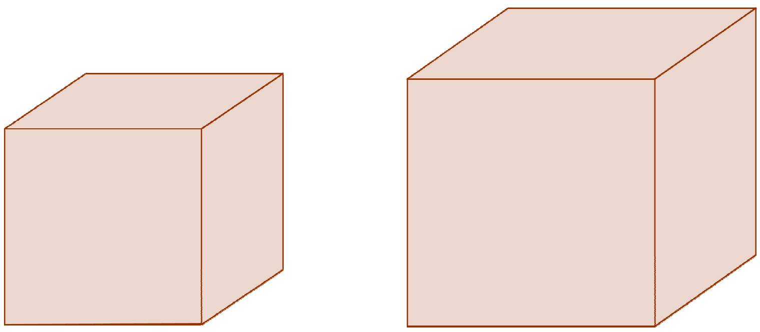
La duplicación del cub



Mercè Sunyer
Institut Pons d'Icart

Treball de recerca de 2n BAT
Títol: La duplicación del cub
Autora: Mercè Sunyer
Tutor: Ramon Nolla
Any 2011

Índex

1. Introducció

El tema d’aquest treball no va ser el primer que em vaig plantejar. El primer que em van proposar de fer va ser un estudi sobre “Les matemàtiques a la pel·lícula *Hipàtia*”. El tutor em va explicar quins temes matemàtics s’hi podrien trobar, i em va cridar l’atenció el tema de les corbes còniques i les seves aplicacions. A partir d’aquí vaig començar a tractar el tema de les corbes còniques, i vaig veure que era molt extens, massa, crec jo, per a un treball de recerca. Seguint les recomanacions del tutor, vaig començar a estudiar el tema a partir dels orígens i em vaig trobar que un dels possibles orígens era la solució de Menecm al problema de la duplicació del cub. Vaig estudiar-la junt amb altres solucions d’aquest mateix problema i vaig veure que el problema en si i les seves possibles solucions m’atreia. En aquell moment, ho vaig consultar amb el tutor i em va dir que el problema tenia material suficient com per dedicar-hi un treball. Va ser llavors quan vaig decidir que faria el treball sobre el problema de la duplicació del cub. El tema, a més d’atreure’m per estudiar com diversos autors van trobar la solució a un mateix problema per mètodes molt diferents i perquè d’aquestes solucions n’han sortit molts conceptes matemàtics actuals, també em va cridar l’atenció per l’època, ja que el temps de la Grècia clàssica i la seva filosofia sempre m’han interessat molt. A més, m’apassionava poder explicar unes solucions d’una manera entenedora i acompanyar-les de presentacions en moviment per clarificar-les.

Aquest treball s’hauria pogut estendre moltíssim més, explotant totes les solucions que transcriu Eutoci i tots els comentaris que s’han fet sobre aquest problema. Per això hi he hagut de posar uns límits. Seguint les indicacions del meu tutor, m’he centrat en les resolucions més antigues: la d’Arquites, la de Menecm, l’atribuïda a Plató i la d’Eratòstanes, a part de la introductòria d’Hipòcrates. Però cada una d’aquestes eleccions té un rerefons. El més evident és el de Menecm, ja que, com he dit, va ser a través de la seva solució com vaig arribar a aquest problema. La d’Arquites em va cridar l'atenció pel tractament de les figures de revolució i en tres dimensions, a part que va ser l'autor més antic a trobar la solució, i penso que això també és important. L'atribuïda a Plató l'he estudiada perquè és de fàcil comprensió i, a més, és la possible base d'altres solucions. A més, aquesta, juntament amb la d'Eratòstanes la vaig triar per poder estudiar algunes solucions estrictament geomètriques i dues més que hi adjuntaven un aparell mecànic. Inicialment, aquí s'acabava el meu estudi estricte de les solucions. Però buscant informació, vaig trobar diferents explicacions de la possible solució d'Èudox, que havia descartat perquè Eutoci no l'havia considerat, i les vaig trobar interessants, per això vaig decidir estudiar-les també. Quant a l'aportació d'Hipòcrates, malgrat que en dic poca cosa perquè no se'n té gaire informació, penso que és molt interessant, ja que potser sense ell no s'hauria trobat la solució, o s'hauria trobat d'una altra manera que potser no hauria generat tants conceptes matemàtics nous com han generat aquestes solucions. A part de l'estudi d'aquests autors, he adjuntat unes interpretacions actuals, a més de teories i explicacions sobre els escrits, temes que he trobat que són importants, ja que, en un problema com aquest, no s'ha de mirar només la solució del problema, sinó el rerefons social que va tenir, així com les filosofies, els mites i les controvèrsies relacionades. Respecte a l'estat de la qüestió del problema en l'època en què es va estudiar, hi dedico un apartat al cos del treball.

El mètode que he seguit per fer aquest treball ha consistit, primer, a entendre el problema i estudiar les resolucions basant-me en les transcripcions d'Eutoci, entenent-les bé i fent servir altres recursos, com el suport electrònic, per comprendre i lligar els conceptes que ell dóna com a clars. També he fet algunes presentacions amb el programa Geogebra per ensenyar comprovacions i per acabar d'entendre algun concepte. He consultat altres llibres buscant solucions alternatives i comentaris fets per matemàtics posteriors. En aquesta part també he fet alguna comprovació amb el programa abans esmentat. També he llegit i resumit aspectes menys matemàtics i més històrics, com l'autenticitat de la teoria de Plató o l'autenticitat de l'escrit d'Eutoci. Finalment, he redactat, he elaborat els esquemes i hi he adjuntat les presentacions Geogebra, en suport electrònic.

Les fonts de consulta utilitzades figuren a la bibliografia. Entre els llibres emprats, n'hi ha alguns que són en anglès, de comprensió més difícil i més lenta. He utilitzat alguns llibres matemàtics, també de comprensió feixuga, així com fotocòpies, i treballs extrets d'internet. Com es pot veure, he fet servir la *wikipèdia*, sense fiar-me'n massa, per les biografies que no constaven a la *Gran enciclopèdia catalana*.

M'he trobat amb dificultats a l'hora de presentar la solució d'Arquites, ja que és en tres dimensions, i no he pogut aprendre a fer servir un programa de geometria en tres dimensions. Tots els esquemes, llevat de quan ho especifico, han estat elaborats per mi, amb el programa Geogebra o dibuixats a mà i escanejats. A més, també m'he trobat amb dificultats a l'hora de la comprensió d'alguna explicació, però consultant altres fonts l'he resolt. Agraeixo molt especialment l'ajuda que m'ha proporcionat el meu tutor.

2. El problema: com es duplica un cub?

La duplicació del cub forma part d'un grup de tres problemes plantejats a l'època clàssica que no es poden resoldre amb regle i compàs. Els altres dos són la trisecció de l'angle i la quadratura del cercle. La trisecció de l'angle consisteix, donat un angle, a dividir-lo en tres parts iguals. Aquest problema es pot resoldre mitjançant la corba d'Hípias, que es genera a partir de la intersecció de dues rectes: una horitzontal amb moviment uniforme vertical i l'altra amb moviment uniforme angular; els punts d'intersecció d'aquestes dues rectes formen la corba. La quadratura del cercle és el problema més conegut en l'època actual, fins al punt que es fa servir l'expressió "això és com la quadratura del cercle" per referir-se a una cosa impossible d'aconseguir. Consisteix, donat un cercle, a construir un quadrat d'igual àrea. El problema també es resol fent servir la corba d'Hípias.

2.1. Les llegendes

Hi ha dues explicacions mítiques de com es va plantejar el problema. La primera està relacionada amb la tomba que el rei Minos de Creta va fer construir per a Glauc:

> Es diu que un dels poetes tràgics antics havia representat Minos fent preparar una tomba a Glauc [el seu fill] i, havent insistit que tingués cent peus de llargada en tots els seus costats, digué: "Has triat la cambra sepulcral del rei petita; que sigui doblada; no et confonguis sobre el que convé, i dobla el més aviat possible cada part de la tomba."[1]

[1] Nolla, *Estudis i activitats sobre problemes clau de la Història de la Matemàtica* p. 299. La llegenda s'atribueix a una tragèdia antiga, que Von Wilamowitz descarta que pertanyi a cap dels tres grans tràgics, Èsquil, Sòfocles i Eurípides (vegeu Thomas Heath, *A history of Greek mathematics,* p. 245).

La segona té com a protagonista l'oracle d'Apol·lo a l'illa de Delos:

> els delians, havent interrogat l'oracle sobre la manera de deslliurar-se de la pesta, van rebre l'ordre del déu de construir un altar doble del que ja existia. Aquest problema abocà els arquitectes contra un obstacle singular. Es preguntaven de quina manera es podia fer un sòlid doble d'un altre. Interrogaren Plató sobre la dificultat. Aquest els respongué que déu s'havia dirigit així a l'oracle, no perquè ell tingués necessitat d'un altar doble, sinó per retreure als grecs la seva negligència en l'estudi de les matemàtiques i per fer poc cas de la geometria.[2]

2.2. El problema

Després dedicarem atenció a la fortuna de les dues narracions mítiques, ara expliquem el problema en termes comprensibles. En el primer text, veiem que Minos ordena duplicar totes les parts del cub. La magnitud del problema es va fer evident quan, aplicada la solució dita per Minos de doblar cada costat del cub, es van adonar que el volum es multiplicava per vuit, mentre que l'objectiu era doblar el volum. Per això en el segon text, els geòmetres ja demanen la solució a Plató, sense caure en aquest parany.

El problema planteja la duplicació del volum d'un cub qualsevol. Si n'agafem un que tingui com a aresta el valor a i al volum d'aquest cub l'anomenem "V_c", com que per calcular el volum d'un cub s'ha d'elevar al cub el valor de l'aresta, $V_c = a^3$ serà el volum del cub inicial que té com a aresta a.

És clar que, en ser un cub, és a dir, una figura equilàtera i regular, en canviar de mida un element s'han de canviar la de tots en proporció, és a dir, de les arestes, de les cares, i així també varien el volum, la superfície...

[2] Ibídem.

Un cop vist l'enunciat del problema, la solució sembla senzilla: es duplica el valor de les arestes i tot queda duplicat, per tant, el volum del cub també. Però realment, aquesta teoria no és correcta, ja que s'ha de duplicar tot proporcionalment. Vegem-ho: en el cas que dupliquéssim el valor de les arestes, l'aresta valdria $2a$, i el volum que obtindríem en elevar-la al cub seria $V_1 = (2a)^3$, que equival a $8a^3$, que és igual al volum inicial multiplicat per vuit ($8a^3 = 8 \times a^3 \rightarrow V_1=8V_c$). Així, en comptes de doblar-lo, l'hauríem fet vuit vegades més gran.

El que es vol aconseguir és un cub el volum del qual sigui $2V_c= 2a^3$. Per trobar el valor que ha de tenir l'aresta del cub duplicat, hem d'operar de la manera que exposem a continuació:

Suposem que l'aresta que volem trobar val *x*. Per tant, el volum del cub duplicat val $V_2 = x^3$.

Al mateix temps, com que sabem que el volum que volem aconseguir és el doble que l'inicial ($V_2 = 2V_c$), igualem les dues expressions de V_2 i trobem: $x^3 = 2a^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{2a^3} \rightarrow x = a\sqrt[3]{2}$.

D'aquí arribem a la conclusió que l'aresta del cub duplicat equival a la de l'inicial multiplicat per l'arrel tercera de 2.

Per comprovar que aquesta equació és correcta, ho farem amb nombres reals, i així comprovarem que dóna el mateix resultat si fem tot el procediment que si mirem de trobar el valor de l'aresta mitjançant l'arrel cúbica de dos.

Això es pot comprovar dinàmicament mitjançant la presentació amb geogebra "Presentació1.ggb".

Aresta inicial	Volum inicial	Volum final	Aresta final	Aresta inicial multiplicada per $\sqrt[3]{2}$
a	a^3	$2a^3$	$\sqrt[3]{2a^3}$	$a\sqrt[3]{2}$
1	1	2	1,25992105	1,25992105
2	8	16	2.5198421	2,5198421
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0,6299605249	0,6299605249
2000	8000000000	$1{,}6\times 10^{10}$	2519,8421	2519,8421

Com que l'objectiu principal del problema és poder construir el cub amb el valor doblat, hem de poder dibuixar el valor de l'aresta del cub duplicat. Dibuixar o construir *a* és fàcil, ja que té el mateix valor que l'aresta inicial. Per això analitzarem la construcció de $\sqrt[3]{2}$, perquè, un cop obtinguda, serà fàcil realitzar el cub demanat.

L'arrel tercera de dos és un nombre irracional, ja que un nombre racional és aquell que es pot expressar com a quocient de dos nombres enters positius sense divisors comuns. Així, el nostre nombre s'expressaria de la següent manera: $\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$. És a dir, $2 = \left(\frac{p}{q}\right)^3 \rightarrow 2 = \frac{p^3}{q^3}$, per tant, $p^3 = q^3 \times 2$, i si p^3 és divisible per q^3, vol dir que *p* també és divisible per *q*, cosa que es contradiu amb la definició de nombre racional donada, perquè aquests dos nombres tenen un divisor: *q*. Per això aquest nombre pertany als irracionals, i els seus primers decimals són: 1.2599210498948731646...

Aquest nombre no es pot representar amb regle i compàs, conclusió que no s'ha pogut demostrar fins a l'època moderna. Una demostració la trobem a Raül Castrillo Gómez[3] 2009. A grans trets ho fa en les següents etapes:

$\sqrt[3]{2}$, tal com hem dit, equival a $a^3 = 2$ o sigui, $a^3 - 2 = 0$. Aquest és un polinomi de tercer grau irreductible[4] en el conjunt de polinomis de coeficients racionals.

Tot seguit, demostra que "tot nombre construïble ha de ser arrel d'un polinomi irreductible amb coeficients en Q de grau una potència de 2", així, com que $x^3 - 2$ és irreductible i de grau 3, a no és construïble amb regle i compàs.

Com ja hem vist, $\sqrt[3]{2}$ de moment no es pot construir amb regle i compàs, per tant, tampoc no podrem construir $a\sqrt[3]{2}$, que és l'objectiu del problema. Haurem de fer servir altres recursos geomètrics per poder aconseguir l'aresta demanada, i així poder construir el cub desitjat.

---

[3] Raül Castrillo Gómez, "Construccions amb regle i compàs", p. 32

[4] Un polinomi és una suma de monomis, que són els termes del polinomi. Al mateix temps, és una expressió algèbrica constituïda per un nombre finit de variables i constants, utilitzant les operacions de suma, resta, multiplicació, divisió i potenciació i, en aquesta última, utilitzant com a exponents números naturals. El grau del polinomi el marca l'exponent del monomi de major valor d'exponent un cop fetes totes les operacions.

Una expressió irreductible és aquella que no es pot simplificar més. Així, una fracció irreductible és aquella els termes de la qual no tenen cap divisor comú. En aquest cas, un polinomi irreductible és aquell que no es pot expressar com a producte de dos polinomis amb coeficients de menor grau que l'inicial.

Per exemple, el polinomi $x^3 + 2x^2 - 2x = 0$ és un polinomi de grau 3 (perquè l'exponent més gran del terme independent (*x*) és 3 (x^3)), i és reductible, ja que es pot expressar com: $(x^2 + 2x - 2) \times (x) = 0$, essent x^2de menor grau que l'anterior. En canvi, el polinomi obtingut $(x^2 + 2x - 2)$ és irreductible i de grau 2 en el conjunt de polinomis de coeficients racionals.

3. Les solucions clàssiques

3.1. Els matemàtics grecs i la duplicació del cub

El primer que es va encarar amb el problema va ser Hipòcrates de Quios (470-400 aC),[5] científic de gran relleu que va emprendre l'organització sistemàtica de les matemàtiques i va investigar la quadratura del cercle i el problema que ens ocupa, a més de dedicar-se a investigacions astronòmiques. Míticament, la seva implicació en el problema s'acostuma a relacionar amb la llegenda cretenca. L'altra font llegendària, la de l'oracle de Delos, de seguida implica l'Acadèmia de Plató, a la qual els delis s'haurien adreçat per resoldre el conflicte plantejat. Hi intervingueren els matemàtics més destacats que en formaven part o que d'alguna manera hi estaven connectats.

Arquites de Tàrent (430-360 aC) va ser filòsof, general, home d'estat, científic i el més il·lustre dels matemàtics pitagòrics. Va viure a la Magna Grècia (l'actual Itàlia del sud), però estava relacionat amb l'Acadèmia de Plató. Es diu que va ser el fundador de la mecànica, ja que va ser el primer d'aplicar-hi els principis matemàtics, i que va ser inventor de la politja, el cargol i altres invents mecànics. Èudox de Cnidos (408-355 aC) fou matemàtic, metge, astrònom i filòsof grec, acadèmic i deixeble d'Arquites. Va desenvolupar la teoria planetària de Plató, va establir un mapa d'estels i va dividir l'esfera celeste en graus de longitud i latitud, a més d'establir la durada de l'any en 365 dies i 6 hores. Menecm (380-320 aC) era un matemàtic deixeble d'Èudox, a ell s'atribueix el descobriment de les corbes còniques. Fins i tot es va atribuir una solució, segurament de manera abusiva —després dedicarem atenció intensiva a aquesta

[5] Les dates de naixement i mort dels personatges i les altres referències biogràfiques están extretes de *l'Enciclopèdia* Catalana o, si no hi figuren, de la *Wikipèdia*.

qüestió—, a Plató (428-347 aC) un dels filòsofs més importants de la història, deixeble de Sòcrates, fundador de l'Acadèmia, inspirada en el model de les escoles pitagòriques, i que per aquesta raó donava molta importància a les matemàtiques.

Més d'un segle després, Eratòstenes (275-194 aC) astrònom, geògraf —cèlebre per haver establert la longitud de la circumferència de la Terra amb un error només de 90 km—, matemàtic i filòsof, va reprendre el problema i va inventar un aparell mecànic per resoldre'l pràcticament que va anomenar mesolabi. També se'n van ocupar Nicomedes (s. II aC), Apol·loni de Perge (262-190 aC), Filó de Bizanci (s. II aC); Heró d'Alexandria (10- dècada dels 70 dC), matemàtic i inventor que va establir algunes relacions matemàtiques, com un mètode aproximatiu per establir arrels quadrades i cubiques o mètodes per resoldre algunes equacions de primer i segon grau; Diocles (240-180 aC), Esporus i Pappos d'Alexandria (290-350 dC), autor de la *Col·lecció matemàtica* en 8 volums i que va enunciar alguns teoremes geomètrics propis.

En els comentaris sobre el llibre d'Arquímedes, *Sobre l'esfera i el cilindre*, Eutoci d'Ascalon (480-540 dC) va recollir una col·lecció de solucions del problema i va dedicar una atenció específica a Eratòstenes a partir de dos documents: una escena del seu diàleg *Platonicus* i una carta adreçada al rei Ptolomeu III en què descriu un model real del seu aparell, el mesolabi, que serveix per resoldre el problema d'una manera pràctica, i hi adjunta un epigrama amb què el dedica al temple de Ptolomeu.[6] Després hi dedicarem atenció perquè il·lustra sobre la història del problema.

El text d'Eutoci consta d'una introducció històrica, on hi ha els dos orígens d'aquest problema —el referent a Minos i el de l'acadèmia de Plató—, tot seguit, descriu el mecanisme que fa servir Eratòstanes per trobar mitjanes proporcionals, que està citat i elogiat pel sentit pràctic que té, superior als mètodes antics, i il·lustra sobre la utilitat de l'aparell. A continuació hi ha un informe sobre la teoria geomètrica de l'aparell i després explica detalls físics. El text es tanca amb una descripció del monument votiu fet erigir per Eratòstenes per commemorar aquest invent, que consistia en una columna amb una inscripció explicativa gravada i a damunt del pilar, un

[6] A partir d'aquí, en tot aquest apartat, seguim l'article de Knorr, Wilbur R. *The ancient tradition of geometric problems* .

exemplar de bronze del mesolabi. A més, hi ha una transcripció de la carta que inclou un informe de la teoria geomètrica de l'invent i l'epigrama de 18 versos que elogia les seves virtuts en contrast amb els esforços fets pels autors anteriors i el dedica a Ptolomeu i al seu fill.

Von Wilamowitz defensa la seva teoria sobre que el text d'Eutoci és fals — tot i que al mateix temps garanteix l'autenticitat de l'epigrama d'Eratòstenes— però estudis posteriors el consideren autèntic. Reproduïm un fragment de la carta:

> Després d'un temps, diuen que certs delis van caure en la mateixa dificultat que ells a l'hora de doblar un dels altars d'acord amb un oracle, i per això van enviar una carta per demanar als geòmetres amb Plató a l'Acadèmia que trobessin per ells el que es buscava. Aquests s'hi van aplicar amb diligència i van buscar com aconseguir dues mitjanes de dues línies donades, i es diu que Arquites de Tàrent va descobrir una solució per mitjanes de semicilindres, Èudox per mitjanes d'autoanomenades línies corbes. Però va esdevenir-se que tots van escriure de manera demostrativa, i cap no va ser capaç de fer-ho d'una manera pràctica o posar-ho en ús, a excepció, d'una certa manera, de Menecm, i això amb dificultat[7].

Aquest escrit sembla que és una barreja de dues o tres fonts: un relat de la llegenda de l'oracle de Delos i la comunicació a l'Acadèmia, una referència a les solucions d'Arquites i Èudox i una narració amb escrits derivats d'aquests geòmetres, en particular de Menecm. Malgrat que no es pot demostrar una residència d'Arquites a l'Acadèmia de Plató, no hi ha dubte que hi havia bona comunicació entre Arquites i

[7] Traducció del text donat en anglès per Knorr, *op. cit.* p. 20: "[a] After some time, they say that certain Delians fell into the same difficulty as they set about to double one of the altars in accordance with an oracle, and so sending out word they asked the geometers with Plato in the Academy to find for them what was sought. These applied themselves diligently and sought (how) to take two means of two given lines, [b] and Architas of Taras is said to have discovered (a solution) by means of semicylinders, Eudoxus by means of socalled curved lines. [c] But it happened that these all wrote in demonstrative fashion, none being able to manage it in a practical way or to put it into use, save to a certain small extent Menaechmus and that with difficulty."

l'Acadèmia, ja sigui a través de correspondència o de visites d'acadèmics a Itàlia. Quan en una altra part Eutoci presenta el mètode d'Arquites, anomena Eudem com a font. D'aquesta manera, es pot suposar que Eudem també va tractar els altres dos mètodes (els d'Èudox i Menecm), que també van estar disponibles per a Eratòstanes.

L'altre relat de l'origen d'aquest problema és el transmès per Teó d'Esmirna en la secció introductòria de la seva compilació de materials matemàtics, que pertany a l'estudi de Plató. Diu:

> Des del moment que Eratòstenes diu en el seu escrit *Platonicus* que quan el déu es va pronunciar als delis en l'assumpte de deliberació sobre una plaga en el sentit que ells construïssin un altar doble del que hi havia, de manera tan desconcertant va caure sobre els constructors que van buscar com es podia fer un sòlid doble d'un sòlid. Llavors van anar homes a preguntar a Plató sobre això. Però ell va dir-los que no per voler un doble altar el déu havia profetitzat això als delis, sinó per acusar i retreure als grecs que negligissin les matemàtiques i fessin poca geometria[8].

Aquesta versió està atestada en dos passatges de Plutarc, el qual aprofita l'ocasió per dir que la moral és que es necessita un estil dialèctic per maniobrar entre les ambigüitats dels oracles. Plutarc fa servir aquest problema per il·lustrar un altre aspecte de la filosofia de Plató: el pensament que la geometria no és una qüestió de coses perceptibles, sinó només de l'etern i l'incorpori. Per això considera Plató com un gran crític de les solucions mecàniques, ja que són massa corpòries, fins al punt que critica les solucions d'Arquites, Èudox i Menecm perquè eren massa mecàniques i les culpa d'espatllar el veritablement bo de la geometria[9]. Això contrasta amb el fet que Eratòstenes, segons Eutoci, qualifica de massa abstractes les solucions d'aquests autors. Realment, aquestes solucions són purament geomètriques, però es basen en certes

[8] Traducció del text donat en anglès per Knorr, *op. cit* p. 21: "For Eratosthenes says in his writing Platonicus that when the god pronounced to the Delians in the matter of deliverance from a plague that they construct an altar double of the one that existed, much bewilderment fell upon the builders who sought how one was to make a solid double of a solid. Then there arrived men to inquire of this from Plato. But he said to them that not for want of a double altar did de the god prophesy this to the Delians, but to accuse and reproach the Geeks for neglecting mathematics and making little of geometry."

[9] Sobre la posició de Plató davant la ciència, vegeu Benjamin Garrington, *Ciencia y filosofía en la Antigüedad (*p.93-115).

concepcions mecàniques, com la generació de corbes mitjançant línies en moviment, o la intersecció de sòlids de revolució, conceptes que en la filosofia abstracta de Plató no es podrien acceptar. Per altra banda, la solució d'Eratòstenes es basa en la creació d'un aparell mecànic, i es pot considerar que la seva viabilitat pràctica té una gran virtut si es compara amb els dibuixos dels primers autors, de natura purament teòrica.

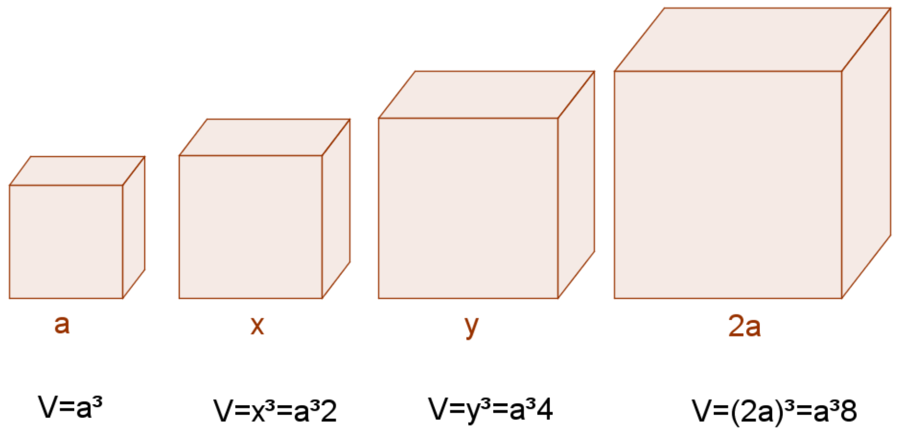
S'intueix que la història de l'oracle de Delos és una fabricació originada des de dins de l'Acadèmia de Plató, ja que en aquesta època el problema ja era conegut, com diu Eratòstenes mateix, quan cita els esforços fets per Hipòcrates i la simplificació a què va arribar. Per això, sembla estrany que l'oracle deli estigués relacionat amb un vell problema com aquest, eludit pels geòmetres de la època, però per altra banda, una història com aquesta té sentit si es mira com una motivació pels estudiants per continuar estudiant el problema. Com ja s'ha comentat, les morals indicades per Plutarc i Eratòstenes segurament que havien estat percebudes acuradament per les antigues visions acadèmiques, ja que es pot veure fàcilment, per exemple, en *La República* de Plató, la insistència de Plató en la puresa i l'abstracció de les entitats matemàtiques.

De les resolucions del problema, desenvoluparé les d'Hipòcrates, Arquites, l'atribuïda a Plató, Menecm i Eratòstanes. La resta, només les esmentarem amb brevetat.

3.1.1. Reducció d'Hipòcrates de Quios

Hipòcrates va reduir aquest problema a un altre quan va dir que per trobar l'aresta del cub desitjat s'han de trobar dues mitjanes proporcionals que estiguin en proporció contínua entre l'aresta inicial i la doblada, i així, la més petita d'aquestes mitjanes és l'aresta que volem trobar. Tots els autors a partir d'aleshores es van centrar en el problema de trobar dues mitjanes contínuament proporcionals entre dos altres segments, que no tenen per què ser un el doble que l'altre, sinó que són dos segments qualsevol, i després es pot aplicar a dos segments que un sigui el doble que l'altre, que és l'objectiu del problema. No se sap com Hipòcrates va arribar a aquesta hipòtesi, però explicaré una manera d'entendre-ho.

Partim del plantejament que podem construir un cub que tingui com a aresta *a* i per tant, com a volum, a^3, i també en podem construir un altre que tingui com a aresta $2a$, per tant, de volum $8a^3$. En aquest cas, podem trobar dos volums entremig que estiguin en proporció contínua[10].



Podem dir que 1, 2, 4 i 8 estan en proporció contínua, ja que $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$, i com que el volum del primer cub és $1a^3$, el de l'últim és $8a^3$, i volem trobar el que té com a valor $2a^3$, sabem que serà el segon de la proporció contínua esmentada. Així es demostra que els volums dels cubs estan en proporció contínua, per tant les arestes

[10] Una proporció és una relació entre magnituds mesurables, així com també una igualtat de dues raons. La raó és la relació establerta entre dues magnituds. Aquestes dues magnituds comparades s'anomenen termes.
Per exemple, en una proporció $\frac{a}{b}$=*k*, la raó és *k*, els termes són *a* i *b*, i en una proporció com $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, *a* i *d* serien els extrems i *b* i *c* els mitjans, $\frac{a}{b}$ seria el conseqüent i $\frac{c}{d}$, l'antecedent.
Una proporció contínua és aquella en què els mitjans o els extrems es repeteixen, així, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ és una proporció contínua, ja que el terme *b* es repeteix.

també ho estaran, i ens queda la proporció: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$. D'aquesta manera, un cop trobades dues mitjanes proporcionals (x, y) entre dos nombres (a i $2a$) i agafant la primera mitjana (x), trobem que és el valor que ha de valer l'aresta que busquem.

Aquesta és la manera de trobar-la geomètricament, i diversos autors han trobat la solució a aquest últim problema aplicant diferents mètodes, alguns, com Menecm o Arquites, van buscar la manera de trobar aquestes mitjanes proporcionals entre dos valors qualsevol només teòricament, i altres, com l'incert Plató o Erastòtanes, van inventar un aparell per construir-les de manera pràctica. Això sí, tots mitjançant la geometria.

3.1.2. Solució d'Arquites

Segons Eratòstenes, Arquites resol el problema mitjançant cilindres.[11]

El propòsit d'Arquites és trobar la mitjana proporcional a partir d'interseccions de tres figures determinades a partir d'una circumferència i diversos segments inscrits: un con format per la línia inscrita a la circumferència que comprèn el segment a, un cilindre que té de base la circumferència i un tor format per aquesta col·locada perpendicularment respecte al pla. D'aquesta manera, la projecció damunt la circumferència del punt d'intersecció d'aquests tres elements determina un altre punt, que unit a un punt del diàmetre de la circumferència, forma un segment que, per semblança de triangles, es demostra que és el que busquem. Tot seguit explicarem el problema de dues maneres: amb el desenvolupament de la solució transmesa per Eutoci

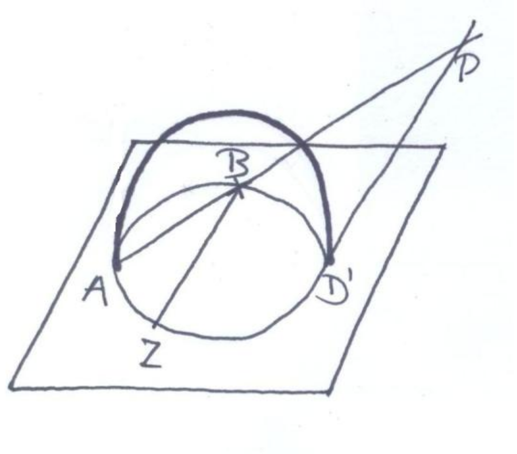
[11] Eutoci, "El problema délico", p. 383, transcriu el poema d'Eratòstenes, que, en aquesta part, diu: "I no intentis comprendre les complicades feines dels cilindres / d'Arquites".

a partir d'Eudem [12] i amb la demostració de la solució utilitzant el llenguatge de l'àlgebra, introduint un sistema de coordenades per descriure les tres figures[13].

Solució transmesa per Eudem

Tenim AD (que equival a 2*a*) i *r* (que equival a *a*), i volem trobar les dues mitjanes proporcionals, de *a* i *2a* és a dir, *x* i *y*.

Construïm un cercle que té AD' (que equival a AD) com a diàmetre, dibuixem un segment des d'A que tingui la mateixa llargària que *r* i fem coincidir l'extrem amb un punt del perímetre de la circumferència, que anomenem B. Allarguem aquest segment i tracem una altra línia que passi per D' i que sigui tangent a la circumferència, és a dir, perpendicular a la recta AD'. El punt on es creuen aquestes línies l'anomenem P. Tracem una línia paral·lela a la tangent des de B; el punt on talla la recta AD' se l'anomena E i l'altre punt que talla la circumferència, Z.



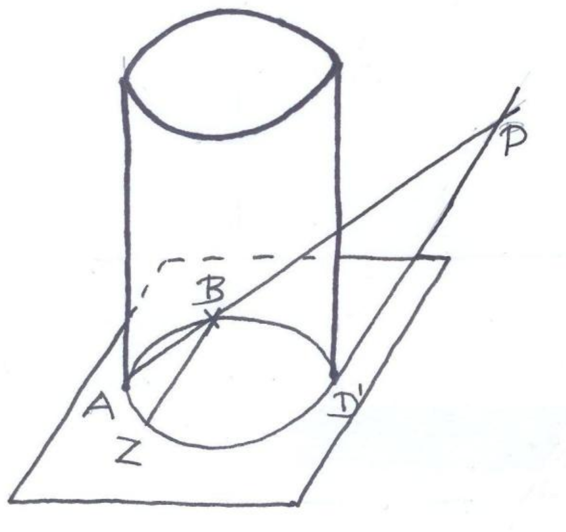
Ara descriurem diversos cossos a partir d'aquesta figura, que són els que farem servir més tard per resoldre el problema:

Descripció del cilindre:

Es considera un cilindre recte amb base ABD, és a dir, un cilindre que té com a base el cercle ABD i que, en tres dimensions, "surt del paper". Arquites diu que el

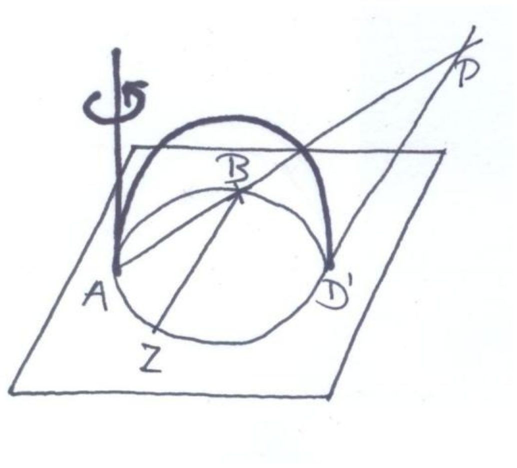
[12] Eutoci, *op. cit.*, p. 376-378 exposa la solució d'Arquites transmesa per Eudem.
[13] La descripció serà al peu de la lletra, no com la Boyer, que ho adapta en un sentit considerant un con diferent.

cilindre és recte, i això vol dir que la generatriu, que anomenarem *l*, és perpendicular al pla de la circumferència AMD'.



Descripció del tor:

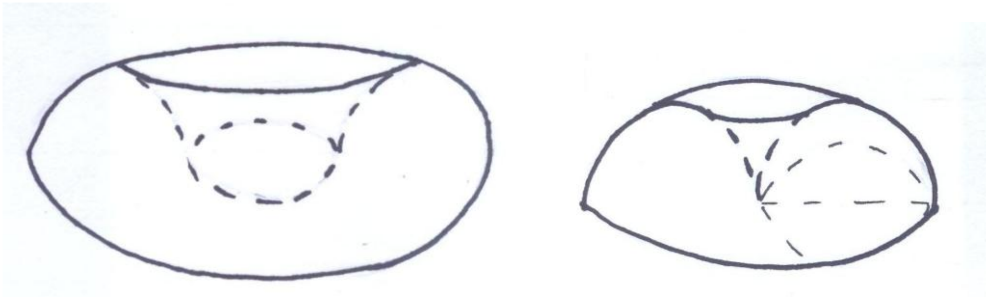
Considerem també un cercle perpendicular al pla del cercle ABD', o sigui, que també és en tres dimensions, "surt del paper".



Fem girar el cercle completament al voltant de la generatriu, que és la recta *z* perpendicular al pla d'ABD pel punt A. Així, genera un tor[14] amb centre a A i amb el

[14] Tor: forma geomètrica generada per la rotació en l'espai d'una circumferència al voltant d'un eix del seu pla i exterior a ella, resultant un anell de contorn circular.

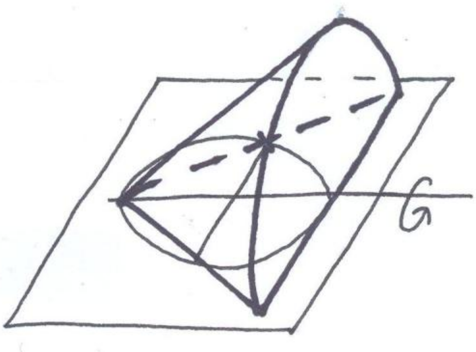
cercle central col·lapsat en un punt. La primera figura és un tor qualsevol i la segona és el tor col·lapsat en el punt A:



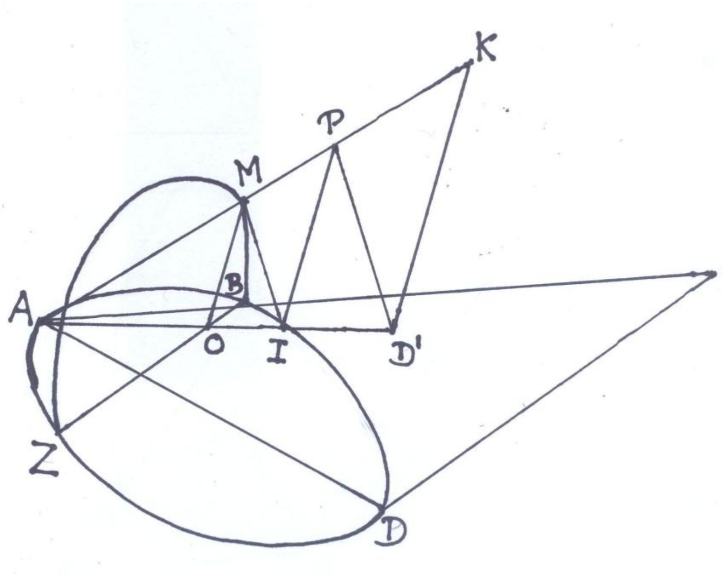
Quan es fa girar el cercle, el tor generat talla la superfície cilíndrica i hi traça una línia.

Descripció del con:

Considerem que no hem desplaçat el cercle, per tant, que AD’ continua fix i que fem girar el triangle APD, (format per la tangent a la circumferència en el punt D i la semirecta que passa per A i per B). El fem girar al voltant d’AD, i fent això, la recta AP genera un con recte que coincideix amb el cilindre en algun punt. Aquesta seria la generació del con:



Un con recte és un con la base del qual és perpendicular a l'eix de revolució. Aquest con està generat per la semirecta que passa per A i per B quan gira entorn al diàmetre AD. Per això, el punt B també descriu un semicercle en la superfície del con.



Així, tenim totes les figures generades i les línies trobades. Primer aclarirem com queden les figures entre elles i després quina és la solució d'Arquites i la seva demostració.

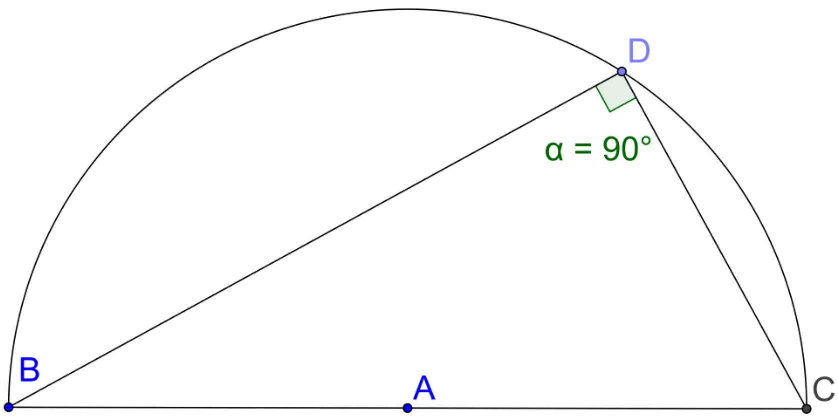
Per a la resolució del problema, es fixen els cossos tal com indica la figura: es fixa el cercle que genera el tor en una posició determinada (anomenada D'PA) i el triangle que genera el con es fixa en un sentit contrari a DAP. El cilindre quedarà al lloc inicial, ja que en cap moment no l'hem mogut. En aquest moment, el punt de tall entre el cercle i el triangle és el punt P.

A partir de la recta ZOB ja descrita (paral·lela a la tangent pel punt D), es traça un semicercle, que també es col·loca perpendicular al pla de la circumferència inicial. En aquest cas, BZ és la secció comuna entre el cercle inicial i aquest semicercle, ja que és la base del semicercle.

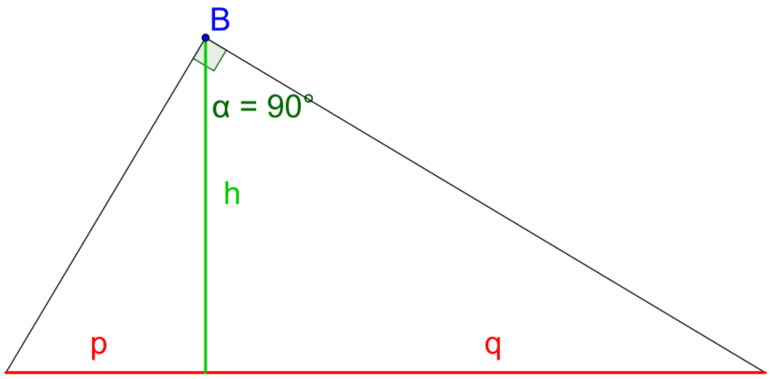
Des del punt P, que és la intersecció de les tres superfícies, i és en l'espai, no en el pla de la circumferència, es traça un segment perpendicular al pla del cercle ABD' que cau a un punt del perímetre de la circumferència, ja que el cilindre és recte. Aquest punt l'anomenarem I. El segment AI és la solució del problema, tal com demostrarem seguidament.

Traçarem una línia d'I a A, i el punt on talla amb la recta BZ l'anomenarem O. La línia AP també talla el semicercle que forma ZB, a un punt que anomenarem M. Traçarem les rectes PD, MI i MO.

Primer de tot, considerarem les dues línies MI i PD paral·leles entre elles, ja que els dos segments són perpendiculars a AK, és a dir, els angles AMI i AKD són rectes, com explicarem tot seguit: AKD és un angle recte perquè en un cercle, i en aquest cas, en un semicercle, sempre que s'envia un raig des d'un punt del perímetre de la semicircumferència, si només rebota a un punt del perímetre i tot seguit el raig va a l'altre costat del diàmetre, l'angle que forma aquest raig és de 90º, és a dir, recte, tal com mostra el dibuix i tal com es pot comprovar en la presentació en geogebra "Presentació2.ggb".



Per la mateixa raó, sabem que AMI és recte, ja que està inscrit en una semicircumferència d'extrems els punts A i I. Això ho demostrem aplicant el teorema de l'altura, que diu que en un triangle rectangle com el de la figura es compleix la següent igualtat: $p \times q = h^2$ (també ho pots comprovar mitjançant la presentació de geogebra "Presentació3.ggb"), i el de la potència en un punt[15], que demostrarem més tard. Mitjançant el teorema de la potència en un punt, considerant el punt O, podem dir que $BO \times OZ = AO \times OI$. Al mateix temps, amb el de l'altura justifiquem que $MO^2 = BZ \times ZO$. Igualant aquestes dues expressions, podem concloure que $MO^2 = AO \times OI$, igualtat que ens indica que A, I i M són tres punts del perímetre d'una circumferència, i que, per tant, l'angle AMI és recte. Per tant, com ja hem dit al principi, MI i PD són paral·leles.



Veient això, sabem que els triangles APD i AMI són semblants, [16] ja que, com definirem mitjançant el Teorema de Tales, si dues rectes paral·leles tallen dos segments secants, els dos triangles que defineixen són semblants, ja que tenen els tres angles iguals. Al mateix temps, el triangles AIP i AMI també són semblants, ja que tenen dos angles iguals: el recte (AMI i AIP) i el que correspon al punt A (MAZ i MAI). Per tant, els triangles AIP, APD i AMI són semblants. I tornant a aplicar el Teorema de Tales,

[15] En un cercle, agafant qualsevol punt i traçant dues cordes que passin per aquest punt, el producte del valor de les dues seccions d'una corda és igual al producte de les dues seccions de l'altra. Això es pot comprovar a la presentació de Geogebra.

[16] Un polígon és semblant a un altre quan té les mateixes proporcions. Això vol dir que han de tenir els angles iguals, el mateix nombre de costats i les mides dels vèrtexs proporcionals. Així, dos triangles són semblants quan tenen dos (o més) angles iguals. Com que els angles d'un triangle sempre han de sumar 360º, si dos angles són iguals, el tercer ho ha de ser. Si els angles de dos triangles són iguals, els seus costats seran proporcionals.

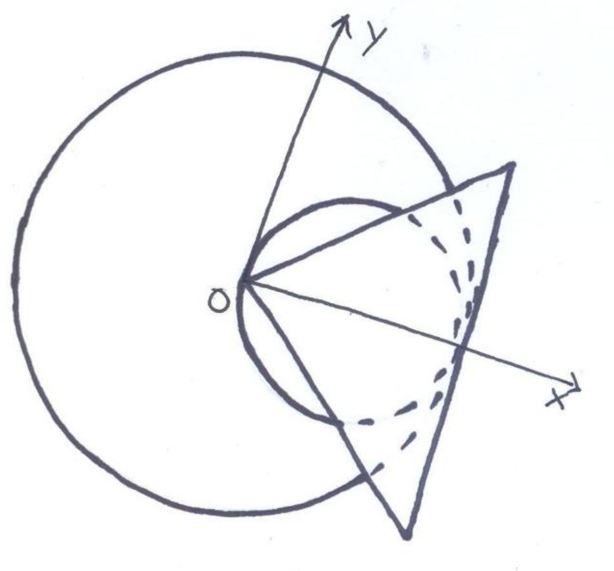
podem arribar a la següent igualtat: $\frac{AM}{AI} = \frac{AI}{AP} = \frac{AP}{AD}$, i com que, com ja hem definit anteriorment, AM=AB, i AD=AD', tenim l'expressió $\frac{AB}{AI} = \frac{AI}{AP} = \frac{AP}{AD'}$; i podem dir que hem trobat les dues mitjanes proporcionals entre els dos segments donats.

Així, traduint-ho al nostre llenguatge, considerant que AD= 2*a*, AP = *y*, AI = *x*, i AB=*a*, hem trobat *x* i *y* dins la proporció $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, que és el que demanava l'enunciat del problema.

Demostració algebraica:

Hi ha una altra manera d'interpretar la resolució d'aquest problema fent servir els mateixos mecanismes, però interpretant-ho d'una altra manera més actual, amb àlgebra[17]. Introduirem un sistema de referència per referir les figures a les seves equacions.

L'eix OX de coordenades, coincideix amb l'eix de revolució del con, així com amb la direcció del diàmetre de la circumferència. L'eix OZ el fem coincidir amb l'eix al voltant del qual gira el cercle per formar el tor, i l'eix OY un de perpendicular als altres dos, tal com indica la figura:



[17] Boyer, *Historia de la matemática,* p. 105

Cilindre

En un cilindre, la seva generatriu (en el nostre cas, l), recorre una circumferència d'un radi determinat per formar-lo. En aquest cas, el radi l'anomenarem *r* i considerarem que la generatriu és en l'eix OZ, per tant, el punt que marca el centre de la circumferència tindrà les coordenades (*r*, 0, 0). En un cilindre, la distància de qualsevol punt del cilindre a l'eix de rotació (que anomenarem *e*) és constant i és igual al radi, ja que el centre de rotació és una línia que surt del centre de la circumferència i hi és perpendicular.

Aplicant el que acabem de dir, traiem que $d(P, e)$ = r. Amb la fórmula de la distància entre dos punts[18], i considerem un punt qualsevol de l'eix, que té de coordenades E = (r,0,z), i un punt qualsevol de la superfície del cilindre P = (*x*, *y*, *z*), tenim l'equació següent:

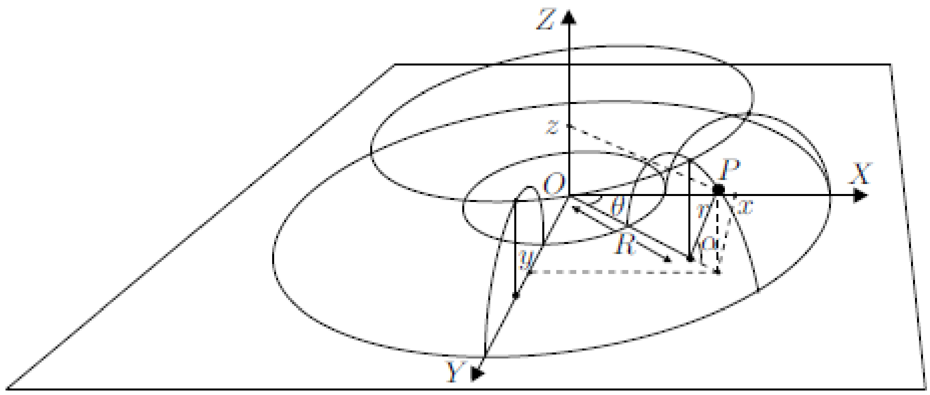
$$r = \sqrt{(x-r)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} \rightarrow r = \sqrt{x^2 + r^2 - 2rx + y^2} \rightarrow r^2 = x^2 + r^2 + y^2 - 2rx \rightarrow 2rx = x^2 + y^2$$

D'aquesta manera, ja hem obtingut l'equació de la superfície del cilindre, que només depèn de les coordenades *x* i *y* i del radi, no depèn de la coordenada *z*.

Tor

Com es pot veure en la figura, agafem un tor de radis R i r en els paràmetres α i θ. Per després aconseguir l'equació esmentada, haurem d'igualar R i r, ja que en el nostre tor, el centre central està col·lapsat en un punt, i eliminar els dos paràmetres. Agafarem un punt qualsevol: P = (*x*, *y*, *z*).

[18] distància AB = $\sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}$



[19]

$x = (R + r\cos\alpha)\cos\theta;\ y = (R + r\cos\alpha)\sin\theta\ ; z = r\sin\alpha.$

Si igualem *R* = *r*, obtenim:

$x = r\cos\theta\,(1 + \cos\alpha); y = r\sin\theta\,(1 + \cos\alpha); z = r\sin\alpha$. A partir d'aquí:

$x^2 + y^2 = r^2(1 + \cos\alpha)^2\,(cos^2\theta + sin^2\theta) = r^2(1 + cos\alpha)^2.$

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &= r^2(1 + cos\alpha)^2 + r^2 sin^2\alpha = r^2(2 + 2cos\alpha) = 2r^2(1 + cos\alpha) \\
&\rightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4r^4(1 + cos\alpha)^2 = 4r^2r^2(1 + cos\alpha)^2 \\
&= (x^2 + y^2)4r^2 \rightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4r^2(x^2 + y^2)
\end{aligned}
$$

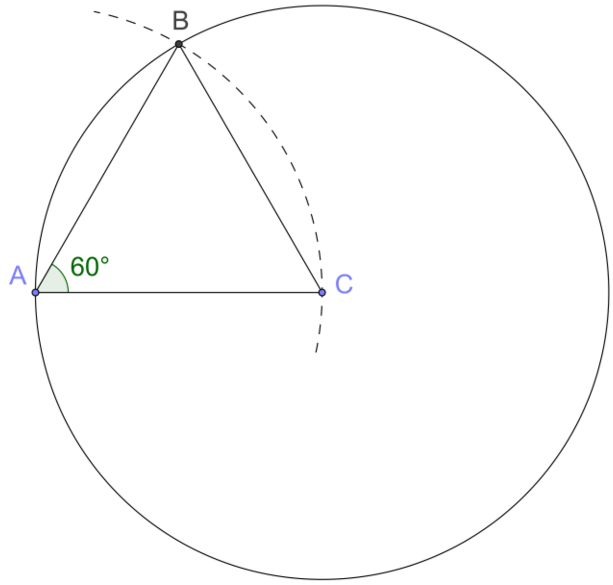
Con

El vèrtex del con el situem al punt A. Fem coincidir l'origen de coordenades amb el vèrtex del con i l'eix del con amb l'eix OX. Tots els punts de la superfície d'aquest con tenen com a condició que el vector determinat per aquest punt i l'origen de coordenades amb el vector unitari (1, 0, 0) formen un angle de 60º[20]. Això passa perquè el segment AB val el mateix que el radi de la circumferència, ja que és la meitat de AD. Com que el triangle format per aquest con té com a costats dos radis i el segment AB, aquest

[19] Nolla, *op. cit.*, *p*.509

[20] Aquí, Boyer agafa un con que té d'angle 45º perquè li interessa per poder resoldre el problema d'una manera més directa (trobant directament *x*, la solució), però el con que genera aquesta figura té un angle de 60º, que és com ho fem nosaltres. Per tant, els càlculs de Boyer són diferents, tot i que al final s'arriba al mateix resultat.

triangle és equilàter, i per tant, els seus angles valen 60º. Per això l'angle considerat és de 60º.



Vist això, si per exemple considerem el punt P = (*x*, *y*, *z*), com que el punt O té valor (0, 0, 0), i per obtenir vectors s'ha de restar el punt final del vector menys l'inicial, el vector

$\overrightarrow{OP}$=(*x, y, z*).

Tot seguit, ja que l'equació del producte escalar és $u \times v = |u| \times |v| \times \cos\alpha$, la transformem en l'equació $cos\alpha = \frac{u\times v}{|u||v|}$. Tenint en compte que α és l'angle entre els dos vectors, quan hi apliquem les dades, obtenim que $\cos 60º = \frac{OP\times u}{|OP|\times|u|}$.

Si introduïm les dades amb què treballem, veiem que: $\frac{1}{2} = \frac{(x,y,z)\times(1,0,0)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\times 1}$.

En aquest moment, si ho elevem tot al quadrat, queda: $\frac{1}{4} = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$ i, si fem totes les operacions, ens queda: $x^2 + y^2 + z^2 = 4x^2 \rightarrow 3x^2 = y^2 + z^2$.

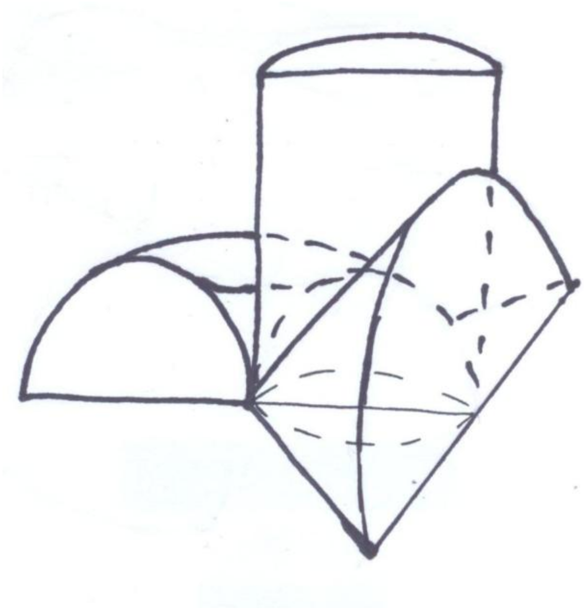
Per poder continuar, recordem les tres equacions:

Cilindre: $2rx = x^2 + y^2$

Tor: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4r^2(x^2 + y^2)$

Con: $3x^2 = y^2 + z^2$.

També recordem les disposicions de les tres figures:



Un cop fet aquest petit resum, continuem amb el desenvolupament substituint les dues equacions del con i el cilindre a la del tor, i simplificant-la, d'aquesta manera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \to x^2 + 3x^2 = 2r\sqrt{x^2 + y^2} \to 4(\frac{x^2 + y^2}{2r})^2 = 2r\sqrt{x^2 + y^2}$$

Fins que, operant, arribem a la igualtat $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt[3]{2}r$, que és la solució del problema, ja que mitjançant el Teorema de Pitàgores, podem trobar l'aresta buscada.

Així mateix, Boyer, a l'utilitzar un con de 45º, amb un procediment semblant, arriba a la següent equació: $x = \sqrt[3]{2}r$. Ell ho fa així per trobar directament el valor, projecta aquest valor al segment AD per obtenir-lo amb una sola coordenada, i així poder treballar millor. Però, com ja hem dit, nosaltres hem volgut treballar agafant-ho al peu de la lletra.

Així, ja hem vist les dues interpretacions de la solució d'aquest problema, una solució en què es troben les mitjanes proporcionals i l'altra en què directament es troba, de manera geomètrica, la solució desitjada del problema inicialment plantejat.

3.1. 3. Solució atribuïda a Plató

Eutoci[21] només transmet la solució i descriu l'aparell mecànic associat, nosaltres ho explicarem de manera més exhaustiva i clarificadora.

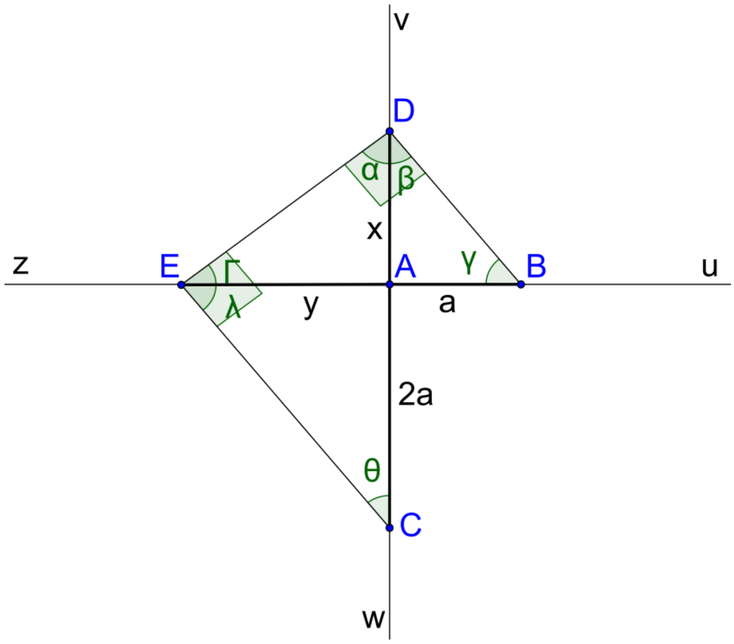
A partir dels dos segments AB (que en la nostra notació equival a a) i AC (que en la nostra notació equival a $2a$), hem de trobar dos segments contínuament proporcionals.

Tot i que el text va directe a la resolució, nosaltres farem un anàlisi que ens hi porti important al problema resolt. Partim d'un punt en què ja sabem el valor dels dos segments proporcionals per després poder-los trobar fent servir el procediment invers en l'apartat "resolució del problema". Aquests segments són AB (que equival a x) i AC (que equival a y).

Dibuixem dues línies perpendiculars i el punt de tall l'anomenem A. Seguint el sentit de les agulles del rellotge, en una semirecta inscrivim el segment AB, a la consecutiva el segment AD, a l'altra AE, i a l'última, AC.

Un cop tenim aquesta figura, observem que si unim B amb D, D amb E i E amb C, els dos angles que apareixen (el que correspon al punt E i el que correspon al punt D per dintre de la nostra figura) són rectes.

[21] Eutoci, *op. cit.*, p. 359-361.



Mitjançant semblança de triangles, podem dir que el triangles ABD i ADE són semblants: tenen un angle igual (els angles BAD i DAE), que és recte, perquè ja hem descrit al començament que les dues rectes han de ser perpendiculars. Com que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$, els costats del triangle són proporcionals. Per tant, dos triangles amb un angle igual i dos costats proporcionals sempre són semblants. Si sabem que els dos triangles són semblants, també sabem que els seus angles són iguals, i com que els angles d'un triangle sumen 180º, i que un angle del triangle ADE ja val 90º, la suma de α+г val 90º. I com que β=г, si substituïm, α+β =90º, és a dir, que l'angle BDE és recte. Es pot aplicar la mateixa explicació per a l'angle DEC.

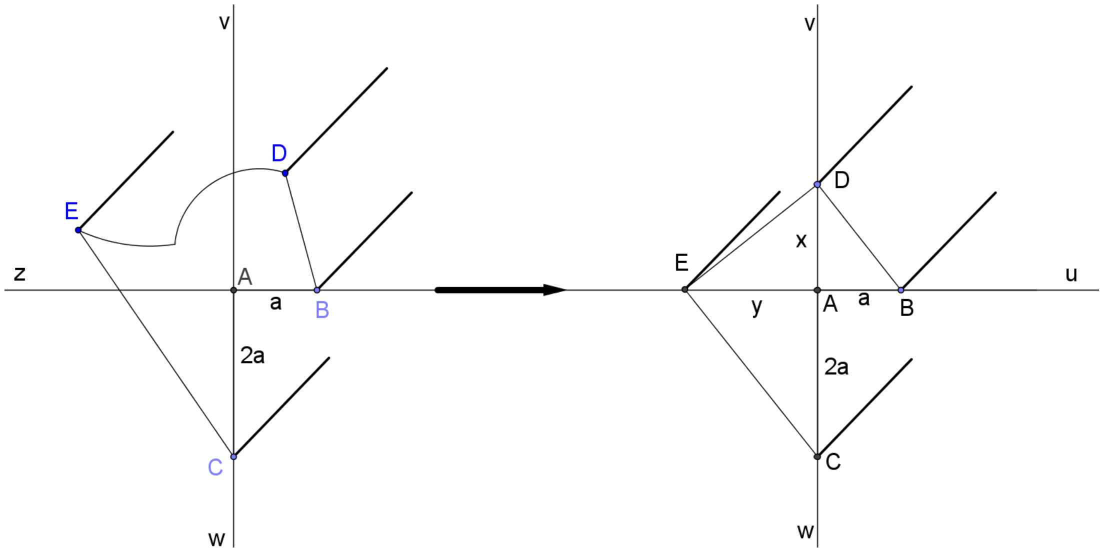
Un cop trobada la manera d'entendre el problema, l'apliquem per arribar a la solució.

Resolució del problema

L'autor, per poder fer aplicable aquesta solució a tots els casos, crea un estri que permet trobar dues mitjanes proporcionals a dos segments, que una sigui el doble de la primera (*a* i 2*a*).

Primer explicaré el mètode fet d'una manera bastant senzilla. Es necessiten quatre pals, un fil i el valor del segment inicial (*a*). Es dibuixen dues línies perpendiculars, es calcula el doble d'*a*, que és 2*a* i l'últim membre de la proporció buscada, i es disposa de forma semblant a la demostració, és a dir, en uns eixos, *a* inscrit a les abscisses positives i 2*a* a les ordenades negatives, per exemple.

Tot seguit, es claven els pals a B i C, sense fixar la mida del fil, o sigui que a través d'un forat al pal C es podrà afegir més corda a la construcció, si cal. Els altres dos pals, que estaran al mig però també sense lligar, s'intenten fer coincidir amb les línies de manera que formin angles rectes, mitjançant un escaire o algun altre estri de mesura d'angles rectes. Així, en el moment que els angles formats pels pals siguin rectes i que estiguin damunt les línies, s'hauran trobat els punts D i E, i per tant, les mitjanes proporcionals i la mitjana que permetrà fer el cub inicialment plantejat. Es pot aplicar aquesta demostració mitjançant la demostració en geogebra "Presentació4.ggb".

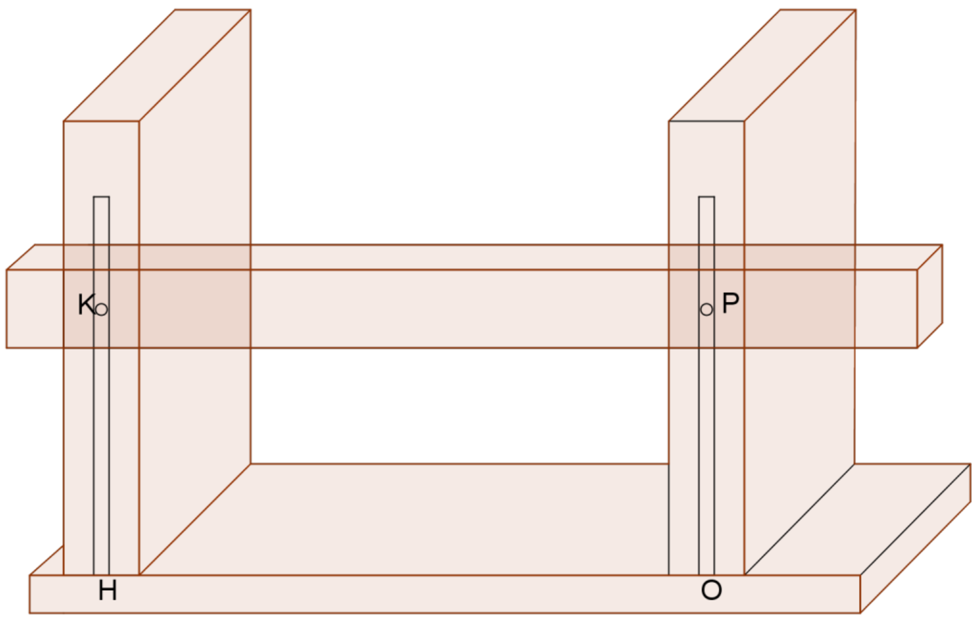


La distància entre C i D no cal que sigui sempre igual, sinó que varia amb la llargària del segment *a*, i conseqüentment, també de 2*a*. Això es produeix perquè, quan disminueix *a*, en ser proporcional, *x* ha de disminuir, i *y* també. Per tant, no es pot conservar la mateixa mida, ja que si en el triangle ADE, es disminueix la mida dels dos catets, automàticament disminueix la de la hipotenusa. Això es demostra mitjançant el teorema de Pitàgores, que diu que el quadrat de la hipotenusa d'un triangle rectangle és igual a la suma dels quadrats dels catets, com es pot veure en la presentació en geogebra

“Presentació5.ggb”.[22] Com que estem treballant amb triangles rectangles, és a dir, que tenen un angle de 90º, que és el que formen els eixos de coordenades, ja que sempre són perpendiculars entre ells, es compleix aquest teorema. Així, quan els catets disminueixen, la hipotenusa també ho ha de fer. Per tant, mai no hi pot haver la mateixa mida de fil entre C i D.

L’autor va dissenyar un estri, ja amb els angles rectes fets, per poder trobar les mitjanes més fàcilment. També es pot fer servir un peu de rei, amb la mateixa explicació.

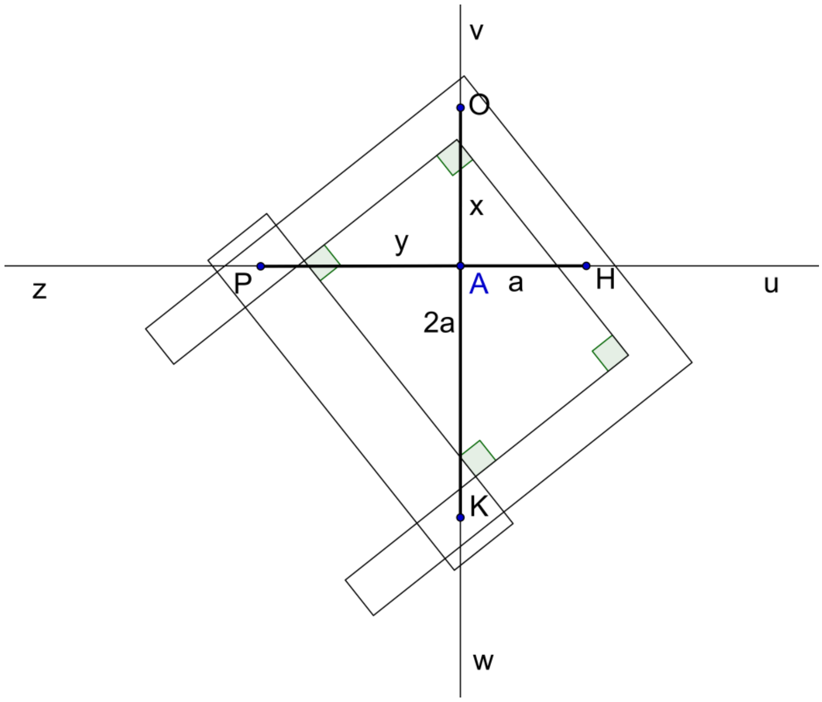
Aquest estri tenia forma de U amb els angles interiors rectes. Va fer uns talls a les barres laterals i va construir un regle amb dos pius sortints que cabien als talls fets anteriorment però que, per molt que es mogués, sempre quedés paral·lel a la base. Amb aquest estri, i amb les explicacions donades anteriorment, es poden trobar mitjanes proporcionals als dos segments inicials donats pel següent procediment:



Es posa la base (HO) sobre el punt B, es mou l’estri fins que el punt O damunt l’eix V.

[22] Es poden mirar diverses comprovacions d’aquest teorema, a més, a la pàgina http://fileman.upct.es/~pepemar/triangulo/pitagoras.html

Es torna a moure perquè la recta KP estigui en contacte amb l'eix Z pel costat de P (mentre que la base continua tocant a B) i amb el punt C pel costat de K.



D'aquesta manera ja haurem trobat les mitjanes proporcionals, que són del centre a O (que equival a *x*) i del centre a K (que equival a *y*).

Concloent, es demostra que $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AE} = \frac{AE}{AC}$, i sabent que AB = *a*, i AC = 2*a*, ja hem trobat les mitjanes proporcionals que buscàvem, així, i anomenant *x* a AC i *y* a AD, podem dir que hem trobat els termes *x* i *y* de la proporció $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$.

3.1. 4. Solució de Menecm

Menecm, fa primer el plantejament al revés: a partir dels dos segments inicials (a i 2*a*), dóna per sabuts els dos segments *x* i *y* per poder trobar el procediment per resoldre el problema, i després resoldre'l amb les eines que ha obtingut i ha utilitzat en fer aquesta primera resolució. Considerant que sap el valor de tots els segments, el procediment és el següent.

Traçar una recta AH en una posició determinada i inscriure-hi un segment (AZ) amb el valor de *x*. Traçar una recta perpendicular a aquesta que passi per A i inscriure-hi un segment (AK) que equival a *y*.

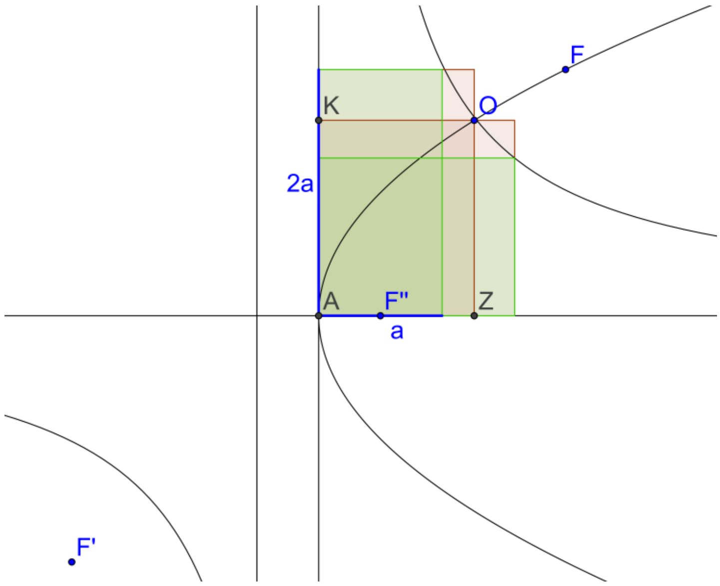
En aquest moment, es pot afirmar que, com que *x*, *y* i 2*a* són proporcionals ($\frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$), l'àrea del rectangle que té de costats 2*a* i *x* serà igual a la del quadrat que té de costat *y*. Això es demostra amb la propietat de les proporcions que diu que el producte d'extrems és igual al producte de mitjans. A més, l'àrea d'un quadrilàter equival al producte dels costats, per tant, l'àrea del rectangle de costats 2*a* i *x*, serà 2*ax*, i la del quadrat de costat *y*, serà y^2. Per tant, $y^2 = 2ax$.

Dibuixem el rectangle que té com a costats *x* i *y*, és a dir, tracem un segment perpendicular a AZ amb extrem a Z que tingui el valor d'*y* i un altre perpendicular a AK des de K i amb valor igual a *x*. El punt de tall d'aquests dos segments l'anomenarem O.

Ja tenim el rectangle de costats *x* i *y*: com que *a*, *x*, *y* i 2*a* són contínuament proporcionals, ($\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$), mitjançant el producte d'extrems podem demostrar que $xy = 2aa \rightarrow xy = 2a^2$; geomètricament, això equival a dir que el rectangle comprès entre els segments *x* i *y* és igual al comprès entre els segments *a* i 2*a*. En aquesta equació es fa servir el concepte de proporcionalitat inversa, ja que els valors dels quals es parla no estan en proporció contínua, perquè són els extrems d'una proporció contínua, però entre ells estan en proporció inversa.

Sabem que l'equació de la paràbola quan el vèrtex coincideix amb l'origen de coordenades i el focus es troba en el semieix positiu de les abscisses té la forma $y^2 = 2px$, on *x* i *y* són les dues variables i *p* el paràmetre de la paràbola. Aquesta paràbola té l'eix de simetria a l'eix d'abscisses, i el focus al punt F = $(\frac{p}{2}, 0)$. Així mateix, la recta que fa de directriu és *x* = $-\frac{p}{2}$.

Ja veiem que la primera equació obtinguda ($y^2 = 2ax$), té aquesta fòrmula, d'aquí es dedueix que aquesta equació és la d'una paràbola, i que, per tant, el punt O pertany a aquesta paràbola, que té el focus en el punt (*p*/2, 0) i la directriu de la qual és *x* = -*p*/2, on a *p* nosaltres li direm *a*.



La segona equació obtinguda ($xy = 2a^2$), en canvi, correspon a una hipèrbola centrada en l'origen de coordenades i amb focus a la recta $x = y$. Així mateix, les rectes AK i AH són les asímptotes d'aquesta paràbola i el punt O pertany a la paràbola.

D'aquesta manera, un cop tenim dibuixades les dues corbes i trobat el punt comú entre les dues, podem identificar ràpidament les dues mitjanes que busquem.

Resolució

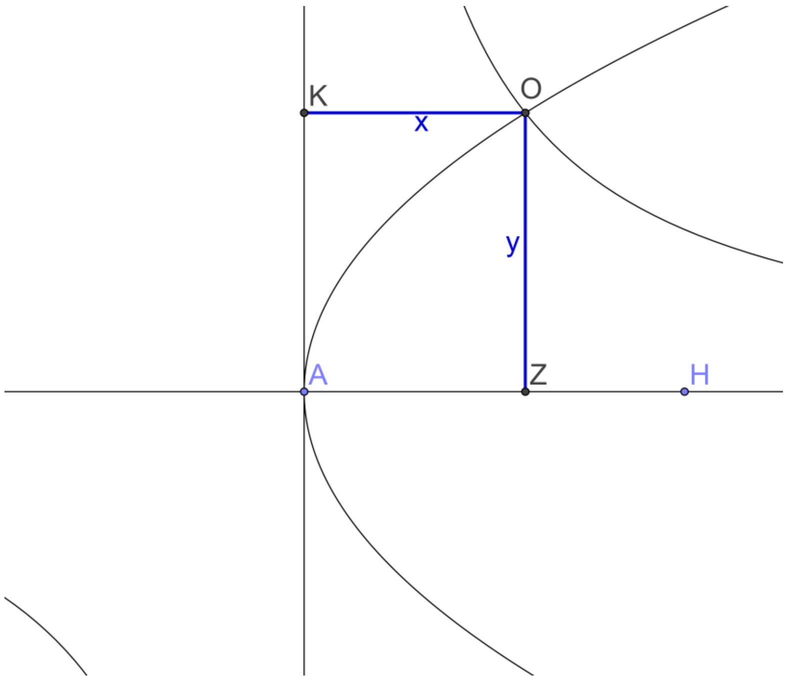
Després d'haver descrit la manera de resoldre'l, Menecm, explica la resolució mitjançant les eines trobades. El procediment és el següent:

Tenim a i $2a$ i volem trobar dues mitjanes contínuament proporcionals.

Primer tracem una línia horitzontal i l'anomenarem AH. Tot seguit, tracem una paràbola que passa per A i que té com a eix la recta AH i com a paràmetre $2a$. Ell ho descriu de la següent manera: "que els quadrats de les ordenades (OZ = y), siguin iguals a les àrees de $2a \times$ZA (que equival a x)". Aquesta és la descripció de la paràbola, ja que diu que es compleixi l'equació $y^2 = 2ax$.

Tot seguit s'ha de traçar AZ i AK. Just després, fer una hipèrbole amb asímptotes KA i AZ, i llavors diu: "que les rectes paral·leles a KA AZ (o sigui, x y) siguin iguals al rectangle *a*, 2*a*”. Aquesta és la definició de la hipèrbole, ja que descriu l’equació $xy = 2a^2$.

El punt de tall de les dues corbes és anomenat O, i es traça OK i OZ.



Conclusions

Com que ja hem dit que $ZO^2 = 2a \times AZ$, i aplicant les propietats ja esmentades de les proporcions, podem dir que $\frac{AZ}{ZO} = \frac{ZO}{2a}$, així mateix, com que ja hem dit que 2$a\times a$ = AZ×ZO, d’aquí determinem que $\frac{a}{AZ} = \frac{ZO}{2a}$.

Si ajuntem aquestes dues igualtats, ens queda: $\frac{a}{AZ} = \frac{AZ}{ZO} = \frac{ZO}{2a}$. D’aquesta manera, ja hem trobat els dos segments proporcionals entre *a* i 2*a*, que era l’objectiu del problema. Ara, si substituïm AZ per *x* i ZO per *y*, ens queda la igualtat inicial: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$. Així ja hem trobat una altra manera d’aconseguir dos segments contínuament proporcionals entre dos altres, mitjançant les corbes còniques.

Menecm, a més, va resoldre el problema d’una altra manera, fent servir la mateixa idea, amb una explicació prèvia sabent les dues mitjanes contínuament proporcionals (*x* i *y*).

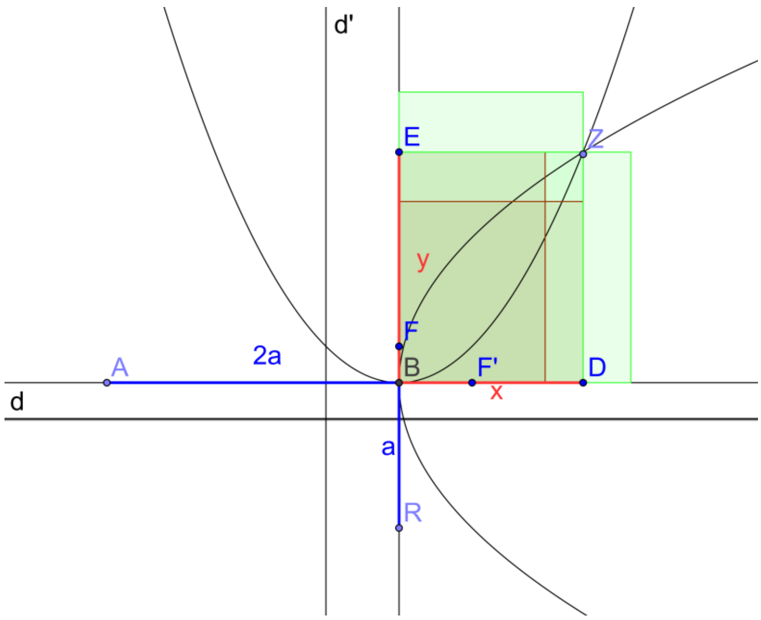
Procediment

Es tracen dues rectes perpendiculars, i el punt en què es tallen s'anomena B. Seguint el sentit antihorari, s'inscriuen en les semirectes els segments *a*, *x*, *y* i 2*a*, que són proporcionals.

Tenint en compte la proporció $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$, es determina que el rectangle de costats *a* i *y* és igual al quadrat de costat *x*; així $x^2 = ay$, que correspon a una paràbola que té com a eix la semirecta que comprèn *y*, o sigui, l'eix d'ordenades. Per altra banda, tenint en compte la proporció $\frac{2a}{y} = \frac{y}{x}$, es pot determinar que el rectangle de costats 2*a* i *x* és igual al quadrat de costat *y*. D'aquí surt l'equació $y^2 = 2ax$, que també correspon a una paràbola, aquesta d'eix *x*.

Després d'aquestes comprovacions, es traça un segment paral·lel i de la mateixa mida que el segment *x* des de l'extrem de *y*, i un altre segment també paral·lel i de la mateixa mida del segment *y* a partir de l'extrem de *x*. El punt que es troben aquests dos segments, que forma part de les dues paràboles, l'anomenem Z.

D'aquesta manera hem trobat les corbes còniques que formen els quatre segments proporcionals.



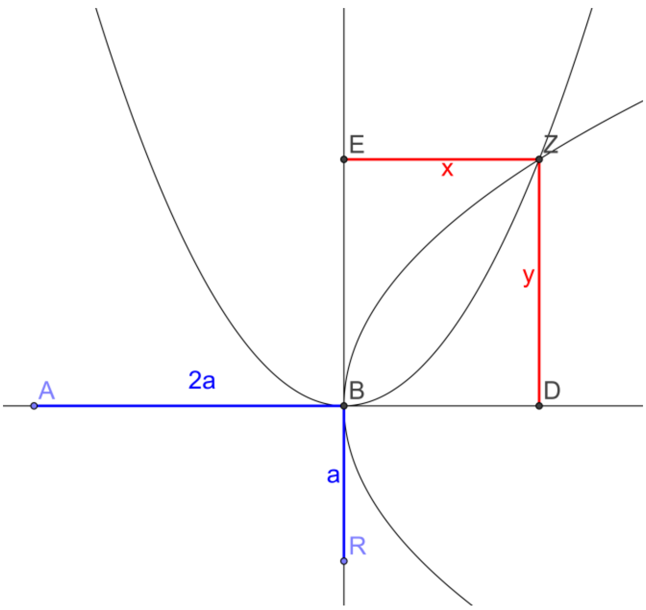
Resolució

A partir de les rectes *a* i 2*a*, hem de trobar dues mitjanes proporcionals.

Primer, i com en l'apartat anterior, tracem dues rectes perpendiculars amb centre a B, i inscrivim a la semirecta vertical de sota del punt B un segment que tingui el valor d'*a*, i l'extrem l'anomenem R. Per tant, serà la recta BR. En la semirecta horitzontal de l'esquerra del punt B hi inscrivim l'altra recta, la que té valor 2*a*, i l'extrem l'anomenem A. En aquest cas, tenim la recta BA.

A més, a la semirecta vertical de damunt del punt B hi indiquem un punt E, tal com diu Menecm: "de manera que el quadrat de les ordenades fins a BE sigui igual a les àrees aplicades a BR (o sigui que BR sigui el paràmetre)". Això vol dir que el rectangle de costats del segment BE i BR és igual al quadrat que fan els segments BW, o sigui, les ordenades del segment EB. Així, l'equació explicativa seria: $BW^2 = BR \times BE \rightarrow (x^2 = ay)$, per tant, l'equació de la paràbola que té com a eix el segment BE. Dibuixem aquesta paràbola.

Al mateix temps, en la semirecta de la dreta de B, dibuixem un punt D "de manera que el quadrat de les ordenades (o sigui, fins l'eix DB) sigui igual a les aplicades a DB". Aplicant la mateixa explicació, ens queda l'equació $BE^2 = BA \times BD \rightarrow (y^2 = 2ax)$, que correspon a la paràbola que té com a eix el segment DB. Aquestes dues paràboles es tallen en un punt, anomenat Z, i des de Z traçarem les rectes ZD i ZE, perpendiculars entre elles.



Conclusió

Com que ZE (que val el mateix que BW) és una ordenada de la paràbola, el rectangle RBE val el mateix que el quadrat que té com a costat el segment BW, tal com es demostra en la fórmula d'aquesta paràbola, que és $BW^2 = RB \times BE$. Per tant, s'extreu la proporció següent: $\frac{RB}{BW} = \frac{WB}{BE}$

Al mateix temps, com que ZD (que és el mateix que EB) és una ordenada de la paràbola, el rectangle DBA és igual al quadrat de costat EB, per la mateixa raó, aquí la fórmula és $BE^2 = WB \times BA$. Per tant, $\frac{WB}{BE} = \frac{BE}{BD}$.

Ajuntant aquestes dues igualtats, tenim que: $\frac{RB}{BW} = \frac{BW}{BE} = \frac{BE}{BA}$. Com que ja sabem que RB = *a* i BA = 2*a*, podem afirmar que hem trobat les dues mitjanes contínuament proporcionals entre els dos segments ja donats. Així, BW equivaldria a *x* i BE a *y*, i així obtindríem la proporció inicialment buscada, que és: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$.

Amb el mètode de Menecm, hem trobat que agafant dues igualtats qualsevol d'aquesta proporció i operant es generen unes corbes que es creu que en aquell temps no es coneixien, les anomenades corbes còniques. Per això alguns estudiosos creuen que Menecm va ser el descobridor d'aquestes corbes, mitjançant aquest problema i un altre, que forma part de la tríade dels anomenats "problemes clàssics".

3.1. 5. Solució d'Eratòstenes

En la versió transmesa, Erastòtenes primer fa una mica d'explicació del problema i de les seves aplicacions. Tot seguit, explica la resolució, i al final dissenya un instrument per resoldre'l de manera pràctica.

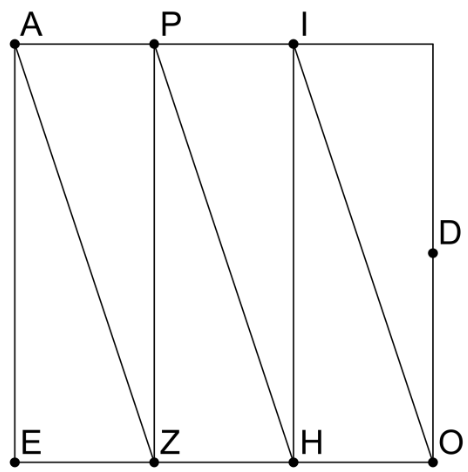
Resolució

Es donen dos segments, un el doble que l'altre, dels quals s'han de trobar dos segments que estiguin en proporció contínua. Aquests són OD (que equival al nostre *a*) i AE (que té el doble de valor que l'anterior, és a dir, 2*a*).

Un cop tenim aquests segments determinats, es dibuixa un rectangle amb AE com un dels costats laterals i EO com el costat de la base, per tant, els costats del rectangle són AE i EO.

Es dibuixen tres paral·lelograms (AZ, PM, IO[23]) que tenen com a costat la llargària de la recta AE, i les diagonals paral·leles. Perquè les diagonals de dos o més paral·lelograms siguin paral·leles, si tenen el costat igual, els paral·lelograms han de tenir les mateixes mides, i per tant, la mateixa àrea. Això es dedueix de la definició de línies paral·leles, que diu que perquè dues línies siguin paral·leles, la distància mínima entre un punt qualsevol d'una i de l'altra, ha de ser sempre la mateixa. Per això dues rectes paral·leles mai no es tallen. Perquè siguin paral·leles, han de tenir la mateixa base, perquè la separació sigui sempre la mateixa.

Es dibuixen les diagonals paral·leles, i s'anomenen AZ, PH i IO. També es defineix el segment OD, que equival al nostre *a*, i s'inscriu sobre el segment que té com extrem O.



A partir d'aquest moment, penso que la solució d'Erastòtanes es pot interpretar de dues maneres diferents, ja que ell diu " plegueu AZ sobre el [paral·lelogram] del mig",

[23] Els paral·lelograms es descriuen utilitzant els extrems de les seves diagonals.

tot i que deixa clar que el paral·lelogram ZI (el del mig) queda fix. Primer explicaré la interpretació que vaig fer jo a partir del text, i tot seguit, la que vaig entendre amb l'ajuda del meu tutor. Com veurem més endavant, amb les dues s'arriba al mateix lloc.

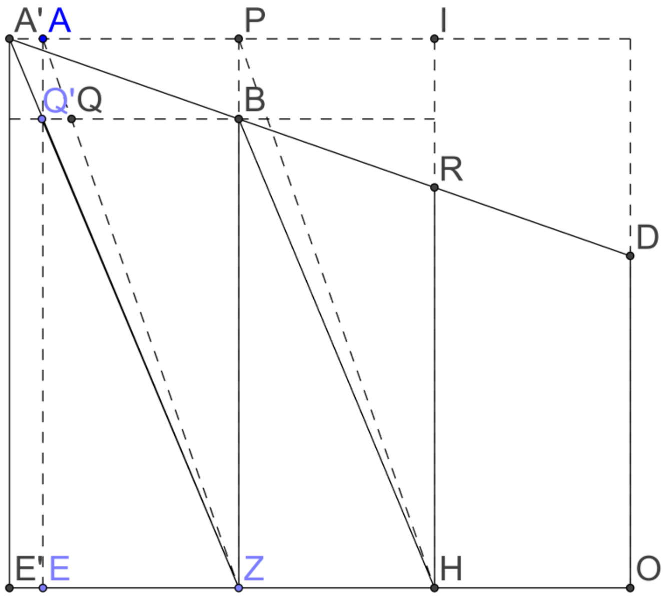
Primera interpretació

Deixant fix d'amplada el paral·lelogram del mig (ZI), es plega la part de dalt per una línia recta que va des d'A fins a D. Així, els paral·lelograms queden tallats. Al punt d'intersecció de la recta AD amb el segment ZP l'anomenarem B, i al que talla el segment IH, R. En aquest moment es tracen les diagonals BH i RO, a més de l'AZ, que ja estava dibuixada.

Hem d'aconseguir que les diagonals tornin a ser paral·leles, ja que, com que hem escurçat l'altura dels paral·lelograms, ja no són paral·leles, perquè de base tenen la mateixa distància que abans, però pel mig, o a la part de dalt, no tenen la mateixa distància.

Perquè siguin paral·leles, s'han de canviar les mides de la base dels paral·lelograms, i com que el segment que hem agafat com a base és un qualsevol, és a dir, no estava predeterminat, el podem variar sense que la solució del problema en resulti alterada.

Eratòstanes ens diu que no variem el paral·lelogram del mig, sinó que variem els dos dels extrems. Així, la base del paral·lelogram del mig ha de quedar igual, per tant, s'han de variar les bases dels altres dos. Ens centrem en el paral·lelogram EP. Fem una línia paral·lela a EO que passi per B, i el punt de tall amb AZ l'anomenem Q. Com que volem que de B a Q hi hagi la mateixa distància que de Z a H, i com que inicialment d'A a P hi havia la mateixa distància que de Z a H, s'ha de portar el punt Q a la recta AE, és a dir, s'ha d'ampliar la base del paral·lelogram, tal com es demostra a la presentació en geogebra "Presentació6.ggb".



[24]

En el cas del paral·lelogram més petit, per un procediment similar a l'anterior, s'ha d'encongir la base. Així hem aconseguit els paral·lelograms buscats, i per tant, les mitjanes proporcionals als segments OD i EA, que són ZB i HR, com veurem més tard.

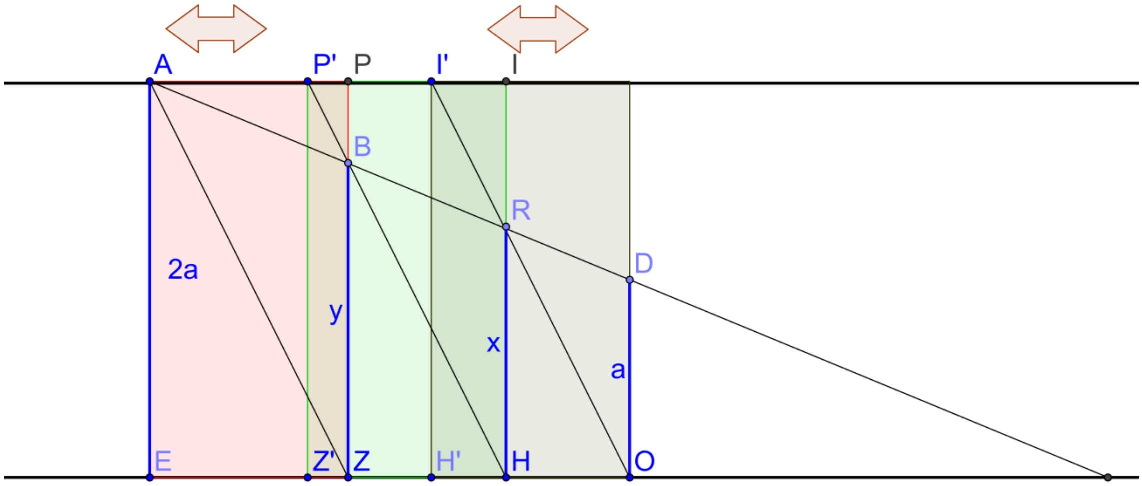
Tot seguit Eratòstanes ens diu que s'ha de prolongar AD i EO, i el punt on es tallen anomenar-lo K.

Segona interpretació

Un cop determinats els paral·lelograms amb les pertinents diagonals, s'han de plegar els dos paral·lelograms laterals sobre el del mig. Aquí, "plegar" s'interpreta com fer lliscar els paral·lelograms sobre la recta EK perquè vagin sobre el del mig. Abans, però, es dibuixa la recta que passa pels punts A i D, i s'anomena K el punt on es troba aquesta recta amb la recta EO. S'han de fer lliscar els paral·lelograms fins que la recta AK, la paral·lela, la recta AK i la perpendicular a EK es tallin en un mateix punt.

En el cas del primer paral·lelogram, això s'esdevindrà quan les rectes AK, ZP i HP es trobin en un mateix punt, que anomenarem B. En el segon paral·lelogram, són les rectes AK, IH i IO les que han de coincidir en un punt, anomenat R. D'aquesta manera, els dos paral·lelograms es mouen sobre les paral·leles per trobar el punt comú.

[24] Aquest esquema només té en compte els paral·lelograms EP i ZI, el tercer està col·locat com una referència.

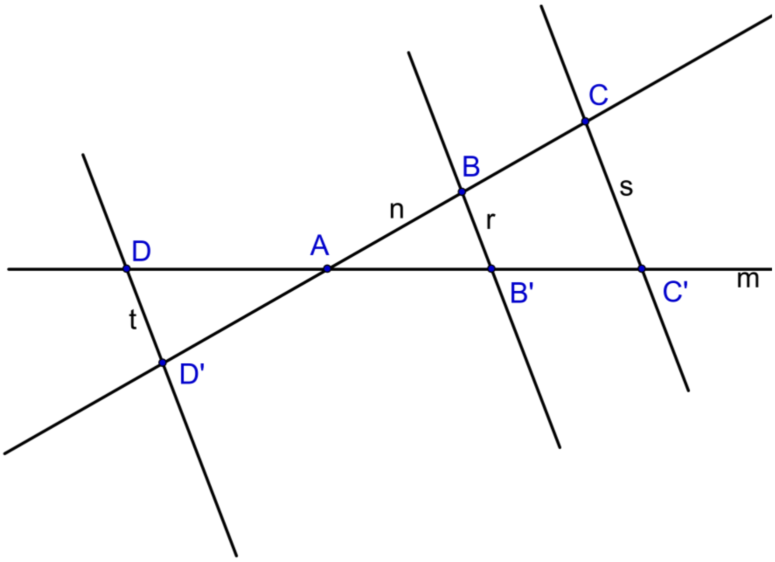


Primer s'ha de trobar el punt B, i després el R. Així s'aconsegueix la mateixa figura que amb el procediment anterior.

En realitat, els dos procediments són el mateix interpretats de manera diferent, ja que en tots dos s'ha d'aconseguir que els punts B i R estiguin sobre la recta. Amb el primer procediment els tens preparats des del principi, i el que has de fer és ampliar o reduir els paral·lelograms. En el segon, en canvi, els paral·lelograms canvien directament perquè s'amaguen sobre el del mig en modificar els punts, és a dir, l'alçada dels polígons finals.

Així, aplicant les dues interpretacions a la mateixa figura, la conclusió és la mateixa, i per entendre-la fem servir el teorema de Tales[25], que diu que hi ha proporcionalitat entre els segments interceptats per un feix de rectes paral·leles sobre dues rectes que es tallen en un punt. O sigui, si $r \parallel s, i\ s \parallel t \;\rightarrow\; \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AD'}{AD}$.

[25] És una teoria de la proporció que Euclides desenvolupa en el llibre V dels elements. Correspon al Teorema VI dels "Elements" d'Euclides.



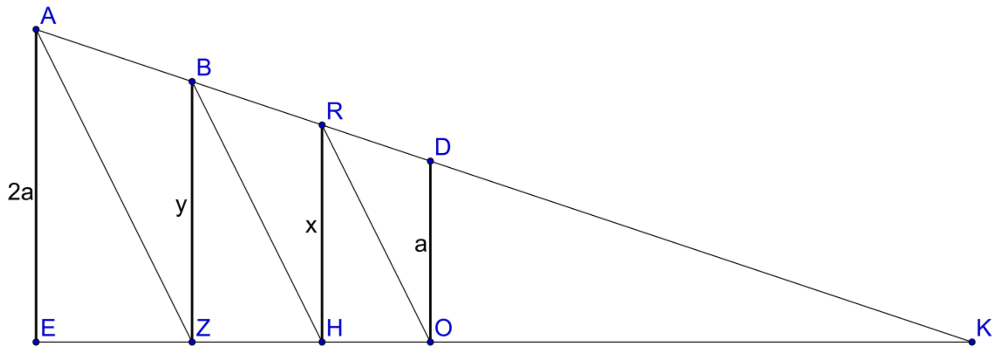
Conclusió

Per semblança, i aplicant el Teorema de Tales, podem dir que tenint en compte les paral·leles AE i BZ, $\frac{AK}{KB}=\frac{EK}{ZK}$, i tenint en compte les paral·leles AZ i BH, $\frac{AK}{BK}=\frac{ZK}{HK}$, ajuntant les dues igualtats, es troba que $\frac{AK}{KB}=\frac{EK}{ZK}=\frac{ZK}{HK}$

Per altra banda, tenint en compte les paral·leles BZ i RH, $\frac{BK}{RK}=\frac{ZK}{HK}$, i tenint en compte les diagonals paral·leles BH i RO, $\frac{BK}{RK}=\frac{HK}{\mathrm{OK}}$ si les ajuntem ens queda: $\frac{BK}{RK}=\frac{ZK}{HK}=\frac{HK}{\theta K}$.

Si ajuntem les dues igualtats, tenim que $\frac{AK}{ZK}=\frac{EK}{ZK}=\frac{ZK}{HK}=\frac{BK}{RK}=\frac{ZK}{HK}=\frac{HK}{\mathrm{OK}}$, i simplificant, trobem que $\frac{EK}{ZK}=\frac{ZK}{HK}=\frac{HK}{\mathrm{OK}}$.

Al mateix temps, contemplem també que $\frac{EK}{KZ}=\frac{AE}{BZ}, \frac{ZK}{KH}=\frac{BZ}{RH}, \frac{KH}{KO}=\frac{RH}{\mathrm{OD}}$. Si substituïm, queda: $\frac{AE}{BZ}=\frac{BZ}{RH}=\frac{RH}{DO}$. I tenint en compte que AE i OD són els segments donats inicialment, ja tenim els dos segments proporcionals que buscàvem. Així, un altre cop ja hem trobat geomètricament els valors de x i y en la proporció primera: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$.



L'instrument que va construir Erastòtanes consistia en una sèrie de tauletes disposades com en la figura de la segona interpretació de manera que, fixant les mides d'*a* i 2*a*, es poden trobar les dues mitjanes proporcionals. Aquest instrument, que s'anomena mesolabi, està basat en la segona interpretació de la solució, ja que mou les tauletes per trobar els punts indicats per poder construir les rectes proporcionals. El funcionament d'aquest aparell, explicat en la segona interpretació, es pot veure a la presentació geogebra "Presentació7.ggb".

3.1. 6. Altres solucions

A més d'aquests autors, n'hi ha més que han trobat solucions, per procediments diferents, al problema de trobar dues mitjanes proporcionals a dues donades.

Per exemple, Heró descriu una manera de trobar-les mitjançant un rectangle que té com a costats els dos segments inicials, prolonga els segments fins a formar un triangle, tot seguit prepara les línies per poder resoldre'l mitjançant igualació de rectangles i quadrats, que ajunta per arribar a la proporció buscada.

Filó de Bizanci també el resol, d’una manera semblant a Heró, però fent servir, en comptes d’un rectangle, un semicercle, on inscriu els segments, i també per igualació de rectangles troba el resultat.

Apol·loni també resol el problema mitjançant un rectangle que té com a costats els dos segments inicials i un semicercle, a més d’altres línies circulars que dibuixa. A partir de la presentació, fa servir el mateix procediment que els dos anteriors.

La solució de Diocles, com la de Menecm, en canvi, té un caràcter deductiu, és a dir, primer ens presenta la solució i després es disposa a explicar-la. Així, mitjançant un cercle, els seus diàmetres i les línies inscrites en ell, arriba a trobar les mitjanes contínuament proporcionals.

Pappos planteja de trobar un cub que tingui una raó determinada amb un altre cub ja donat, i així troba la solució al problema. Ho resol mitjançant un cercle, les rectes inscrites i raons entre quadrat. No obstant això, aquesta solució té bastants similituds amb la de Diocles.

Un altre que fa servir les mateixes eines que els dos esmentats últimament és Esporus, el qual, mitjançant un semicercle i rectes inscrites dintre seu, arriba a trobar raons entre els quadrats, i per tant, troba les mitjanes buscades.

Nicomedes també construeix un aparell, ja que opina que el de Eratòstenes no és fiable, i també ho resol mitjançant rectangles i igualtats amb els quadrats.

4. Comentaris i interpretacions contemporanis

Els estudiosos contemporanis s'han interessat per diversos aspectes relacionats amb el problema que en aquest apartat examinarem i desenvoluparem.

4. 1. Sobre l'atribució a Plató

El primer afecta a la intervenció de Plató en la solució que se li atribueix. Wilbur R. Knorr, a *The ancient tradition of geometric problems,*[26] se n'ocupa extensament. Explica que l'autoria del procediment atribuït a Plató per resoldre el problema ha estat posada en dubte per diferents estudiosos. Les raons en què es basen són principalment dues. La primera és que Eratòstanes, en el seu poema, no el menciona entre els que han "fet esforços per duplicar el cub". El text cita Arquites, Menecm, Èudox i el mateix Eratòstanes com a autors que han trobat solucions al problema esmentat, però no Plató, i això resulta molt significatiu si tenim en compte que Eratòstanes tenia molt d'interès en la filosofia platònica, com es demostra en la composició del *Platonicus,* on explica la relació històrica —o mítica— de Plató amb l'oracle de Delos. Es pot suposar que si hagués conegut una solució de Plató, l'hi hauria introduït, o com a mínim hauria citat Plató en el seu text, tal com va fer amb els altres autors. La segona raó en què es basen és la sorprenent flexibilitat de les tradicions que, per una banda, associen la solució atribuïda a Plató a un mecanisme i per l'altra banda defineixen Plató com un defensor de la puresa de la geometria, molt crític cap als seus col·legues que feien ús de procediments mecànics en els estudis geomètrics. La naturalesa de la filosofia platònica proporciona molt de crèdit a aquesta posició antimecanicista. Vistes aquestes dues opcions, i sabent que en l'època antiga hi havia el costum de mitificar personatges com

[26] Al capitol "The Geometers in Plato's Academy", p. 49-66, que agafem com a base per a aquest apartat.

Pitàgores o Plató atribuint-los prodigis de perspicàcia, es pot deduir que és bastant probable que l'aparell mecànic no fos obra de Plató.

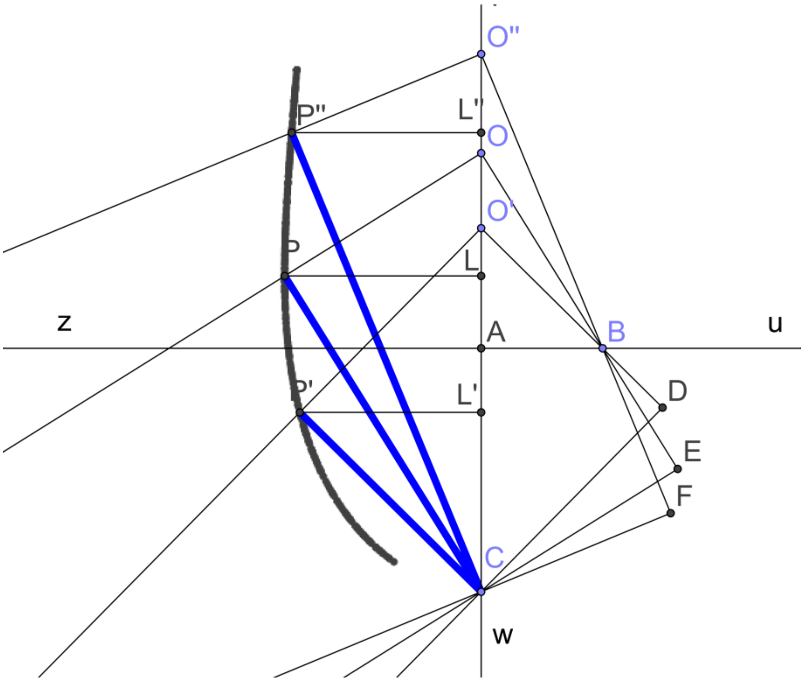
A partir d'aquí, la pregunta és: si no va ser obra de Plató, quin és l'origen d'aquesta solució? El fet que no figuri en el text d'Eratòstenes ens fa pensar que la resolució va ser tardana, però al mateix temps, com veurem més tard, es pensa que la resolució de Diocles, només una mica posterior a l'escrit de Eratòstenes, es basa en bona part en la atribuïda a Plató.

Es pot interpretar que l'associació del mecanisme amb Plató té l'origen en la circumstància que Eratòstanes va incloure l'objecte en el seu treball *Platonicus*, i el va fer constar com la peça central d'una discussió sobre la natura de la geometria entre Plató i un altre col·lega. Pot ser que per això autors posteriors, com Eutoci, han interpretat que Plató en va ser l'autor. Això no vol dir que Eratòstanes dissenyés l'aparell, sinó que ho va fer un contemporani de Plató.

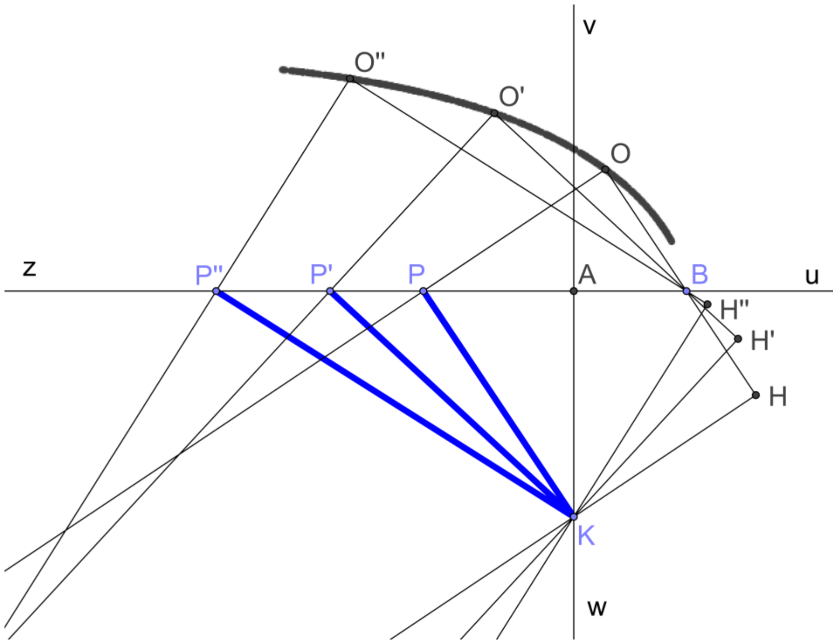
Qui pot ser l'autor? En el text d'Eratòstenes només són anomenats Menecm, Èudox i Arquites, i podríem pensar que és entre ells entre els que hem d'anar a buscar l'autoria. Menecm i Arquites, tal com podem interpretar a partir del text d'Eutoci, van fer servir mètodes que sembla que no condueixen a la concepció d'aquest aparell. En aquesta línia, només Èudox podria ser l'autor de la solució i el dissenyador de l'aparell. Del mètode de Èudox, Eutoci no n'explica la solució, i ho justifica al·legant que fa servir línies corbes i realment no les usa i que fa passar una proporció directa per una de contínua, que és l'objectiu del problema. Knorr intenta interpretar la solució suposadament de Plató de manera que aparegui alguna línia corba, i així, provisionalment, l'atribueix a Èudox.

A primera vista, en la resolució atribuïda a Plató del problema transcrita per Eutoci no s'hi reconeix cap línia corba, perquè es basa en la perpendicularitat i, per tant, en els angles rectes. Però Knorr fa la següent interpretació, en la qual es pot trobar una generació de línies corbes:

Un cop tenim l'aparell (el mesolabi, veure pàgina 36-37) el col·loquem en la posició inicial d'aquest plantejament del problema (amb la barra OH damunt el punt B, el punt K damunt de C, el punt O sobre el semieix v i el punt P sobre el semieix z). A partir d'aquí, mantenim fixos els punts H i K sobre les mesures predeterminades i, en comptes d'ajustar la barra OP i mantenir P fix sobre el semieix *z*, mantenim la barra OP secant al semieix *z* i fem girar el punt P per fer-lo coincidir amb el semieix *k*. En aquest cas, al buscar el punt en que P toca el semieix *z*, el punt P dibuixa una línia corba, que és a la que es podria referir Eutoci quan parla de la línia corba de Èudox. Podeu comprovar la generació d'aquesta corba mitjançant la presentació geogebra "Presentació8.ggb".



Una altra interpretació de la mateixa solució es pot visualitzar quan, mantenint els punts K i H fixos en els seus punts i O sobre l'eix v, es fan girar les paral·leles KP i HO entorn els punts K i H. Així, P torna a descriure la mateixa corba. Aquests dos procediments es poden aplicar al punt O, mantenint tots els altres en les seves posicions, i es genera una altra corba del mateix tipus però orientada de manera diferent.



Aquesta és la interpretació més estesa avui en dia, tot i que hi ha altres interpretacions del mètode que va fer servir Èudox.

Knorr comenta que el model de Diocles es pot interpretar com un cas límit d'aquesta resolució, quan B o C coincideixen amb A, o sigui, que només surt un dels segments predeterminats, i d'aquesta manera també es generen corbes. Per això es pensa que Diocles coneixia aquesta solució i s'hi va inspirar, perquè la solució de Diocles està basada en un cas particular d'aquesta. En conseqüència, aquesta solució seria anterior a Diocles.

Un procediment semblant a l'atribuït a Plató s'utilitza en una versió aràbiga basada en un escrit del geòmetra Menelaus del II segle aC. Tot i que en aquesta tampoc no es genera una corba a simple vista, la interpretació que es basa en una corba és fàcilment reconeixible. En aquest cas, se suposa que va ser Menelaus, un altre autor, qui va ometre la corba. Aquesta pot ser una explicació de com el text d'una solució d'Èudox mitjançant línies corbes podria haver arribat a Eutoci en una versió on no es mostren les corbes, i per això ell la va descartar, fent-la passar com una solució falsa.

Pel que fa al tipus de proporció, Eutoci diu que en fa passar una per una altra. Intentem explicar-ho. En una possible interpretació del mètode d'Èudox podem incorporar una perpendicular al semieix *v* que passa pel punt P i anomenar L el punt d'intersecció (veure figura de la pàgina anterior). Així, en el moment de descriure la proporció, podem dir: $\frac{BA}{AO} = \frac{OL}{LP}$, i Eudoci no s'hauria adonat que és el mateix que dir $\frac{BA}{AO} = \frac{AO}{AP}$, ja que, quan es compleix la proporció, el punt P és sobre el semieix *z* i, per tant, el punt de tall de la perpendicular a l'eix *v* passant pel punt P és el punt A; en conseqüència, en aquest cas, L = A, i conseqüentment, AO = LO i AP = LP.

Segons Knorr, aquesta seria una possible explicació del mètode d'Èudox, tot relacionant-lo amb l'explicació atribuïda a Plató i interpretant per què Eudoci no el va transcriure.

Tanmateix, s'ha de considerar que Èudox va resoldre el problema d'una manera abstracta, ja que Eratòstanes, en el seu poema, critica tant Menecm com Arquites com Èudox per haver enfocat el problema d'una manera estrictament teòrica sense pensar en una execució pràctica, tot atribuint-se el mèrit de la construcció d'un aparell mecànic.

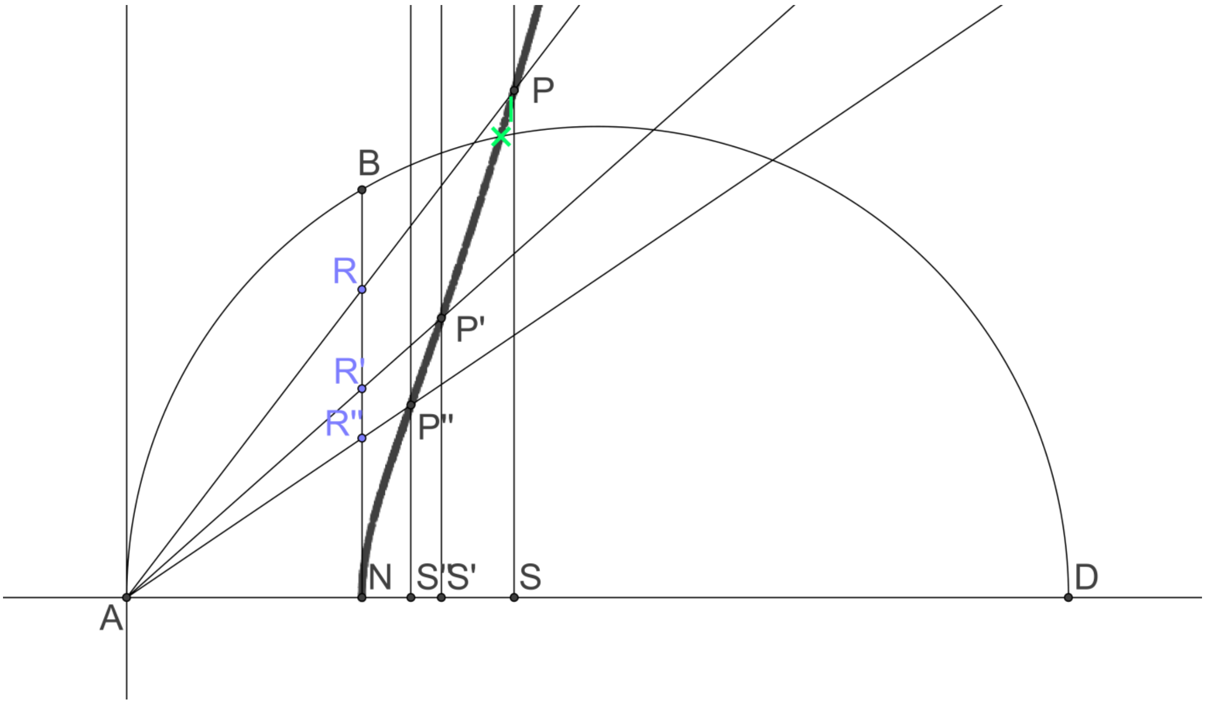
4.2. Sobre el mètode d'Èudox

Ja hem vist que el transmissor de les diferents resolucions del problema de la duplicació del cub, Eudoci, no transmet la solució d'Èudox, amb l'argument que és falsa, perquè diu que utilitza una corba quan no fa servir i que fa passar una proporció directa per contínua. Per mitjà del seu text i del text d'Eratòstenes, també sabem que Èudox autor va trobar una solució, i per tant, a partir dels comentaris que es dedueixen dels textos d'aquests autors, diferents estudiosos han fet hipòtesis sobre possibles resolucions atribuïbles a Èudox.

Ja hem explicat una possible solució d'Èudox que crea corbes, i una proporció contínua, i que, en conseqüència, podria ser verídica. No obstant això, Tannery[27] fa una altra interpretació a partir de la figura d'Arquites basant-se en la projecció ortogonal de les corbes d'intersecció en el pla de la base. Primer ho explicarem d'una manera més moderna i més senzilla d'entendre, i després ja passarem a la manera com l'hauria pogut interpretar Èudox.

[27] Segons Knorr, *op. cit.*, p. 53.

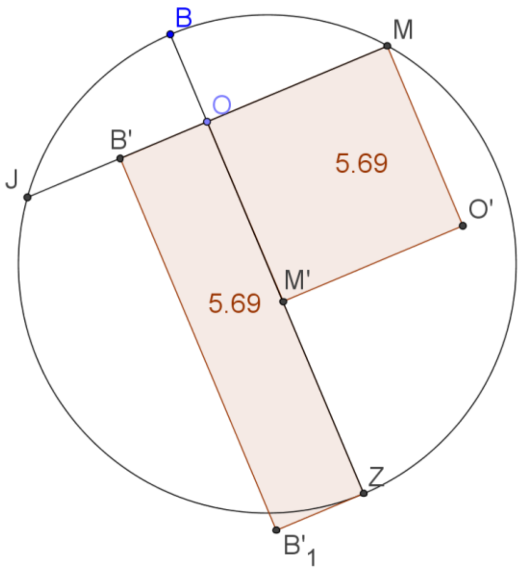
Ens centrarem en el semicercle que té de base el diàmetre AD, que és la secció del cilindre projectada pel tor. Així, la projecció del con i el tor dóna origen a un pla corbat que el construïm de la següent manera: en el semicercle inicial, dibuixem des de B una recta perpendicular al diàmetre, el punt d'intersecció d'aquesta recta amb el diàmetre l'anomenem N. Dibuixem unes quantes rectes des d'A que siguin secants a la recta NB. Anomenarem R aquests punts d'intersecció. Dibuixarem també un punt S inscrit a AD amb la característica que AR = AS. En aquest moment, farem unes quantes perpendiculars al diàmetre AD des de S, i els punts en què toquin la recta AR, els anomenarem P. Així, si unim tots els punts P, obtenim una corba, i el punt en que aquesta talla el semicercle, l'anomenem I. D'aquesta manera, si unim I amb A, trobem la primera mitjana proporcional que busquem, o sigui, *x*. Podem veure aquest procediment amb la presentació en geogebra "Presentació9.ggb".



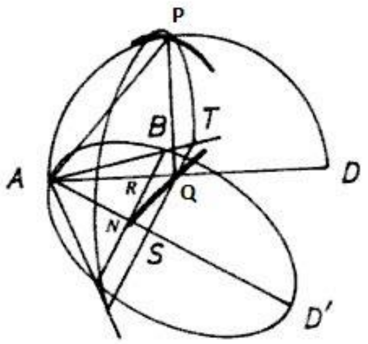
Ara farem la interpretació amb mètodes més antics, que suposem que són els que hauria aplicat Èudox en cas d'haver fet servir aquest mètode. Primer, considerem el punt P com la intersecció de les superfícies del tor, el con i el cilindre. Tenint en compte el tor, i per mitjà de la "potència d'un punt respecte una circumferència",[28] (concepte que podeu comprovar a la presentació geogebra "Presentació10.ggb") veiem

[28] Si *P* és un punt fix, i *C* una circumferència, la potència del punt P respecte a C és el producte de les seves distàncies a qualsevol parell de punts de la circumferència alineats amb *P*. El valor de la potència és *constant* per a cada punt *P*, independentment de l'elecció dels punts de la circumferència.

que AP és la mitjana proporcional d'AQ i AD, ja que AP és una corda en el semicercle APD; així, $AP^2 = AQ \times AD$.



Així mateix, si agafem com a referència el con, obtenim que AP = AT, ja que tant T com P són en el mateix pla que talla el con paral·lel a la base, i per tant P i T estan a la mateixa distància d'A. De la mateixa manera, AB també és una corda, però en el semicercle ABD'. Per tant, $AB^2 = AN \times AD'$, ja que N i Q són el mateix punt de diferents circumferències; així, AQ en la circumferència APD equival a AN en ABD'. D'aquesta manera, arribem a la següent igualtat: $\frac{AT^2}{AB^2} = \frac{AP \times AD}{AN \times AD'} = \frac{AQ}{AN}$, ja que, com sabem, AD = AD'. Per altra banda, mitjançant triangles semblants i aplicant el Teorema de Tales, $\frac{AT}{AB} = \frac{AS}{AN}$. Així, ajuntant les equacions, podem dir que $\frac{AS^2}{AN^2} = \frac{AP}{AN} \rightarrow \frac{AS}{AN} = \frac{AP}{AS}$.



29

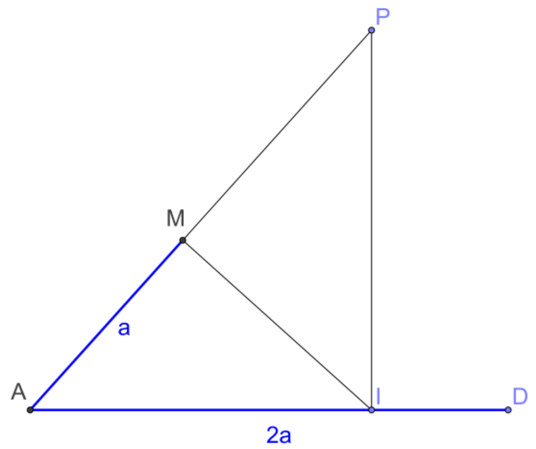
Al mateix temps, i una altra vegada considerant triangles semblants i el Teorema de Tales, diem que $\frac{AP}{AS} = \frac{AR}{AN}$, i així, $\frac{AR}{AN} = \frac{AS}{AN} \rightarrow AR = AS$, i d'aquesta última igualtat es troben els punts amb què, si apliquem el mètode d'unió "punt a punt", podem trobar realment la corba d'Èudox i així, trobar la intersecció amb el semicercle ABD'. D'aquesta manera, una vegada més, haurem trobat el punt I, i si l'unim amb A tenim la primera mitjana que busquem.

R. Riddell[30] és un altre autor que ha fet una interpretació sobre el que hauria pogut ser la solució de Èudox, tot associant la configuració de triangles rectangles, essencial al mètode d'Arquites, amb un altre treball seu. Aquest treball es basa en determinades corbes, que ell anomena hipopèdiques, com les responsables del moviment dels planetes. Aquest model, però, no és factible en els moviments dels planetes, ja que no té en compte diversos paràmetres, i alguns planetes, com Venus, no s'hi veuen reflectits. Així i tot, Riddell considera que podria haver fet servir aquesta corba per resoldre el problema de la duplicació del cub.

[29] Figura extreta de Knorr, *op. cit.*, p. 54
[30] Citat per Knorr, *op. cit.*, p. 55.

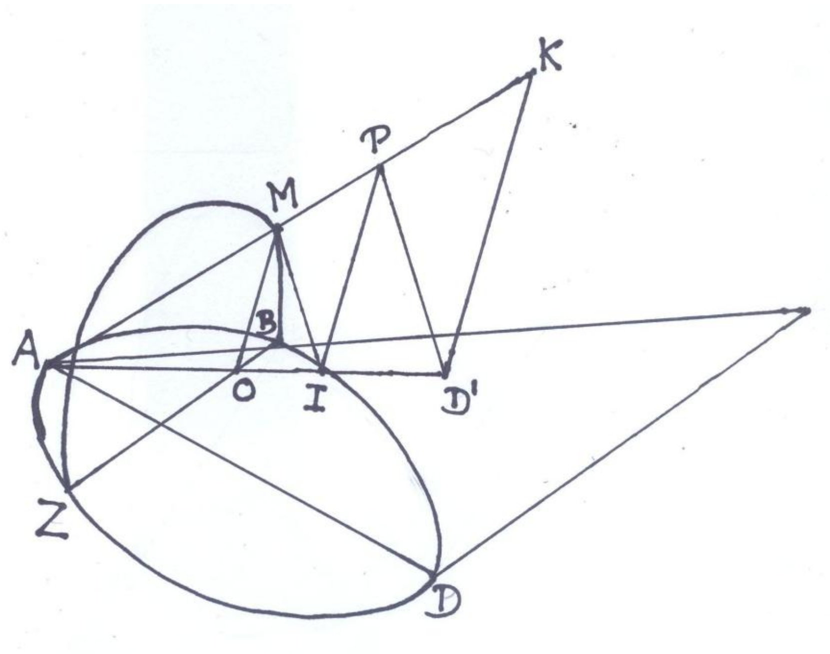
4.3. Sobre el mètode d'Arquites

A més de l'exposada, s'ha generat una altra interpretació, més recent, la resolució d'Arquites que proposa com a objectiu trobar una adaptació del triangle APD en què AM tingui la mida del segment inicial, per així poder dir que AI és el segment buscat (vegeu la figura de la pàgina 32). Examinem-la. Primer, considerem dos cercles amb diàmetre AD. Un té els punts A, D', B, Z i I en la seva circumferència i l'altre, que "surt del paper", correspon al semicercle AD, en el diàmetre del qual hi ha els punts I i O, i en la seva circumferència el punt P. A més, en considerem un altre (que té de diàmetre ZB) que serà perpendicular als dos esmentats, i en el qual el segment ZB serà comú a aquest i al de diàmetre AD. El procediment és el següent: deixem que la corda AP pugui rodar entorn d'A formant un con. Per cada posició de P podem dibuixar una PI perpendicular a AD i una IM perpendicular a AP, d'aquesta manera:



En aquest cas, M traça una corba tal que AM decreix contínuament assumint petits valors al voltant d'A. Per tant, quan, AM equival a AB, és quan es troba la solució del problema, ja que AD = $2a$ i AM = a, i per tant, AI (x) i AP (y) serien les dues mitjanes proporcionals en la proporció $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$. Això es pot comprovar en la presentació en geogebra "Presentació11.ggb".

Per no haver de fer una construcció punt a punt del lloc M, hi ha una manera alternativa d'efectuar-ho: mitjançant les interseccions comunes als llocs associats amb els punts P, I i M. Així, el lloc P sempre ha de ser en la circumferència del cercle de diàmetre AD, ja que és secant al punt D' de la circumferència AD', i el seu lloc geomètric és la circumferència AD. El segment AM serà igual a AB sempre que M estigui en el semicercle que té com a diàmetre BZ. Respecte al punt I, hem de tenir en compte que IM ha de ser perpendicular a AP, i ha de fer de peu de la línia perpendicular de P a AD.



Com ja hem dit, M pertany a la semicircumferència de diàmetre ZB, que és perpendicular a APD. Es traça una línia des del punt M perpendicular a ZB, i el punt on toca el diàmetre se l'anomena O. Aquest punt també és la intersecció de les rectes BZ i AI. Com ja hem dit, MO és perpendicular a totes dues i M és en la intersecció dels dos semicercles (APD i ZMB), tots dos perpendiculars entre ells i respecte a la base. Així, l'angle ZMB està inscrit en un semicercle; per tant, considerant el punt O, $MO^2 = ZO \times OB$. Així, cal que AMI sigui recte, perquè es compleixi que $MO^2 = ZO \times OI$, ja que així, OI = OB. A més, per la mateixa explicació d'abans, diem que $AO \times OI = ZO \times OB$, i així podem dir que ZOB i AOI són segments o cordes en intersecció en el mateix cercle, que l'anomenarem ZABD', ja especificat abans, i que estarà en el pla del diàmetre AD' inicial, en el qual també estarà inscrit el segment AB. A partir d'aquí, s'agafa el semicercle ABD' com la semicircumferència a la qual pertany el lloc de I, de manera que KI cau sobre el semicilindre recte que té ABD' com a base, i així podem determinar els elements de la nostra proporció, ja que AD = AD' = 2*a*, AM = AB = *a*, AI = *x* i AK = *y*.

Mitjançant una interpretació com aquesta, es veu que la configuració de triangles rectangles semblants buscada es pot resoldre a través de la determinació de P com la intersecció del tor, el semicilindre i el con, que és com ho interpreta Eutoci i com nosaltres ho hem interpretat més amunt.

4.4. Sobre el mètode de Menecm

Com ja hem vist, Menecm troba els segments buscats de dues maneres diferents, sempre mitjançant corbes còniques. Una és a través de dues paràboles i l'altra, d'una hipèrbola i una paràbola.

Així, Eutoci diu que si el segment x es col·loca en angle recte respecte *y*, la proporció $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$ associa els termes *x* i *y* com a coordenades d'una paràbola, i passa el mateix amb l'altra paràbola i la hipèrbola. Es creu que la col·locació en forma de línies perpendiculars va ser inspirada per la solució atribuïda a Plató, que si realment va ser trobada per Èudox, és bastant probable que Menecm la conegués.

Tanmateix, el que estranya d'aquesta solució és com Menecm va ser capaç de construir aquestes relacions lligant-les a les propietats de seccions d'un con. Però suposem que Eutoci, a l'hora d'elaborar el text, va estar molt influït per la teoria d'Apol·loni de les seccions còniques, per això no podem saber del cert fins a quin punt va escriure Menecm i a partir de quin punt ho va interpretar Eutoci basant-se en Apol·loni. Així mateix, un text elaborat per un geòmetra del quart segle abans de Crist, època en què va viure Menecm, difícilment podia contenir paraules com "asímptota", o fins i tot com "hipèrbola" o "paràbola", per tant, aquestes serien paraules introduïdes per Eutoci després de conèixer la teoria d'Apol·loni.

Per això els estudiosos moderns han intentat diverses reconstruccions de les tècniques que Menecm podria haver fet servir per generar aquestes corbes, i per tant, per trobar la solució. Tot i això, es creu que la teoria de Menecm pot haver estat un fort precedent de la d'Apol·loni, i hi pot haver influït en gran mesura.

A part d'aquest text, n'hi ha dos més que reflecteixen l'ús primitiu de les còniques, aquests dos són l'escrit pseudoaristotèlic *Problemes* i els *Phoenomena* d'Euclides, tots dos del segle IV aC. Basant-nos en això i en els treballs d'Arquímedes, sabem que en el seu temps, Euclides i altres geòmetres estaven en condicions de fer una teoria de les còniques. Però la solució de Menecm és de mig segle abans, quan aquests coneixements no estaven quasi gens desenvolupats.

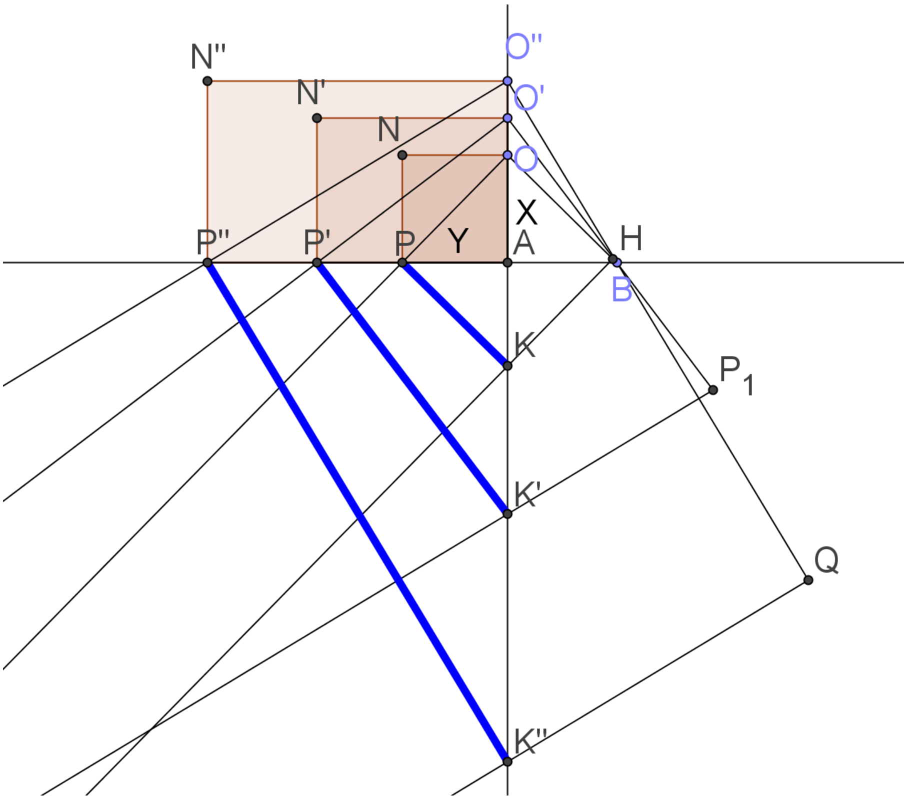
Eratòstenes, en el seu poema, va escriure la frase "no busquis tallar les tríades de Menecm de la secció del con", en què reconeixem que, amb el concepte de "tríades", Eratòstanes es refereix a dues paràboles i una hipèrbola, que són les corbes que havia trobat Menecm. Per tant, d'aquí s'intueix que Menecm no coneixia l'existència d'una tercera corba cònica, anomenada el·lipse, perquè ni ell ni ningú més, que ens hagi arribat, no l'havia generat a partir dels segments proporcionals, és a dir, no l'havia utilitzat per trobar la solució a aquest problema clàssic.

Així, en la frase abans esmentada, contràriament al que podríem intuir a simple vista, Eratòstenes no ens diu que Menecm va obtenir les corbes seccionant el con, sinó que facilita l'entesa de la solució a un lector contemporani que ja conegui les corbes còniques com a interseccions de plans a un con. És a partir d'aquí que intuïm que Menecm va construir aquestes corbes d'una altra manera.

4.5. La solució atribuïda a Plató i la de Menecm comparades

Ja hem apuntat que si la solució atribuïda a Plató és realment d'Èudox, Menecm s'hi podria haver inspirat per dur a terme la seva resolució. Tot seguit interpretarem les connexions entre les dues resolucions.

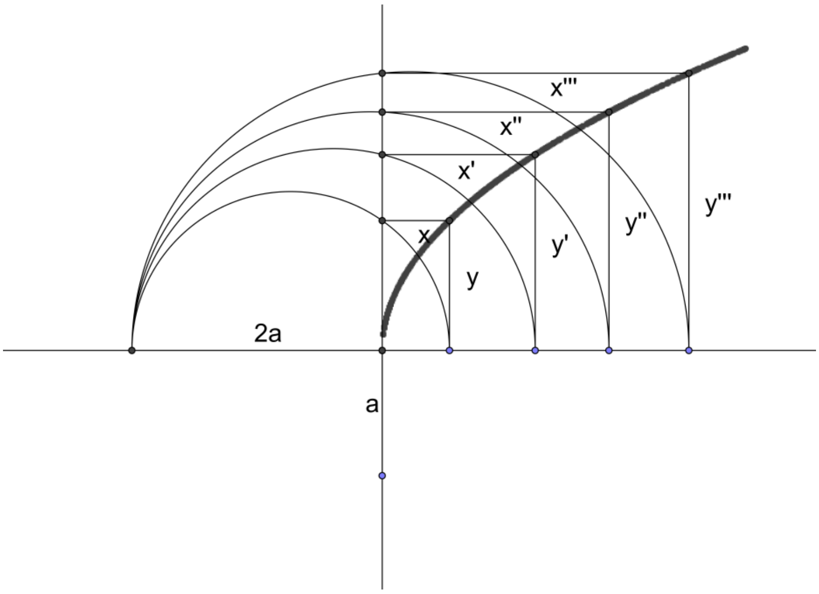
Menecm hauria pogut obtenir aquestes corbes mitjançant les tres relacions derivades de la proporció contínua $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$. Utilitzant l'aparell atribuït a Plató, es manipula l'angle recte HOP de manera que HO sempre reposa en el semieix u. Si per cada posició d'O completem el rectangle OAPN, el vèrtex N traça una corba les coordenades de la qual ens diuen que AO (o sigui, x) és la mitjana proporcional d'AH (que equival a a) i AP (que seria y).



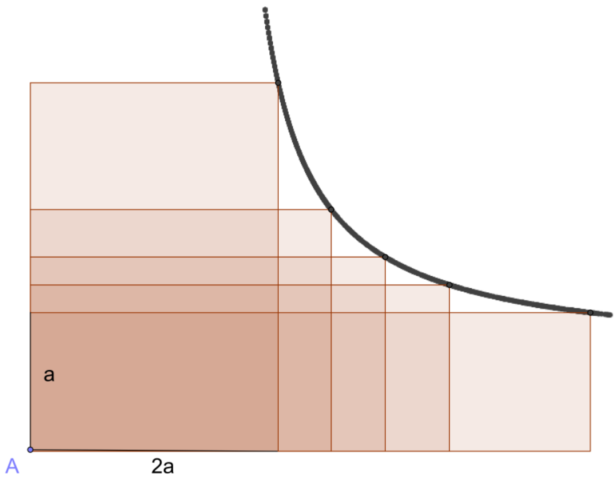
Al mateix temps, KP sempre passa a través del semieix *w*, i P sempre és en el semieix *k*; així, si completem aquest rectangle (OAHX), el vèrtex X traça una corba les coordenades de la qual responen al fet que AP (*y*) és la mitjana proporcional d'AO (*x*) i AK (2a). Per tant, en la intersecció de les dues corbes, les coordenades *x* i *y* seran les dues mitjanes proporcionals entre els segments donats (*a* i 2*a*), tal com ens demana el problema. Això s'interpreta de la següent manera: de la primera corba obtenim que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$, de la segona que $\frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$; si les ajuntem, tenim la proporció desitjada.

Aquesta última solució és, tal com hem vist, una barreja de la atribuïda a Plató i la de Menecm, per això podem intuir que Menecm, si coneixia la primera, podria haver-la fet servir per arribar a la seva solució i trobar aquestes corbes tan especials.

Vist encara d'una altra manera, es considera que *y* és una semirecta perpendicular al diàmetre d'un cercle i que *y* divideix aquest diàmetre en dos segments de longitud *x* i 2*a*. Per produir la corba associada amb la relació $y^2 = a \times 2a$, s'han de traçar tantes ordenades *x* com vulguem, determinar una *y* per cada una d'elles, localitzar un punt d'intersecció per cada parell de coordenades i, un cop tenim aquests punts, connectar-los mitjançant un regle flexible o una altra eina de dibuix adequada. D'aquesta manera generem una paràbola, es fa el mateix per a la relació $x^2 = ay$ amb les coordenades canviades. Per aquest procediment, hem aconseguit traçar les dues paràboles de la manera dita “punt a punt”.



Respecte a la relació $xy = a \times 2a$, es troba y coordinant x mitjançant l’“àrea d’aplicació parabòlica”, que es basa en què la diagonal del rectangle que té com a costats $2a + x$ i $a + y$, passa a través de l’origen. Així, contemplant unes quantes x, es troben les y corresponents, i el vèrtex del quadrilàter que formen x i y construeix una corba, que en aquest cas és la hipèrbola. D’aquesta mateixa manera es troba x, coordinant y amb aquest mètode. Un cop dibuixades totes aquestes corbes sobre els segments a i $2a$, es determina el punt d’intersecció dels punts x i y que solucionen el problema estudiat.



La resolució de problemes mitjançant el mètode anomenat "punt a punt" és pròpia dels autors d'aquesta època. Diocles és el primer del qual tenim documentat que l'usa, quan construeix la seva pròpia corba per resoldre també aquest problema determinant una sèrie de punts i connectant-los amb un regle flexible, i també d'aquesta manera efectua la seva construcció alternativa de la paràbola.

Eutoci descriu sovint aquest procediment per dibuixar les còniques. Explica que molts dissenyadors d'artilugis mecànics el fan servir perquè és una de les poques maneres, o l'única, per dibuixar aquestes corbes, ja que altres mètodes no van bé.

Knorr explica que cap font no ens indica l'origen d'aquest mètode "punt a punt", però és evident que Diocles va agafar el procediment de Menecm, ja que també va fer servir la forma de "doble paràbola" per a la resolució d'aquest problema, per això es pensa que també hauria pogut agafar el mètode de dibuixar les corbes. No obstant això, es pot veure que aquest mètode de construcció de corbes pot ser una intuïció significativa en el desenvolupament de la geometria. Per això es pot intuir molt fàcilment que aquest mètode va ser ideat per Menecm o per algun autor anterior, i que Diocles es va basar en la resolució de Menecm.

Sigui com sigui, queda bastant clar que Menecm no va basar la seva solució en corbes tretes de la intersecció de diversos plans a un con, sinó que ho va fer mitjançant les relacions de segon ordre entre els segments mitjans en una proporció contínua. La interpretació mitjançant el cub es deixa per a més tard, per a l'època d'Euclides, quan a més, els geòmetres es van centrar en l'estudi de les propietats. Així, podem intuir que la línia de pensament que Eutoci ens explica que va prendre Menecm en la seva solució és bastant fiable.

5. Conclusions

M’interessa extreure dos tipus de conclusions: les estrictament del treball i les més personals. Començant per les del treball, penso que he assolit l’objectiu més essencial, que és entendre les diferents solucions d’aquest problema. A més, crec que les he aconseguit explicar d’una manera prou clara i que ho he reforçat mitjançant els dibuixos i les presentacions. A més, he après a fer anar el programa Geogebra, que era un dels principals objectius del treball. La conclusió estricta del treball sobre la base del seu títol és que sí, que es pot duplicar un cub, no amb regle i compàs, sinó sobre la base de procediments geomètrics i per mitjà d’aparells mecànics.

Hem vist els procediments i els resultats dels matemàtics grecs. Arquites ho soluciona a partir de interaccions de figures tridimensionals generades des dels segments donats, amb els quals troba les dues mitjanes proporcionals. Menecm, en els dos casos, a partir de les interaccions de les dues corbes còniques, traça línies perpendiculars als seus eixos i aquests són els dos segments buscats. L’atribuïda a Plató troba la solució mitjançant la figura descrita, un cop estan tots els punts a damunt les línies pertinents, la distància dels quatre punts amb el centre dels eixos equival al valor dels quatre segments proporcionals. Eratòstanes, un cop dibuixats els quadrilàters amb les diagonals paral·leles i quan els punts de les diagonals coincideixen amb les verticals, conclou que les distàncies entre aquests punts i la base corresponen a les mitjanes proporcionals. Les possibles d’Èudox són una mescla de totes les altres, amb què també arriba a la solució. En tots els casos s’arriba a les mitjanes proporcionals, i, a partir d’aquí, per trobar la solució del problema només s’ha d’agafar la més petita.

Però penso que la conclusió real del treball és que hi ha moltes maneres de resoldre un problema d’aquestes característiques, i també hi ha més d’una manera d'interpretar les solucions, totes correctes, i que a partir de diferents resolucions d'un mateix problema es poden trobar o descobrir o entendre conceptes nous.

En aquest treball, a part d'aprendre a fer anar el programa Geogebra i d'aprendre a interpretar les solucions, a part de molts conceptes matemàtics nous que he adquirit, m'he adonat que un problema es pot resoldre de moltes maneres diferents, i totes poden aportar nous coneixements, si s'hi posa imaginació i esforç. A partir d'aquí, es conclou que, ni que un problema ja tingui la solució, es pot tornar a resoldre per trobar maneres diferents de fer-lo o d'interpretar-lo. A més, també he après que, en un problema d'aquestes característiques, un petit pas pot ser realment un pas de gegant. Per dir això em baso en la solució d'Hipòcrates, que Eratòstenes va menysprear perquè no havia arribat a la solució sinó que s'havia limitat a transformar el problema, però segurament que sense el "petit" pas d'Hipòcrates no s'hauria arribat a la solució o s'hi hauria arribat d'una altra manera, per tant, potser no s'haurien desenvolupat aquests avenços matemàtics. La lliçó és que mai no s'ha de menysprear una petita intervenció, perquè a partir d'aquesta pot venir la solució final.

A nivell més personal, aquest treball m'ha permès lligar les matemàtiques amb la filosofia i la història clàssiques, que, com ja he explicat, m'interessen. En l'elaboració del treball també he comprovat que els grans homes i dones també s'equivoquen. Per exemple, quan Eutoci no va transmetre la solució d'Èudox, que podria haver estat un error de comprensió o de no anar més enllà en la solució. I també que els estudiosos més actuals tenen controvèrsies per la validesa d'alguns textos.

El més important, però, és que m'he adonat que les solucions d'aquest problema són importants per l'estricta solució, però que la importància real rau en els procediments usats i els nous conceptes matemàtics trobats. Per això, per resoldre un problema d'aquestes característiques, no n'hi ha prou a copiar el que han resolt uns altres, sinó que s'ha de saber innovar i, partint dels recursos de cadascú, intentar trobar la solució, i mai desanimar-se si no s'hi arriba, perquè potser el pas que has fet tu serveix a altres que sense aquest pas no arribarien a una solució.

6. Bibliografia

Autors varis. *Gran enciclopèdia catalana*. Barcelona, Enciclopèdia Catalana. Barcelona, diversos anys.

Autors varis. *Matemàtiques I*. Editorial Edebé. Barcelona, 2008.

Boyer, Carl B. *Historia de la matemàtica*. Alianza Editorial. Madrid, 1986

Castrillo Gómez, Raül. "Construccions amb regle i compàs", 2010. http://www.fme.upc.edu/estudiar-a-lfme/activitats-per-a-secundaria/premi-poincare/arxius/construccionsambreglaicompas.pdf

Euclides, *Elementos. V*. Editorial Gredos. Madrid, 1991.

Eutoci, "El problema délico (del comentario al libro II)" de "Sobre la esfera y el cilindro", dins Arquímedes. *Tratados,* vol. I. Editorial Gredos. Madrid, 2005.

Farrington, Benjamin. *Ciencia y filosofía en la Antigüedad*. Editorial Ariel, Barcelona, 1986.

Heath, Thomas L. *A history of Greek mathematics*. The Clarendon Press. Oxford, 1921. Consultat a internet a l'adreça http://infomotions.com/etexts/archive/ia310827.us.archive.org/2/items/cu31924008704219/cu31924008704219_djvu.htm

Nolla, Ramon. *Estudis i activitats sobre problemes clau de la Història de la Matemàtica,* 2006
http://scm.iec.cat/Publicacions/pubs_2.asp

Knorr, Wilbur R. *The ancient tradition of geometric problems*. Birkäuser. Boston, 1986.

Wikipèdia.

http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/_00the.htm http://www.schillerinstitute.org/newspanish/InstitutoSchiller/Ciencia/FuncHiperbolicas.html

http://www.math.cornell.edu/~mec/2008-2009/HoHonLeung/page6_knots.htm

http://fileman.upct.es/~pepemar/triangulo/pitagoras.html