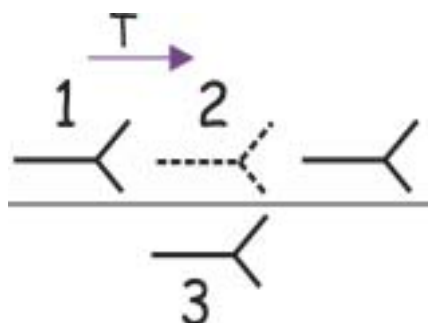


Una figura es diu que té una simetria axial si existeix una recta tal que considerada com a eix de simetria transforma la figura en ella mateixa. Hi ha figures que tenen diversos eixos de simetria. Per exemple, un quadrat té quatre eixos de simetria, un triangle equilàter en té tres i una circumferència en té infinits i tots ells passen pel centre.

Les simetries axials són isometries perquè conserven les distàncies i els angles. A més, tenen la característica de canviar-ne el sentit.

SIMETRIES AMB LLISCAMENTS

Un lliscament és la combinació d'una translació amb una simetria, és a dir, és un tipus d'isometria que es forma amb la composició d'una translació i una simetria axial en una recta paral·lela al vector de translació.



Un exemple per poder observar la simetria amb lliscament són les petjades que deixa un colom quan camina. A la petjada 1 li fem una translació amb el vector T i per passar d'aquesta petjada imaginària 2 a la 3 fem una simetria axial respecte a l'eix que separa les petjades.

2.3 Els 17 tipus de mosaics

Ara que coneixem els moviments o isometries que deixen invariable un mosaic i que, per tant, el generen, podem presentar els diferents tipus de mosaics periòdics.

Inclourem un exemple de cadascun construït amb el programa Cabri II, utilitzant unes macros que he creat prèviament. Aquestes es troben a la carpeta **MacrosMosaics** del Cd en què a partir del segment que determina la cel·la reticular, el motiu mínim (segment) i (en els casos que la cel·la no queda determinada), un punt per fixar-ne l'altura, es poden generar tots els mosaics amb molta facilitat.

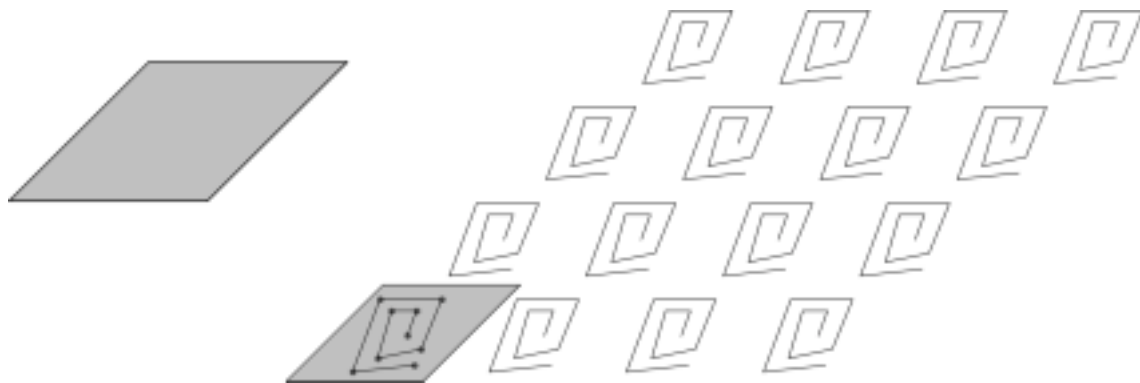
Recordem que en tots els mosaics periòdics existeixen dues translacions mínimes en diferents direccions que el generen reproduint la cel·la reticular per tot el pla.

Cada cel·la reticular ve generada en aplicar les isometries del mosaic sobre un motiu mínim que presentarem de color fosc. Els eixos de simetria axial els presentarem amb línies de punts. Els centres de gir d'ordre 2, 3, 4 i 6 els representarem respectivament per un cercle, un triangle, un quadrat i un hexàgon.

2.3.1 Mosaics d'ordre 1

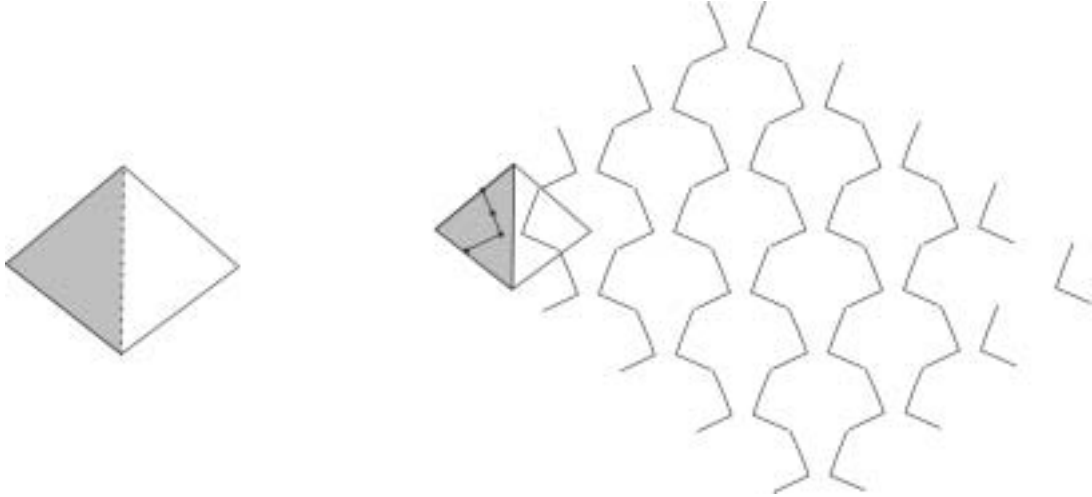
En els mosaics d'ordre 1 no hi ha girs diferents a la identitat. Hi ha quatre tipus de mosaics d'ordre 1, que són els següents:

- **P1**: La cel·la reticular és un paral·lelogram, aquest tipus de mosaic no té ni simetries, ni girs, ni lliscaments. Tot el paral·lelogram és el motiu mínim. Aquesta és la cel·la reticular i un exemple en què s'observa el motiu mínim.



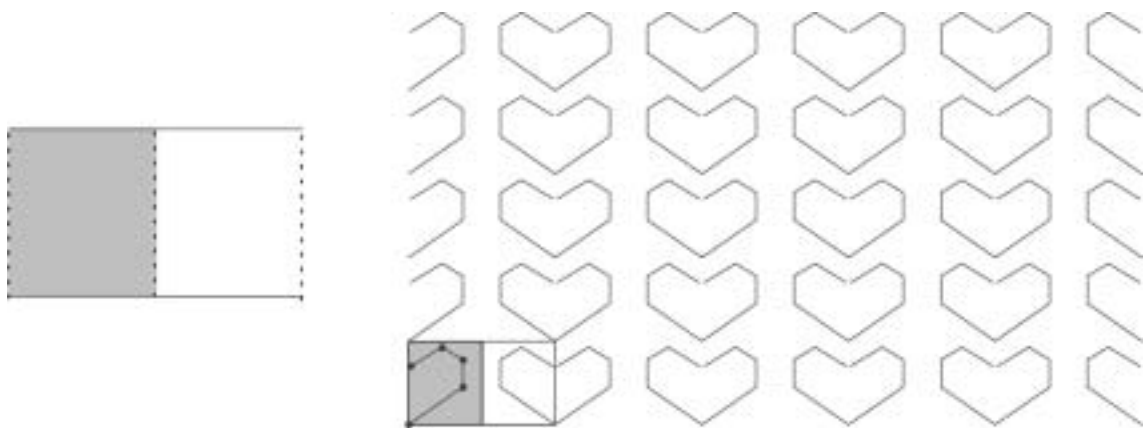
Vegeu el mosaic [exemple1](#)

- **CM:** La cel·la reticular és un rombe i té simetries axials paral·leles. Aquesta és la cel·la reticular en què s'observen els eixos de simetria. En l'exemple s'observa el motiu mínim.



Vegeu el mosaic [exemplecm](#)

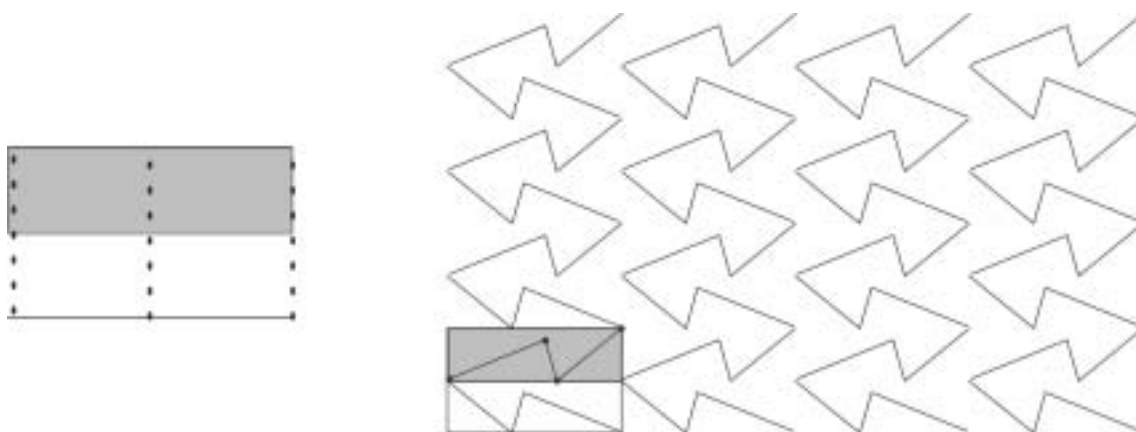
- **PM:** La cel·la reticular és rectangular i té simetries axials paral·leles. Aquesta és la cel·la reticular en què s'observen els eixos de simetria. En l'exemple s'observa el motiu mínim.



Vegeu el mosaic [exemplepm](#)

- **PG:** No té simetries axials, però sí eixos de simetria amb lliscament paral·lels.

Aquesta és la cel·la reticular en què s'observen els eixos de lliscament. En l'exemple s'observa el motiu mínim.



Vegeu el mosaic [exemplepg](#)

2.3.2 Mosaics d'ordre 2

És el tipus en què l'ordre màxim dels girs és 2. Per tant, conté girs de 180° . Els mosaics d'ordre 2 es classifiquen en 5 tipus.

- **P2:** No té simetries ni lliscaments, té girs de 180° . Aquesta és la cel·la reticular en què s'observen els centres de gir. En l'exemple s'observa el motiu mínim.

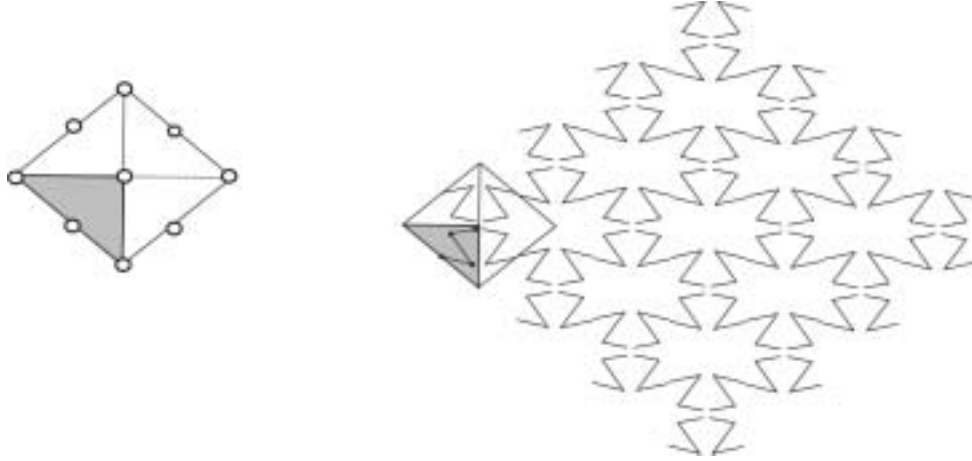


Vegeu el mosaic [exemplep2](#)

- **CMM:** La cel·la reticular és un rombe i té dues simetries axials perpendiculars.

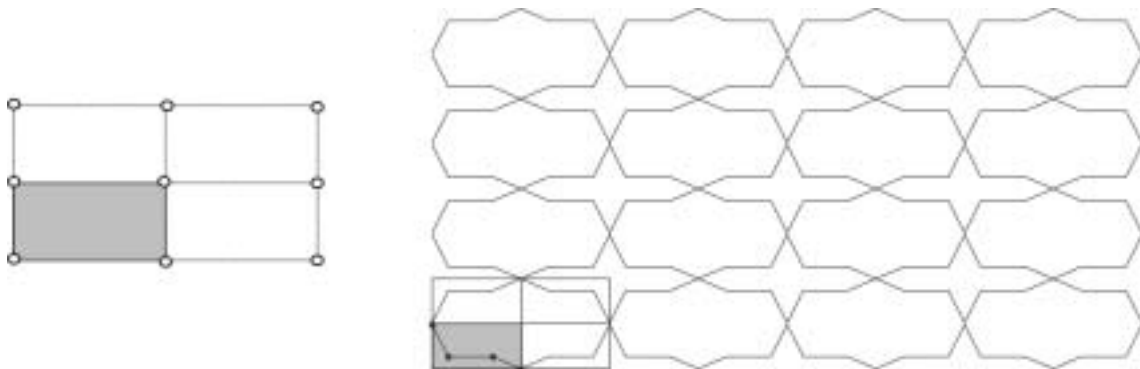
Aquesta és la cel·la reticular en què s'observen els centres de gir i els eixos de simetria.

En l'exemple s'observa el motiu mínim.



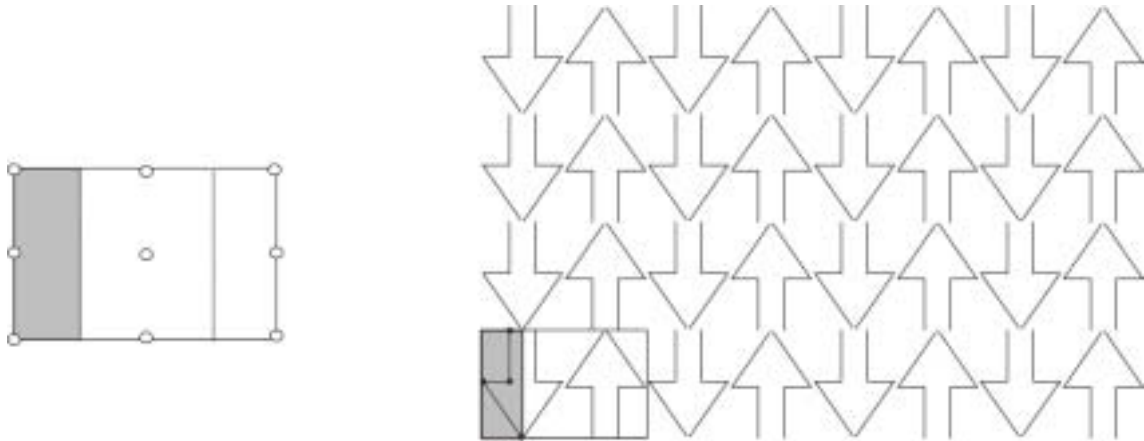
Vegeu el mosaic [exemplecmm](#)

- **PMM:** La cel·la reticular és un rectangle i té dues simetries axials perpendiculars que passen per cada centre de gir d'ordre 2. Aquesta és la cel·la reticular en què s'observen els centres de gir i els eixos de simetria. En l'exemple s'observa el motiu mínim.



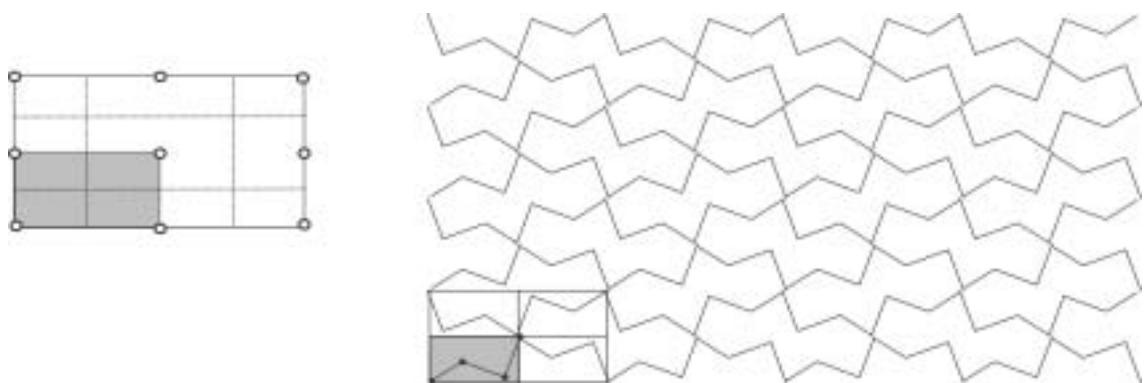
Vegeu el mosaic [exemplepmm](#)

- **PMG**: La cel·la reticular és un paral·lelogram, té simetries axials paral·leles que no passen pels centres de gir d'ordre dos, té girs de 180° . Aquesta és la cel·la reticular on s'observen els centres de gir i els eixos de simetria. En l'exemple s'observa el motiu mínim.



Vegeu el mosaic [exemplepmg](#)

- **PGG**: La seva cel·la reticular és un rectangle, no hi ha simetries, però té lliscaments perpendiculars i girs de 180° . Aquesta és la cel·la reticular en què s'observen els centres de gir i els eixos de lliscaments. En l'exemple s'observa el motiu mínim.

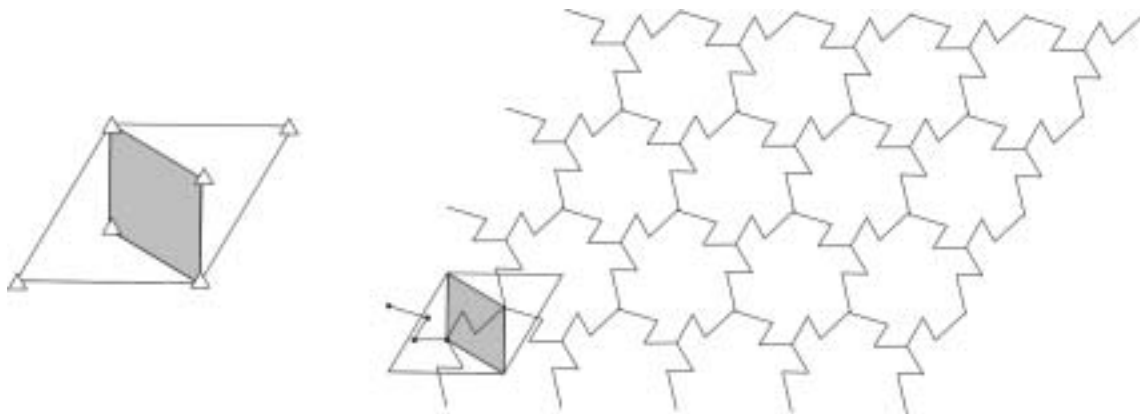


Vegeu el mosaic [exemplepgg](#)

2.3.3 Mosaics d'ordre 3

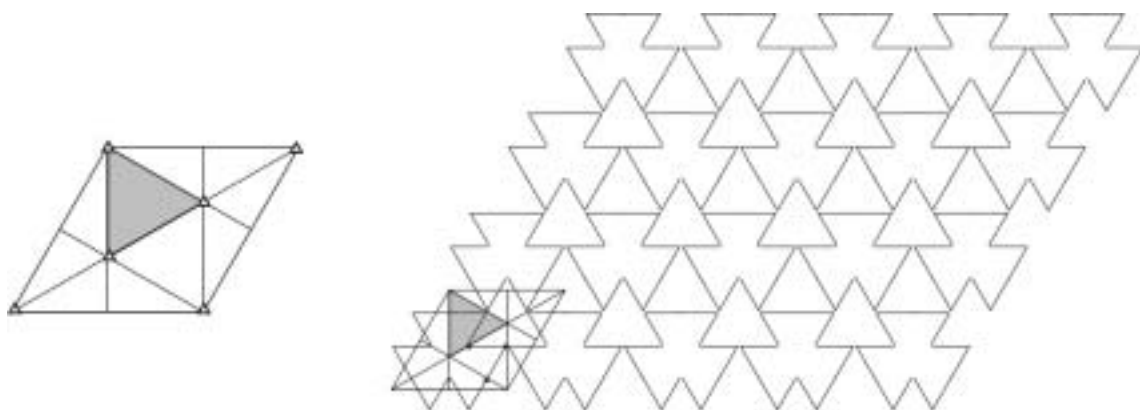
L'ordre màxim dels girs és 3 i per tant conté girs de 120° . Hi ha tres tipus de mosaics d'ordre 3.

- **P3**: Només hi ha girs de 120° , no hi ha cap tipus de simetria. Aquesta és la cel·la reticular amb els centres de gir. En l'exemple s'observa el motiu mínim.



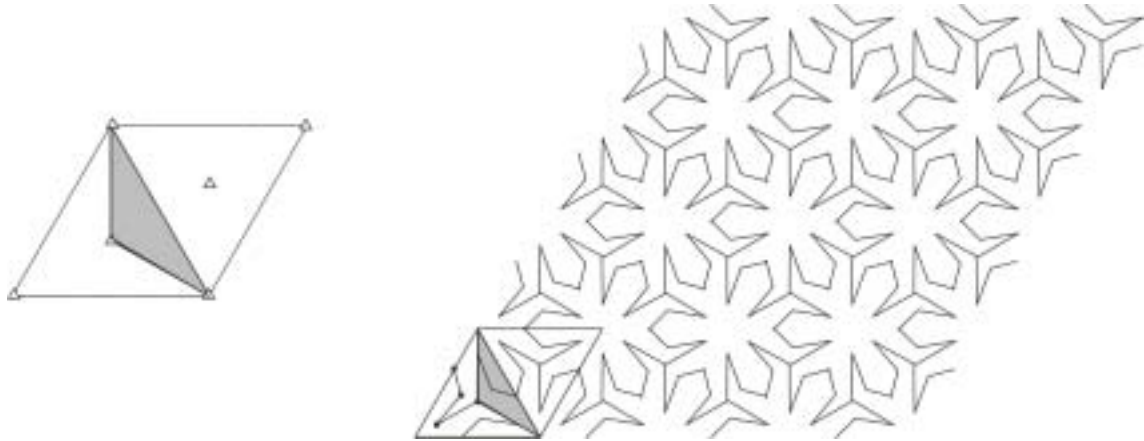
Vegeu el mosaic [exemple3](#)

- **P3M1**: Té 3 simetries axials. Aquesta és la cel·la reticular, en què s'observen els centres de gir. En l'exemple s'observa el motiu mínim.



Vegeu el mosaic [exemple3m1](#)

- **P31M:** Té simetries. Hi ha centres de gir exteriors als eixos de simetria. Aquesta és la cel·la reticular en què s'observen els eixos de simetria i els centres de gir. En l'exemple s'observa el motiu mínim.

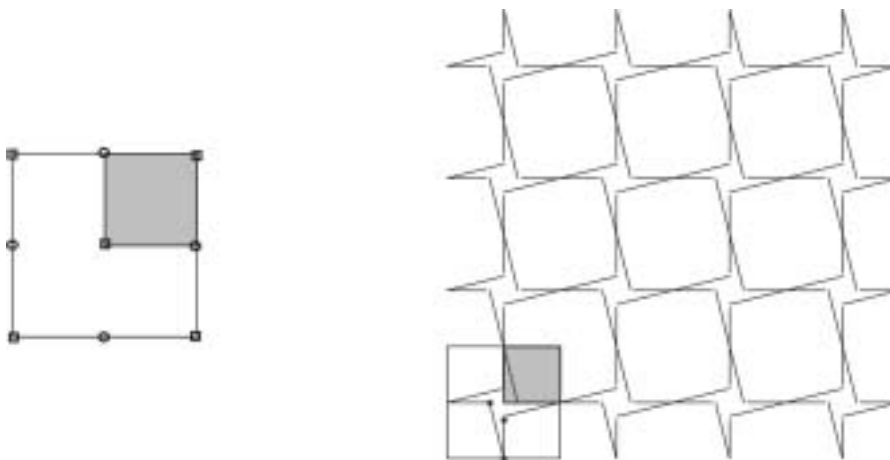


Vegeu el mosaic [exemplep31m](#)

2.3.4 Mosaics d'ordre 4

L'ordre màxim dels girs del seu grup de simetria és 4 i, per tant, conté girs de $360^\circ/4=90^\circ$. Hi ha tres tipus de mosaics d'ordre 4.

- **P4:** No té simetries ni lliscaments. Vegem la cel·la reticular, en què s'observen els centres de gir. En l'exemple s'observa el motiu mínim.



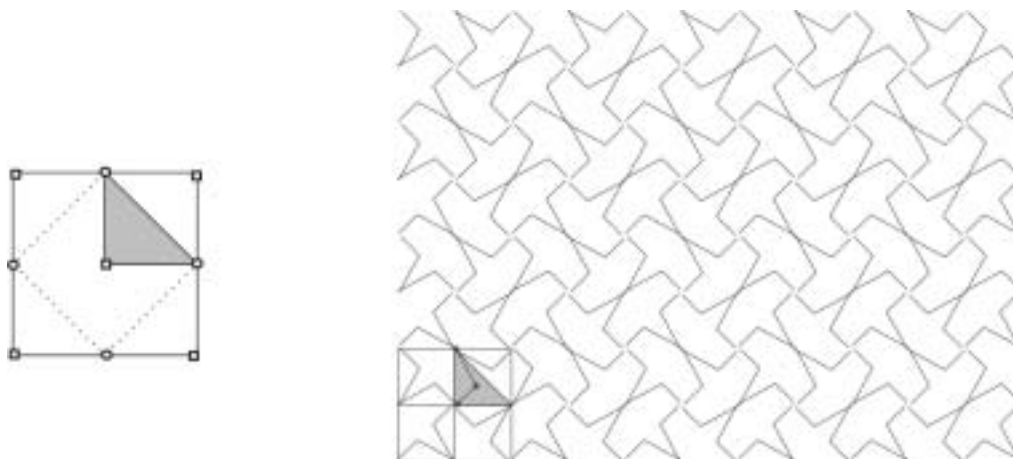
Vegeu el mosaic [exemp4ram](#)

- **P4M**: Per cada centre de gir d'ordre 4, hi passen 4 eixos de simetria. Aquesta és la cel·la reticular amb els centres de gir. En l'exemple s'observa el motiu mínim.



Vegem el mosaic [exemple4m](#)

- **P4G**: Té eixos de simetria que no passen pels centres de gir d'ordre 4 i passen pels d'ordre 2. Aquesta és la cel·la reticular amb els centres de gir. En l'exemple s'observa el motiu mínim.

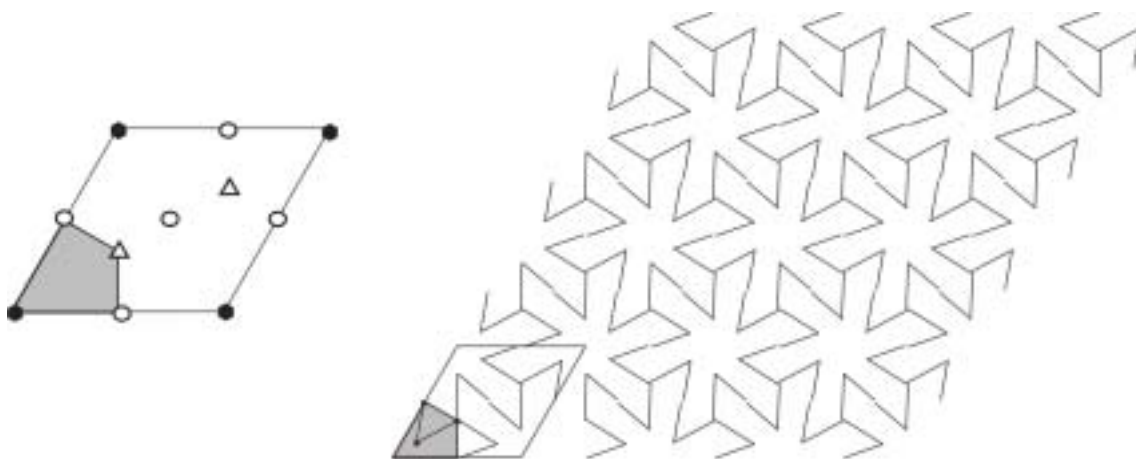


Vegeu el mosaic [exemple4g](#)

2.3.5 Mosaics d'ordre 6

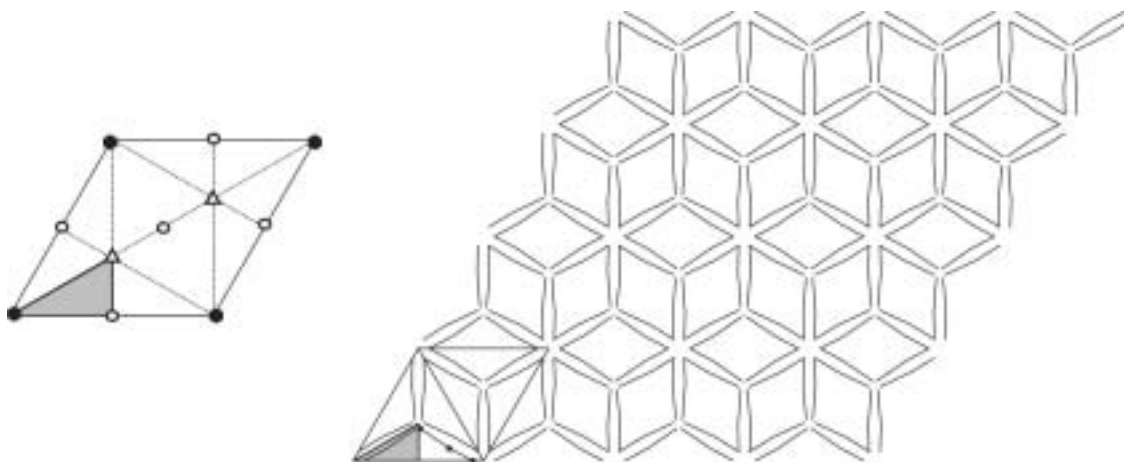
En aquest tipus de mosaics l'ordre màxim dels girs és 6 per tant conté girs de 60° . Hi ha dos tipus de mosaics d'ordre 6:

- **P6:** No apareixen simetries ni lliscaments, hi ha girs de 60° , 180° i 120° . Aquesta és la cel·la reticular en què s'observen els centres de gir. En l'exemple s'observa el motiu mínim.



Vegeu el mosaic [exemplep6](#)

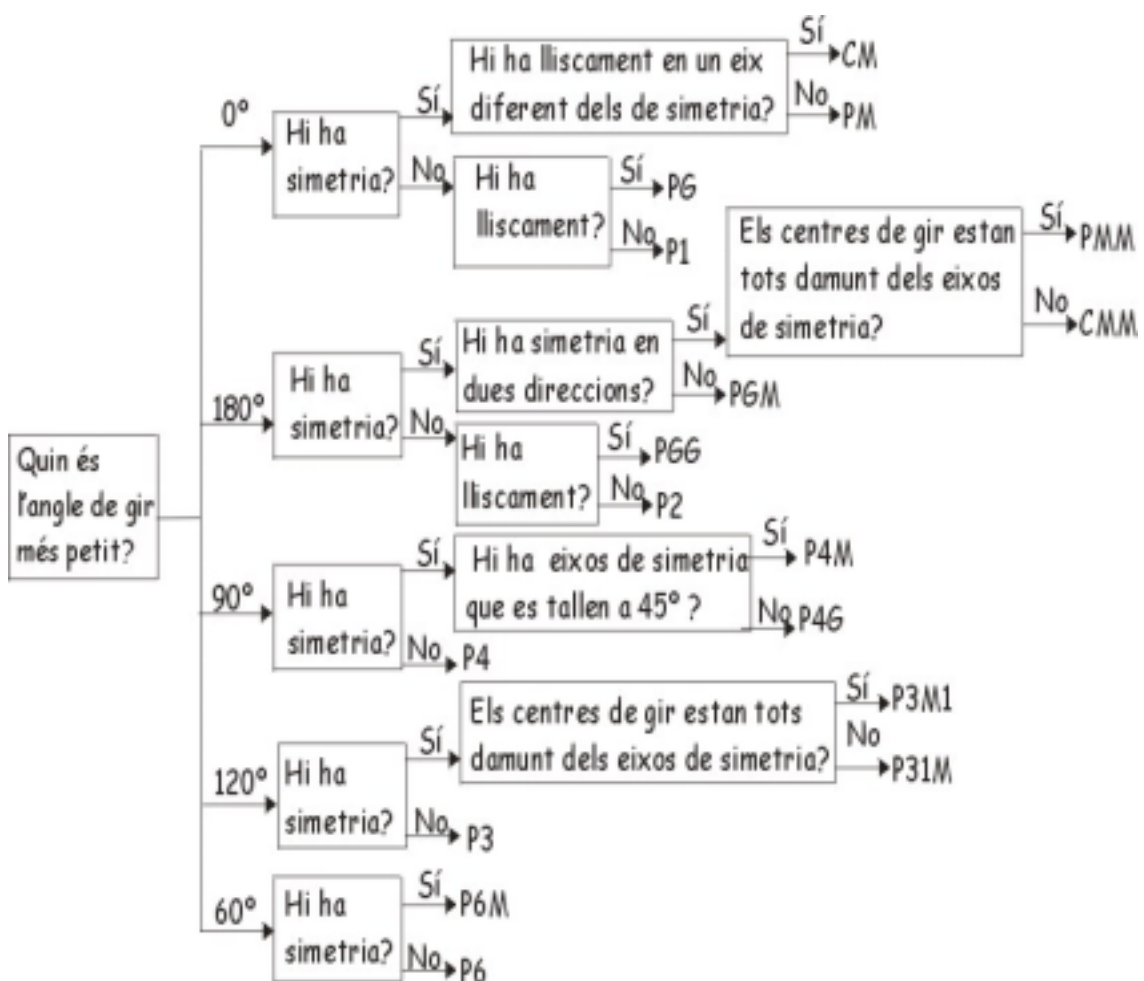
- **P6M:** Té 3 simetries axials que passen per cada centre d'ordre 6. Aquesta és la cel·la reticular en què s'observen els centres de gir i els eixos de simetria. En l'exemple s'observa el motiu mínim.



Vegeu el mosaic [exemplep6m](#)

2.4 Algorisme d'identificació del tipus de mosaic.

Aquest algorisme ens permetrà conèixer el grup de simetria d'un mosaic. Està extret de *Matemàtiques per a l'arquitectura. Problemes resolts*, Piedad Guijarro Carranza i Pere Cruells Pagès. Edicions UPC



3. Recerca de mosaics periòdics

En aquest apartat presento classificats els mosaics que he trobat, en mostro la cel·la reticular i els represento. Com he dit abans, per crear tots els mosaics amb el programa Cabri he construït unes macros que estan al CD, a la carpeta **MacrosMosaics** on a partir del segment que determina la cel·la reticular, el motiu mínim i, en els casos que la cel·la no queda determinada, un punt per fixar-ne l'altura, es poden generar tots els mosaics amb molta facilitat. Es pot consultar l'ajuda (tecla **F1**), per als detalls. Tingueu en compte que en algun mosaic m'he pogut equivocar perquè no he vist alguna simetria i llavors ja és un altre tipus de mosaic. També, en altres casos, algunes cel·les reticulars m'han costat més d'esbrinar i saber quin tipus de mosaic determinaven.

3.1 Recerca de mosaics d'ordre 1

3.1.1 Recerca de mosaics P1

- **Tipus:** P1

Localització: Foto: mosaic del "Palacio de Comares" a l'Alhambra.

Comentari: És un mosaic d'ordre 1 i la seva cel·la reticular és un paral·lelogram, les úniques isometries que deixen el mosaic invariable són les translacions, per tant, és un mosaic $p1$. Tota la cel·la reticular és el motiu mínim.



La cel·la reticular d'aquest mosaic està marcada a la fotografia, a partir d'aquest motiu i les respectives translacions s'origina el mosaic

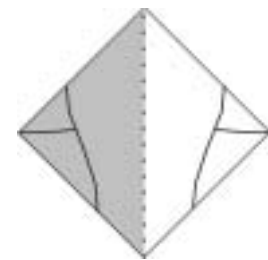
Vegeu la representació aproximada d'un mosaic p1 a l'[exemplep11](#) cedit pel tutor.

3.1.2 Recerca de mosaics CM

- **Tipus:** Cm

Localització: Foto de les rajoles de les pistes de Baqueira Beret. Gener de 2005

Comentari: És un mosaic d'ordre 1, no té cap gir, i la cel·la reticular és un rombe i apareixen simetries axials paral·leles, per tant serà un mosaic *cm*. Per aconseguir aquest mosaic només cal fer una simetria axial al motiu mínim i després aplicar-hi les dues translacions independents definides pels costats de la cel·la.

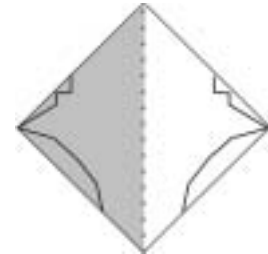


Vegeu la representació del mosaic a [exemplecm2](#)

- **Tipus:** Cm

Localització: Foto del llibre ‘ Simetría en la Alhambra’

Comentari: És un mosaic d’ordre 1. La cel·la reticular és un paral·lelogram i a la fotografia també he marcat la cel·la del mosaic.



Dins la cel·la reticular observem que hi ha una simetria axial. A la zona grisa està el motiu mínim. Si fem una simetria axial,

obtenim la cel·la reticular del mosaic *cm*, i si després traslladem segons els segments de la base reticular en les dues direccions, obtenim el mosaic.

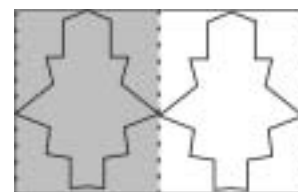


Vegeu la representació del mosaic a [exemplecm1](#)

3.1.3 Recerca de mosaics PM

- **Tipus:** pm

Localització: Foto del llibre *Simetria en la Alhambra*



Comentari: És un mosaic d'ordre 1. La cel·la reticular és un rectangle. Aquest tipus de mosaic només té eixos de simetria en una sola direcció. En aquest mosaic el motiu mínim és la zona grisa. Si li apliquem una simetria axial, obtenim la cel·la reticular i si després traslladem la cel·la amb els segments definits per la cel·la, obtindrem un mosaic pm com el de la fotografia.



Vegeu la representació del mosaic a [exemplepm1](#)

3.1.4 Recerca de mosaics PG

- **Tipus:** pg

Localització: Foto del llibre *Los 17 grupos de simetría en el arte mudejar aragonés*

Comentari: És un mosaic d'ordre 1. Si observem la cel·la reticular podem veure que és un rectangle i que no presenta eixos de simetria, ni cap gir, però sí eixos de lliscament.



El motiu mínim és la zona grisa i la línia marcada més fina és un eix de lliscament.

En els mosaics pg la seva cel·la reticular és més difícil de trobar, ja que trobo que és més difícil identificar els eixos de lliscament



Vegeu la representació del mosaic a [exemplepg1](#)

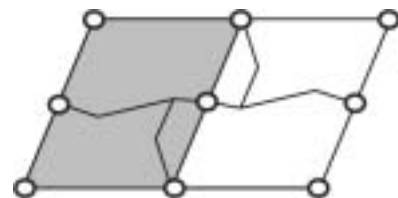
3.2 Recerca de mosaics d'ordre 2

3.2.1 Recerca de mosaics P2

- **Tipus:** P2

Localització: Foto del paviment d'un carrer de Tarragona. Any 2004

Comentari: És un mosaic d'ordre 2. Aquesta cel·la també em va costar més de localitzar. La cel·la reticular és un paral·lelogram. Dins la cel·la reticular no s'observa cap eix de simetria, ni cap eix de



lliscament, però sí un gir de 180° . Per tant, per obtenir la cel·la reticular dibuixem el motiu mínim (la zona grisa del paral·lelogram), apliquem una simetria central i ja hem format la cel·la.

Ara, podem aplicar les dues translacions definides pels costats de la cel·la i obtindrem un mosaic $p2$.



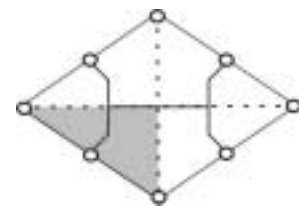
Vegeu la representació del mosaic a [exemplep21](#)

3.2.2 Recerca de mosaics CMM

- **Tipus:** cmm

Localització: Foto de les rajoles de l'hotel "Lago Nakuru" de Kenya. Any 2004

Comentari: És un mosaic d'ordre 1, la cel·la reticular és un paral·lelogram. Observem que dins la cel·la hi ha eixos de simetria perpendiculars. Quan obtenim la cel·la reticular, podem



fer les respectives translacions definides pels costats del paral·lelogram i obtindrem el

mosaic cmm .



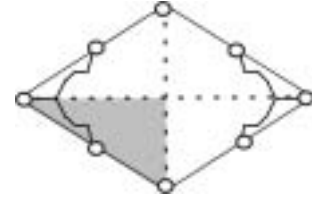
Vegeu la representació del mosaic a

[exemplecmm1](#)

- **Tipus:** *cmm*

Localització: Foto del mosaic de la barra del bar del càmping “La torre del sol” a Mont-roig del Camp. Agost de 2004

Comentari: És un mosaic d'ordre 2. La cel·la reticular és un paral·lelogram. Aquesta cel·la és fàcil de trobar. Observem que dins la cel·la hi ha dos eixos de simetria perpendiculars. Per tant, per obtenir la cel·la del mosaic *cmm*, hem d'aplicar les respectives simetries axials al motiu mínim i tindrem la cel·la reticular, després haurem de traslladar amb els vectors definits per la cel·la reticular per aconseguir el mosaic.

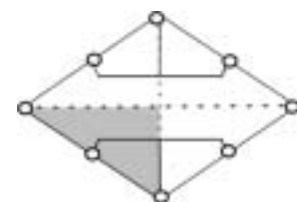


Vegeu la representació del mosaic a [exemplecmm3](#)

- **Tipus:** *cmm*

Localització: Foto de les rajoles d'un terra de Roma. Viatge d'estudis, any 2004

Comentari: És un mosaic d'ordre 2. La cel·la reticular és un paral·lelogram. Observem que dins la cel·la reticular hi ha dos eixos de simetria perpendiculars. El motiu mínim és la zona grisa. Si fem les simetries axials, obtindrem la cel·la reticular. Per obtenir el



mosaic, cal fer les dues translacions independents, els vectors de les quals seran els costats de la cel·la.



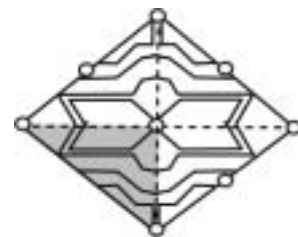
Vegeu la representació del mosaic a [exemple3cmm](#)

- **Tipus:** cmm

Localització: Foto de la paret d'una casa del c/ Descalços, a Tarragona. Any 2005

Comentari: És un mosaic d'ordre 2. La cel·la reticular

d'aquest mosaic és un rombe i la zona de fosc és el motiu mínim. Per aconseguir la cel·la reticular només cal que apliquem les simetries i, després, en aplicar les dues translacions definides pels costats es genera el mosaic.



Vegeu la representació del mosaic a [exemplecmm4](#)

3.2.3 Recerca de mosaic PMM

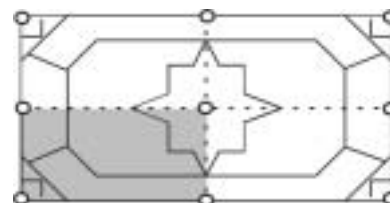
- **Tipus:** pmm

Localització: Foto del llibre *Simetria en la Alhambra*

Comentari: És un mosaic d'ordre 2. La cel·la reticular d'aquest tipus de mosaic també és molt fàcil de trobar, és un rectangle. Observem que el motiu mínim es troba en la part grisa del reticle i per aconseguir la cel·la hem d'aplicar dues simetries axials perpendiculars.

Per generar tot el mosaic només caldrà aplicar les dues

translacions independents i aconseguirem el mosaic *pmm*. En aquest mosaic es té en compte el color, sinó es tingués en compte es tractaria d'un mosaic d'ordre 4.



Vegeu la representació del mosaic a [exemplepmm1](#)

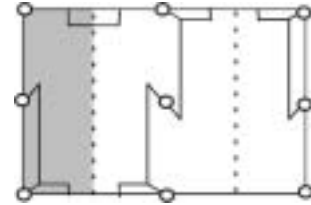
3.2.4 Recerca de mosaics PMG

- **Tipus:** pmg

Localització: Foto del parc central (Eroski) de Tarragona. Any 2004

Comentari: És un mosaic d'ordre 2. Trobar la cel·la i el motiu mínim d'aquest mosaic és una mica més difícil d'esbrinar. La cel·la reticular és un rectangle.

El motiu mínim es troba a la zona grisa. Per aconseguir la cel·la hem de seguir els següents passos. Primer apliquem una simetria axial al motiu mínim, en segon lloc als segments resultants els apliquem una simetria central i, per completar la cel·la, tornem a aplicar una simetria axial; així obtenim la cel·la reticular d'aquest mosaic *pmg*. Ara ja es poden aplicar les dues translacions segons els costats per traslladar la cel·la pel pla.



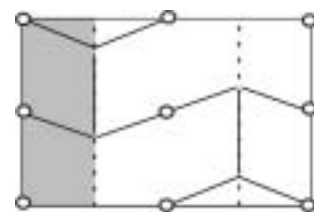
Vegeu la representació del mosaic a [exemplepmg2](#)

- **Tipus:** pmg

Localització: Foto del paviment d'un carrer de Roma. Any 2004

Comentari: És un mosaic d'ordre 2. La base reticular és un rectangle. Si ens hi fixem el motiu mínim no és del tot evident. Per dibuixar la cel·la reticular d'aquest mosaic haurem de fer dues simetries axials i una central.

Si ens fixem amb el motiu mínim primer apliquem una simetria axial als segments resultants, una simetria central i després una altra simetria axial. Així, obtenim la cel·la reticular del mosaic *pmg*.



Per últim caldrà aplicar les dues translacions independents i obtindrem un mosaic com el de la fotografia.

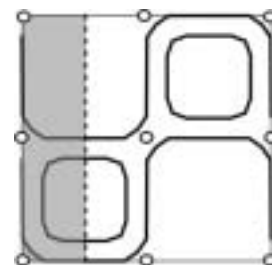


Vegeu la representació del mosaic a [exemplepmg1](#)

- **Tipus:** pmg

Localització: Foto del terra de la Rambla Nova, Tarragona. Any 2004

Comentari: És un mosaic que segurament tothom ha vist i si no ho han fet és perquè no s'hi ha fixat. És un mosaic d'ordre 2 i té simetries i girs de 180° . La cel·la reticular no és del tot evident, la zona fosca el motiu mínim i per crear la cel·la hem aplicat una simetria axial i un gir de 180° al voltant del punt central assenyalat. Després traslladem amb els dos vectors determinats per la cel·la i generem el mosaic de tipus *pmg*.



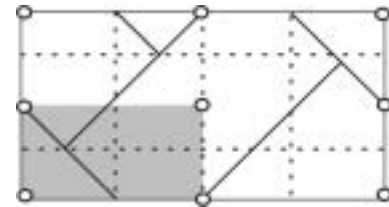
Vegeu la representació del mosaic a [exemplepmg3](#)

3.2.5 Recerca de mosaics PGG

- **Tipus:** pgg

Localització: Foto de les rajoles d'un carrer de Tarragona. Any 2004

Comentari: En aquest tipus de mosaic és més difícil de trobar la cel·la reticular i el motiu mínim. És un mosaic d'ordre 2 i com podem veure a la cel·la reticular, no hi



ha simetries axials, però sí simetries amb lliscaments perpendiculars.

Agafem els dos vectors de translació que venen definits per la base reticular i obtindrem el mosaic de la fotografia.



Vegeu la representació del mosaic a [exemplepgg1](#)

3.3 Recerca de mosaics d'ordre 3

3.3.1 Recerca de mosaics P3

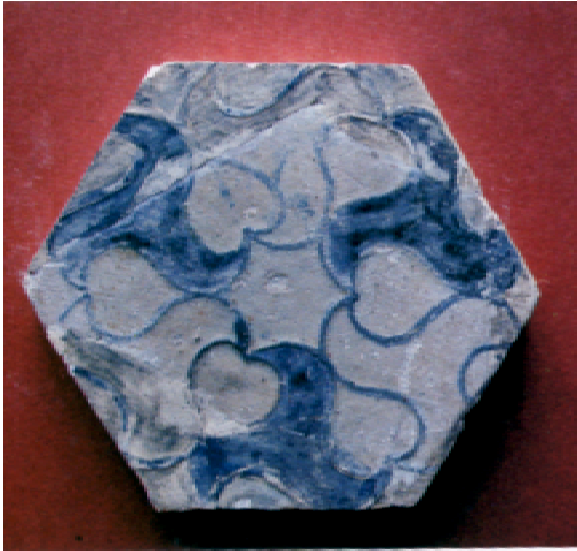
- **Tipus:** P3

Localització: Foto del llibre *Los 17 grupos de simetría en el arte mudéjar aragonés*

Comentari: És un mosaic d'ordre 3. Si tenim en compte el color, dins la cel·la no apareixen eixos de simetria, per tant, serà un mosaic $p3$. El



motiu mínim és la zona interior al rombe. Partim el motiu mínim per la diagonal major, els apliquem girs de 120° respecte als dos centres interiors i obtindrem la cel·la reticular. Per obtenir tot el mosaic hem de fer les dues translacions independents.



Vegeu la representació del mosaic a [exemplep31](#)

3.3.2 Recerca de mosaics P31M

- **Tipus:** $p31m$

Localització: Foto del llibre *Simetría en la Alhambra*.

Comentari: Aquest mosaic es pot trobar al “Palacio de Comares”.

És un mosaic d'ordre 3, alguns dels centres d'ordre 3 estan marcats a la fotografia.

El motiu mínim és la part grisa. Per obtenir la

cel·la reticular farem dos girs de 120° i aplicarem una

simetria axial per completar el triangle dret. Quan

l'obtinguem farem les dues translacions independents i

obtindrem el mosaic $p31m$.





Vegeu la representació del mosaic a [exemple8alhambra](#)

3.3.3 Recerca de mosaics P3M1

- **Tipus:** $p3m1$

Localització: Foto del llibre *Los 17 grupos de simetría en el arte mudéjar aragonés*.

Comentari: És un mosaic d'ordre 3. La cel·la reticular té eixos de simetria de

direccions diferents, els punts d'intersecció dels quals són

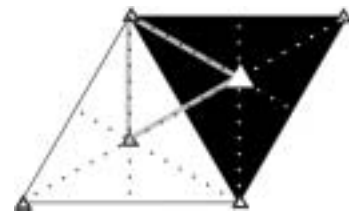
centres de gir d'ordre 3. El motiu mínim del mosaic està

a l'interior del perímetre gris. Hem d'aplicar girs de 120°

al voltant dels dos centres interiors per completar la cel·la reticular. Si després fem les

respectives translacions obtindrem el mosaic $p3m1$. En aquest mosaic es té en compte

el color.



Vegeu la representació del mosaic a [exemplep3m1](#)

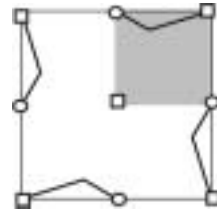
3.4 Recerca de mosaics d'ordre 4

3.4.1 Recerca de mosaics P4

- **Tipus:** P4

Localització: Foto del terra de l'estació d'autobusos de Sants a Barcelona. Any 2004

Comentari: És un mosaic d'ordre 4. Els centres d'ordre 4 es troben als centres i als vèrtexs de les rajoles. Com poden observar en la cel·la



reticular no hi ha cap eix de simetria, per tant, serà un mosaic $p4$. Per formar el mosaic de la fotografia només cal dibuixar els segments de la zona grisa i aplicar-los girs de 90° fins a completar la cel·la. Després si traslladem amb els vectors dels costats de la cel·la obtindrem el mosaic $p4$.

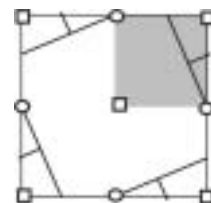


Vegeu la representació del mosaic a [exemple42](#)

- **Tipus:** P4

Localització: Foto del paviment de la Casa Castellarnau. Desembre de 2004

Comentari: És un mosaic d'ordre 4, els centres de gir d'ordre 4 es troben al centre de les rajoles tan les grans com les petites. Dins la cel·la reticular no s'observa cap simetria axial, per tant serà un mosaic



$p4$. Quan trobem el motiu mínim li apliquem girs de 90° , obtenim la cel·la reticular, i després apliquem les respectives translacions.



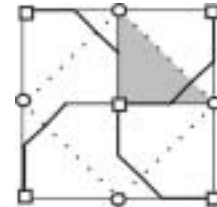
Vegeu la representació del mosaic a [exemplep41](#)

3.4.2 Recerca de mosaics P4G

- **Tipus:** p4g

Localització: Foto del “Palacio de Comares” a l’Alhambra de Granada. Any 2004

Comentari: És un mosaic d’ordre 4. Encara que sembla molt simple, el motiu mínim no és del tot evident. La zona de color gris és el motiu mínim. Veiem que hem d’aplicar girs de 90° i una



simetria axial que no conté els centres de gir d’ordre 4. Amb les respectives translacions obtindrem l’anomenat “*mosaic os*” de l’Alhambra.

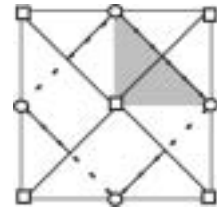


Vegeu la representació del mosaic a [exemple6p4g](#)

- **Tipus:** p4g

Localització: Foto del terra d'una casa de Mont-roig del Camp. Any 2004

Comentari: És un mosaic d'ordre 4. En la cel·la reticular apareixen girs de 90° i una simetria axial que no conté els centres de gir d'ordre 4. La zona grisa és el motiu mínim d'aquest mosaic, quan l'obtenim efectuem les respectives translacions i obtenim el mosaic



p4g.



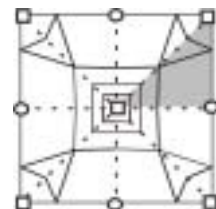
Vegeu la representació del mosaic a [exemple2p4g](#)

3.4.3 Recerca de mosaics P4M

- **Tipus:** p4m

Localització: Dibuix d'alumnes de 2n d'ESO. Any 2004

Comentari: És un mosaic d'ordre 4. La base de reticular és fàcil de trobar els seus vèrtexs han de ser centres d'ordre 4 i el centre de la cel·la també. Quan obtenim la cel·la observem que dins la cel·la reticular hi ha quatre eixos de simetries axials que passen pels centres d'ordre 4. El motiu mínim és on hi ha la zona grisa i per obtenir la cel·la reticular hem de fer les



respectives simetries axials fins completar la cel·la. Després fem les respectives translacions i obtenim el mosaic $p4m$.

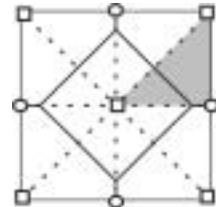


Vegeu la representació del mosaic a [exemplep4m3](#)

- **Tipus:** $p4m$

Localització: Foto del paviment d'una àrea de servei del Rosselló. Any 2004

Comentari: Com s'observa en la fotografia és un mosaic d'ordre 4, els centres de gir d'ordre 4 es troben al centre dels quadrats i dels octàgons. La cel·la reticular és un quadrat i observem com pels centres d'ordre 4 passen quatre eixos de simetria per tant, és un mosaic $p4m$. Amb les simetries



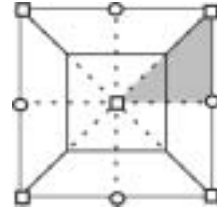
i les dues translacions obtindrem el mosaic.

Vegeu la representació del mosaic a [exemplep4m2](#)

- **Tipus:** $p4m$

Localització: Foto del terra de la cuina de la Casa Castellarnau. Desembre 2004

Comentari: És un mosaic periòdic que està fet amb dos tipus de rajoles. Busquem la cel·la reticular i, quan l'hem trobat, observem que conté eixos de simetria que passen pels centres de gir d'ordre 4 i d'ordre 2. A partir del motiu mínim fem les respectives simetries axials i després les respectives translacions i obtenim el mosaic de tipus $p4m$.

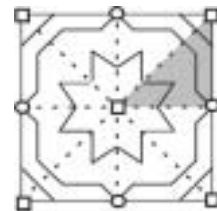


Vegeu la representació del mosaic a [exemple9p4m](#)

- **Tipus:** $P4m$

Localització: Foto del terra de la casa Castellarnau. Desembre de 2004.

Comentari: A primer cop d'ull veiem que és un mosaic d'ordre 4. Els centres d'ordre 4 es troben als centres de les estrelles i als centres dels petits rombes. Té simetries axials que passen per cada centre d'ordre 4, per tant, és un mosaic $p4m$. El motiu mínim és la part de color fosc.



Amb les respectives isometries i translacions obtenim un mosaic com el de la fotografia.



Vegeu la representació del mosaic amb el programa Cabri II a [exemplep4m4](#)

3.5 Recerca de mosaics d'ordre 6

3.5.1 Recerca de mosaics P6

- **Tipus:** p6

Localització: Foto del llibre *Simetría en la Alhambra*

Comentari: És un mosaic d'ordre 6. Els vèrtexs de la cel·la són centres d'ordre 6. És fàcil de trobar. No té eixos de simetria i, per tant, serà un p6. En aquest mosaic el motiu



mínim és la zona grisa i, per obtenir la cel·la, li hem d'aplicar girs de 120° i després una simetria central.

A partir de la cel·la reticular, mitjançant les dues translacions independents, obtindrem el mosaic.



Vegeu la representació del mosaic a [exemplep61](#)

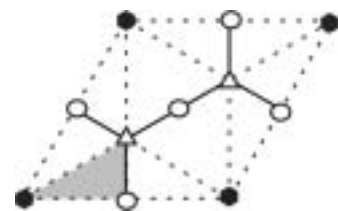
3.5.2 Recerca de mosaics P6M

- **Tipus:** P6m

Localització: Foto de les rajoles del passeig de Gràcia de Barcelona. Any 2004

Comentari: És un mosaic d'ordre 6. Primer de tot hem de trobar la cel·la reticular, a partir del qual es genera el mosaic. Els vèrtexs de la cel·la són d'ordre 6.

Dins la cel·la observem que hi ha simetries axials amb eixos que passen pels centres de gir d'ordre 3, les apliquem i obtenim la cel·la reticular del mosaic de tipus $p6m$.



Després hem de traslladar la cel·la amb les dues translacions independents i obtindrem el mosaic del passeig de Gràcia.

En aquest mosaic no he tingut en compte els dibuixos de la rajola, si es tenen en compte els dibuixos és un mosaic $p3$.



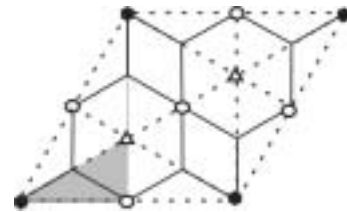
Vegeu la representació del mosaic a [exemplep6m2](#)

- **Tipus:** $P6m$

Localització: Foto del terra d'una habitació de la casa Castellarnau. Desembre 2004

Comentari: Com es pot observar és un mosaic d'ordre 6.

Els centres de gir d'ordre 6 es troben al centre de les estrelles. El motiu mínim es troba dins el triangle gris de



$30^\circ-60^\circ-90^\circ$, per aconseguir la cel·la reticular fem les respectives simetries axials.

Després fem les dues translacions definides per la cel·la i obtenim el mosaic de la fotografia.



Sense tenir en compte els colors és un $p6m$, si es tenen en compte els colors és un mosaic de tipus $p31m$. Vegeu la representació del mosaic a [exemplep6m1](#)

4. Conclusions

Per finalitzar el treball, crec que he assolit als meus objectius:

- Es poden caracteritzar els diferents tipus de mosaics des del punt de vista de la seva geometria (moviments que els deixen invariables).
- Es troben molts mosaics de diferents tipus a l'entorn ciutadà i en fonts bibliogràfiques diverses.
- El programa CABRI permet generar exemples de cada tipus i fer reproduccions dels mosaics trobats a l'entorn.
- L'aplicació CABRIJAVA permet crear presentacions interactives amb format WEB.
- M'he fet conscient de diverses qüestions que podrien obrir noves vies de recerca:
 - Informació escassa sobre el tema. Això podria propiciar una recerca de fonts.
 - Dificultat de l'estudi teòric. D'aquí es podria fer una recerca des d'un punt de vista geomètric més tècnic.
 - Dificultat en la identificació, perquè de vegades algunes simetries no es perceben a primera vista.
 - Dificultat en trobar certs tipus de mosaics, com per exemple els pg, els pgg i els p3m1. En canvi, d'ordre 4 n'hi ha per tot arreu. Es podria fer un estudi estadístic de la seva freqüència.

En definitiva, estic molt contenta dels resultats obtinguts i d'haver elegit aquest tema i ara que veig que me n'he sortit, m'ha agradat molt, encara que ha hagut moments en que em costava molt esbrinar-los i m'equivocava. Si algun dia tinc temps, aprofundiré en el meu treball, buscant més mosaics ja que alguns no els he pogut trobar i els he agafat de llibres.

5. Bibliografia

- Bossard, Yvon. *Rosaces, frises et pavages*. CEDIC. Paris, 1977.
- Fenoll Hach-Alí, Purificación i López Galindo, Alberto. *Simetría en la Alhambra, ciencia, belleza e intuición*. Universidad de Granada, CSIC. Granada, 2003.
- Guijarro, Piedad Carranza i Cruells Pagès, Pere. *Matemàtiques per a l'arquitectura. Problemes resolts*. Edicions UPC. Barcelona, 2002.
- Masip, Ramon: *La geometria a l'educació secundària*. 2000.
- Picó, Teresa. *Un passeig matemàtic per Catalunya*. Pagès editors. Lleida, 2004.
- Ramírez, Ángel i Usón, Carlos. *Los 17 grupos de simetría en el arte mudéjar aragonés*. UNED Aragón, Centro de Estudios Mudéjares.
- <http://www-ma2.upc.es/~vera/passeigMatematic/cap08.doc>.