# Àlgebra lineal

Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

# 1 Sistemes d'equacions lineals

## 1.1 Definicions i teoremes

**Definició 1** *El conjunt de $m$ equacions lineals amb $n$ incògnites representat per*

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

*en què $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$ i $x_j$ són les incògnites, rep el nom de sistema d'equacions lineals $m \times n$. També el representem per:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ 1 \leq i \leq m \tag{2}$$

**Definició 2** *Una solució del sistema és una col·lecció ordenada de nombres reals $s_1, s_2, \ldots, s_n$ que, substituïda en els llocs de les incògnites, satisfà totes les equacions. La solució també s'escriu $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.*

**Definició 3** *Els sistemes que no tenen solució se'ls anomena incompatibles, i els que en tenen compatibles. Quan la solució és única se'ls anomena determinats, i quan no ho és indeterminats. D'una manera esquemàtica escrivim:*

$$\text{Sistemes} \left\{\begin{array}{l} \text{Incompatibles} \\ \text{Compatibles} \left\{\begin{array}{l} \text{Determinats} \\ \text{Indeterminats} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

**Definició 4** *Anomenem homogeni un sistema en què $b_i = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$.*

Els sistemes homogenis sempre són compatibles, perquè tenen la solució trivial $(0, 0, \ldots, 0)$.

**Definició 5** *Un sistema $m \times n$ és triangular si:*

- *$m \leq n$.*
- *Tots els coeficients $a_{kk}$, els quals constitueixen la diagonal principal del sistema, són diferents de zero.*
- *Els $a_{pk}$ amb $p > k$ són iguals a zero.*

És de fàcil comprovació que aquests sistemes sempre són compatibles, essent determinats si el nombre $n$ d'incògnites és igual al nombre $m$ d'equacions, i indeterminat si $n > m$.

**Exemple 1**
*Comprovació de la compatibilitat dels sistemes triangulars*

$$\begin{aligned} x + 3y - z &= 0 \\ 2y + 3z &= 1 \\ 2z &= 3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x - 2y + z + t &= 2 \\ 3y - 2z - 4t &= 2 \\ 4z + t &= 1 \end{aligned}$$

En el primer sistema obtenim la solució única

$$z = \boxed{\frac{3}{2}}, \quad y = \frac{1}{2}\left(1 - 3\cdot\frac{3}{2}\right) = \boxed{-\frac{7}{4}}, \quad x = 0 - 3\cdot\left(-\frac{7}{4}\right) + \frac{3}{2} = \boxed{\frac{27}{4}}.$$

En el segon, per a cada valor $\lambda \in \mathbb{R}$ que donem a la $t$ obtenim una solució. Per tant n'existiran tantes com nombres reals, és a dir infinites:

$$t = \boxed{\lambda}, \quad z = \frac{1}{4}(1-\lambda) = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4}}, \quad y = \frac{1}{3}\left(2 + 2\left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4}\right) + 4\lambda\right) = \boxed{\frac{5}{6} + \frac{7\lambda}{6}},$$
$$x = 2 + 2\left(\frac{5}{6} + \frac{7\lambda}{6}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4}\right) - \lambda = \boxed{\frac{41}{12} + \frac{19\lambda}{12}}.$$

□

En general, si $n = m$, el sistema triangular

$$\left\{\begin{array}{rcccl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \tag{3}$$

té solució única $\quad x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} = s_n\,, \quad x_k = \dfrac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}s_j\right) = s_k\,,$ on $1 \le k \le n-1$.

Si $n > m$, el sistema triangular

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1m}x_m + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2m}x_m + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \ddots & \vdots \qquad\qquad & & \vdots \\ & & a_{mm}x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{4}$$

té una solució real per a cada col·lecció de $n - m$ valors reals

$$x_{m+1} = \lambda_1,\ x_{m+2} = \lambda_2,\ \ldots,\ x_n = \lambda_{n-m}$$

que donem a les incògnites que no formen part de les columnes de la diagonal principal. Aquestes solucions són en nombre infinit i s'obtenen de la mateixa manera que en el cas anterior. Les incògnites a les quals anem assignant valors arbitraris, independents i reals reben el nom de variables lliures o *paràmetres*, i $n - m$ rep el nom de *grau d'indeterminació del sistema*.

**Definició 6** *Una combinació lineal de les equacions del sistema (2), és una equació del tipus*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i, \quad \text{on } \lambda_i \in \mathbb{R},\ \forall i$$

*la qual resulta de sumar els dos membres de les $m$ equacions multiplicats pels $n$ nombres $\lambda_i$.*

**Exemple 2**
*L'equació $21y + 7z = 0$ és combinació lineal de les equacions del sistema:*

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 2 \\ 5x + 2y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y + 5z &= 3 \end{aligned}$$

Efectivament només cal comprovar que

$$\begin{aligned} 21y + 7z &= (-3) \cdot (2x - 3y + z) + 0 \cdot (5x + 2y - 3z) + 2 \cdot (3x + 6y + 5z) = \\ &= (-3) \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = -6 + 0 + 6 = 0. \end{aligned}$$

□

**Definició 7** *Direm que dos sistemes són equivalents quan tenen les mateixes solucions.*

**Exemple 3**
*Els sistemes* $\left\{ \begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + 2y &= 11 \end{aligned} \right.$ $\left\{ \begin{aligned} x - y &= 2 \\ 3y &= 9, \end{aligned} \right.$ *són equivalents.*

Efectivament, tenen la mateixa solució $x = 5,\ y = 3$. □

En el teorema següent s'estableixen les manipulacions que converteixen un sistema en un sistema equivalent:

**Teorema 1**

*a) Si sotmetem un sistema a un canvi d'ordre en les seves equacions, en resulta un sistema equivalent.*

*b) Un sistema i el que resulta d'afegir-li una equació que sigui combinació lineal de les del sistema són equivalents. En particular, això implica que es pot prescindir de les equacions en què tots els coeficients són zero.*

*c) Un sistema i el sistema resultant de substituir en el primer una equació per una combinació lineal de totes les equacions, on el coeficient de l'equació substituïda és diferent de zero, són equivalents.*

Algunes conseqüències immediates de l'últim apartat d'aquest teorema són que:

– Si substituïm una equació per ella mateixa multiplicada per un valor real $\lambda \neq 0$, en resulta un sistema equivalent.

– Si substituïm una equació per ella mateixa més alguna combinació lineal de les altres, en resulta un sistema equivalent.

**Exemple 4**
*Segons el teorema 1 els següents sistemes són equivalents i, gràcies a la seva forma triangular final, el càlcul de solucions és immediat. (Damunt de cada signe d'equivalència indiquem les substitucions efectuades, on l'equació que ocupa la posició i-èsima ve representada per $F_i$):*

$$\left\{\begin{aligned} x-2y+z&=3\\ 3x-5y+2z&=0\\ 2x+4y-z&=1\end{aligned}\right. \overset{\left[(-3)\cdot F_1+\boxed{1}\cdot F_2+0\cdot F_3\longrightarrow F_2\right]}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} x-2y+z&=\ \ 3\\ y-z&=-9\\ 2x+4y-z&=\ \ 1\end{aligned}\right. \overset{\left[(-2)\cdot F_1+0\cdot F_2+\boxed{1}\cdot F_3\longrightarrow F_3\right]}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} x-2y+z&=\ \ 3\\ y-z&=-9\\ 8y-3z&=-5\end{aligned}\right. \overset{\left[0\cdot F_1+-8\cdot F_2+\boxed{1}\cdot F_3\longrightarrow F_3\right]}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} x-2y+z&=\ \ 3\\ y-z&=-9\\ 5z&=\ 67\end{aligned}\right. \Longleftrightarrow \left\{\boxed{\begin{aligned} x&=-\tfrac{8}{5}\\ y&=\tfrac{22}{5}\\ z&=\tfrac{67}{5}\end{aligned}}\right.$$

Observem que quan fem combinacions lineals entre les equacions del sistema només entren en joc els coeficients $a_{ij}$, $b_i$. O sigui que prescindirem de tota la resta i treballarem amb els coeficients distribuïts segons la següent configuració:

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}}_{(a_{ij})} \begin{matrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{matrix}\right)}_{(a_{ij}|b_i)}$$

**Definició 8** – *A la configuració amb coeficients $a_{ij}$ se l'anomena matriu del sistema i ve representada per $(a_{ij})$ o també $A$.*

– *A la configuració amb coeficients $a_{ij}, b_i$ se l'anomena matriu ampliada del sistema i es representa per $(a_{ij}|b_i)$ o també $A|B$.*

– *Les col·leccions ordenades de tots els coeficients amb el primer subíndex igual reben el nom de files de la matriu.*

– *Les col·leccions ordenades de tots els coeficients amb el segon subíndex igual, i també la col·lecció de coeficients independents, reben el nom de columnes de la matriu.*

A partir d'ara quan parlem de les files del sistema voldrà dir que parlem de les equacions del sistema, i quan parlem de les columnes ens referirem als coeficients d'una incògnita determinada o bé als termes independents.

## 1.2 Mètode de resolució de Gauss-pivot

El teorema 1 ens permet establir un altre teorema que automatitzarà la resolució de sistemes donant pas al mètode que anomenarem *Gauss-pivot*.

**Teorema 2** *Si en un sistema escollim un coeficient $a_{rt} \neq 0$ —al qual donarem el nom de pivot—, substituïm els $a_{ij}$, amb $i \neq r$, per $a'_{ij} = a_{rt} \cdot a_{ij} - a_{rj} \cdot a_{it}$, i els $b_i$ per $b'_i = a_{rt} \cdot b_i - b_r \cdot a_{it}$, llavors el sistema resultant és equivalent al sistema primitiu.*

$$\begin{array}{c} F_1: \\ | \\ F_r: \\ | \\ F_i: \\ | \\ F_m: \end{array} \left( \left( \begin{array}{ccccccc} a_{11} & \text{—} & a_{1t} & \text{—} & a_{1j} & \text{—} & a_{1n} \\ | & & | & & | & & | \\ a_{r1} & \text{—} & \boxed{\boxed{a_{rt}}} & \text{—} & a_{rj} & \text{—} & a_{rn} \\ | & & | & & | & & | \\ a_{i1} & \text{—} & a_{it} & \text{—} & \boxed{a_{ij}} & \text{—} & a_{in} \\ | & & | & & | & & | \\ a_{m1} & \text{—} & a_{mt} & \text{—} & a_{mj} & \text{—} & a_{mn} \end{array} \right) \begin{array}{c} b_1 \\ | \\ b_r \\ | \\ b_i \\ | \\ b_m \end{array} \right)$$

*Prova.* Només cal observar que fer la substitució indicada és el mateix que:
– Fer la combinació lineal d'equacions $F_s$:

$$a_{rt} \cdot F_i + (-a_{it}) \cdot F_r + \sum_{k \neq i,r} 0 \cdot F_k$$

– Substituir $F_i$ per l'anterior combinació, operació permesa gràcies al teorema 1, en ser $a_{rt} \neq 0$.

□

- **Forma d'utilitzar la proposició (mètode de Gauss-pivot)**
  - Considerarem els elements $a_{rr}$ de la diagonal principal com a pivots en els diferents sistemes d'equacions equivalents que aniran apareixent, començant per $r = 1$.
  - Les equacions $F_i$ substituïdes seran les que tinguin $i > r$, és a dir les que es trobin a continuació de l'equació $F_r$ que conté el pivot.
  - Si algun dels elements que han de fer de pivot és diferent de zero permutarem per una de posterior la seva fila o columna , —en aquest últim cas caldrà recordar aquest canvi perquè també haurà canviat l'ordre de les incògnites—, fins aconseguir un pivot diferent de zero. Quan aquest procés no pugui seguir podrem discutir, i resoldre en el seu cas, el sistema plantejat.

- En un sistema $m \times n$, actuant de la manera explicada i prescindint de les files amb tots els coeficients nuls, sempre s'obté un sistema equivalent on els elements que es troben sota de la diagonal principal són igual a zero, i la última fila ve expressada d'una de les maneres següents:

1. $(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0)\ b'_s\ ),$ amb $b'_s \neq 0$.
2. $(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad a'_{nn})\ b'_n\ ),$ amb $a'_{nn} \neq 0$.
3. $(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad a'_{pp} \quad a'_{pp+1} \quad \cdots \quad a'_{pn})\ b'_p\ ),$ amb $p < n$ i $a'_{pp} \neq 0$.

És immediat que en el cas (1.) el sistema és incompatible. Tant en el cas (2.) com en el (3.) s'obté un sistema triangular, el qual, com ja sabem, té solució. En el cas (2.) té solució única. En el cas (3.) en té un nombre infinit que depenen dels $n - p$ paràmetres reals $x_{p+1} = \lambda_{p+1}, x_{p+2} = \lambda_{p+2} \ldots x_n = \lambda_n$, i el grau d'indeterminació és $n - p$.

**Exemple 5**
*Discussió i resolució del sistema*

$$\begin{aligned} x+y-z+t+s &= 1\\ 2y+3z+4t+3s &= 2\\ x+y-z+6t+s &= 2\\ 3x+3y-3z+8t+3s &= 4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 6 & 1 & 2\\ 3 & 3 & -3 & 8 & 3 & 4 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4 & 3 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Aquest sistema resulta ser compatible indeterminat. Aquí tenim $p = 3$ i $n = 5$ essent els paràmetres, (observem que hem intercanviat les columnes 3a. i 4a.), $z = \lambda \in \mathbb{R}$ i $s = \mu \in \mathbb{R}$, d'on resulta:

$$\begin{aligned} x+y+t &= 1+\lambda-\mu\\ 2y+4t &= 2-3\lambda-3\mu\\ 5t &= 1 \end{aligned}$$

el qual té solució $(x, y, z, t, s) = \left(\frac{1}{5}+\frac{5}{2}\lambda+\frac{1}{2}\mu\ ,\ \frac{3}{5}-\frac{3}{2}\lambda-\frac{3}{2}\mu\ ,\ \lambda\ ,\ \frac{1}{5}\ ,\ \mu\right)$.

És fàcil comprovar que si es trien els paràmetres $t = \lambda$ i $s = \mu$ resulta un sistema que no admet $t = \lambda$ com a paràmetre la qual cosa indica que s'ha d'anar amb molta cura en fer aquesta tria. $\square$

## 1.3 Exercicis

Discuteix i resol els següents sistemes:

a) $\left\{\begin{aligned} x+2y+2t &= 3\\ -z+2t &= 0\\ 2x+4y+3z-2t &= 6\\ x+2y+z &= 3\\ 3x+6y+z+4t &= 9 \end{aligned}\right.$

b) $\left\{\begin{aligned} x+2y+z &= a\\ x+(a+3)y+z &= 2a\\ 2x+(a+5)y+(a-1)z &= 4a \end{aligned}\right.$

c) $\left\{\begin{aligned} -ax+(a-1)y+2z &= k\\ x-3y+2z &= -1\\ (a+2)x+(a-4)y+4z &= -2 \end{aligned}\right.$

**Solucions:**

a) $(3-2\lambda-2\mu, \lambda, -3+2\mu, \mu)$

b) Incompatible si $a = -1$ o $a = 3$.
Compatible determinat si $a \neq -1$ i $a \neq 3$,
$\left(\frac{a(a^2-5a+2)}{(a+1)(a-3)}, \frac{a}{a+1}, \frac{a}{a-3}\right)$

c) Incompatible si $a = -2$ i $k \neq -1$, o bé $a = -1/2$ i $k \neq -1$.
Compatible determinat si $a \neq -2$ i $a \neq -1/2$,
$\left(-\frac{k+1}{2a+1}, \frac{a(k+1)}{(a+2)(2a+1)}, \frac{2k-a}{2(a+2)}\right)$
Compatible indeterminat si $a = -2$ i $k = -1$, o si $a = -1/2$ i $k = -1$,
$\left(0, \frac{1}{3}+\frac{2\lambda}{3}, \lambda\right)$ o $\left(3\lambda, \lambda, -\frac{1}{2}\right)$

# 2 Matrius i vectors

## 2.1 Definicions

En les operacions realitzades en la discussió i resolució de sistemes lineals hem observat que els únics elements implicats eren els coeficients de les incògnites i els coeficients independents. Això ha propiciat un tractament d'aquests coeficients en una configuració que hem anomenat matriu. En general:

**Definició 9** *Anomenem matriu d'ordre $m \times n$ a la col·lecció $A$ de $m \cdot n$ nombres reals $a_{ij}$, on $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$, ordenats en la forma:*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

*A les col·leccions ordenades $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq m$ se les anomena files o vectors-fila de la matriu. A les col·leccions ordenades $(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq j \leq n$ se les anomena columnes o vectors-columna de la matriu.*

*S'anomena matriu-fila a una matriu amb una sola fila, i matriu columna a una matriu amb una sola columna. A les matrius files i matrius columnes també se les anomena vectors.*

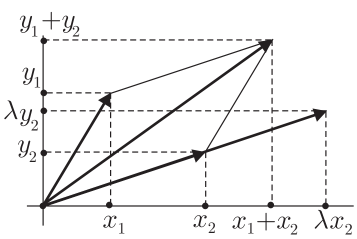
Utilitzem el nom vector perquè tenen la mateixa estructura que els vectors del pla i de l'espai. Aquests es poden representar com a col·leccions ordenades de, respectivament, dos i tres nombres reals. Quant a la seva estructura ve definida per les mateixes operacions que les utilitzades en les combinacions lineals de files per a l'obtenció de sistemes d'equacions equivalents:

**Suma de vectors:**

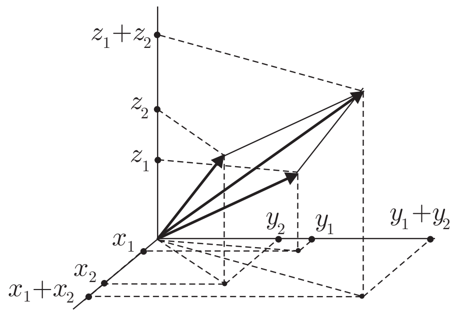
Cas pla: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
Cas espai: $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
Cas general: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$

**Producte de vectors per un escalar:**

Cas pla: $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$
Cas espai: $\lambda \cdot (x, y, z) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, \lambda \cdot z)$
Cas general: $\lambda \cdot (a_1, a_2, \ldots a_n) = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \ldots, \lambda \cdot a_n)$



Pla: Suma i producte



Espai: Suma

Aquestes operacions es poden generalitzar a les matrius $m \times n$ com veurem en la secció 2.5. Ara estudiarem els vectors amb la finalitat d'introduir el concepte de rang d'una matriu. Aquest concepte permetrà caracteritzar els sistemes lineals segons tinguin o no tinguin solució.

## 2.2 Dependència i independència lineal de vectors

Recordem que els vectors són col·leccions ordenades i finites de nombres reals, les quals es poden sumar i multiplicar per escalars. Concretament els representarem amb la notació:

$$\vec{e} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

i anomenem el vector $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, *vector zero* o *nul*.

**Definició 10** *Una combinació lineal dels vectors $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p$, és una expressió del tipus*

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{e}_i = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \ldots + \lambda_p \vec{e}_p,$$

*en què $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$. Un vector $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{e}_i$, direm que és combinació lineal dels vectors $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p$.*

**Exemple 6**
*En la matriu $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \\ 17 & -9 \end{pmatrix}$, el vector fila $\vec{e}_3 = (17, -9)$ és combinació lineal dels vectors-fila $\vec{e}_1 = (3, 4)$ i $\vec{e}_2 = (-1, 5)$.*

Efectivament, $(17, -9) = \lambda_1(3, 4) + \lambda_2(-1, 5) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\lambda_1 - \lambda_2 = 17 \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 = -9 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 3\lambda_1 - \lambda_2 = 17 \\ 19\lambda_2 = -95. \end{array} \right.$

Per tant, $\lambda_2 = -5$ i $\lambda_1 = \dfrac{17-5}{3} = 4$. És a dir, $\boxed{(17, -9) = 4 \cdot (3, 4) - 5 \cdot (-1, 5)}$. □

**Definició 11** *Un sistema o conjunt de vectors és linealment dependent o lligat si algun d'ells és combinació lineal dels altres.*

**Definició 12** *Un sistema o conjunt de vectors és linealment independent o lliure si cap d'ells és combinació lineal dels altres.*

Segons aquestes definicions, en l'exemple 6 hem trobat tres vectors linealment dependents. A continuació proposarem un altre criteri per establir la dependència o independència lineal d'un sistema de vectors. Observem que si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ són linealment dependents, un dels vectors $\vec{v}_j$ es pot escriure

$$\vec{v}_j = \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_{j-1} \vec{v}_{j-1} + \lambda_{j+1} \vec{v}_{j+1} + \ldots + \lambda_p \vec{v}_p.$$

Això és el mateix que $\lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_{j-1} \vec{v}_{j-1} + (-1)\vec{v}_j + \lambda_{j+1} \vec{v}_{j+1} + \ldots + \lambda_p \vec{v}_p = 0$. És a dir, que existeix una combinació lineal nul·la dels $\vec{v}_i$ amb algun coeficient diferent de zero. Partint d'aquesta observació es poden demostrar els següents teoremes:

**Teorema 3** *$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p$ linealment dependents $\Longleftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, amb algun $\lambda_i \neq 0$, tals que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0}$.*

**Teorema 4** *$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p$ linealment independents $\Longleftrightarrow \left( \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_i = 0,\ \forall i \right)$.*

**Exemple 7**
*En la matriu $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$, els vectors-fila $\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_1 = (a_1, b_1, c_1) \\ \vec{e}_2 = (0, b_2, c_2) \\ \vec{e}_3 = (0, 0, c_3,) \end{array} \right.$ són linealment independents si es compleix que $a_1, b_2, c_3 \neq 0$,.*

Efectivament, $\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 = \vec{0} \Longrightarrow (\lambda_1 a_1, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2, \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3) = (0, 0, 0) \Longrightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 a_1 = 0 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = 0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{0}{a_1} = 0 \\ \lambda_2 = \dfrac{-\lambda_1 b_1}{b_2} = \dfrac{0}{b_2} = 0 \\ \lambda_3 = \dfrac{-\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2}{c_3} = \dfrac{0}{c_3} = 0 \end{array} \qquad \text{perquè } a_1, b_2, c_3 \neq 0.$$

□

**Teorema 5** *Si un conjunt o sistema de vectors és linealment independent, qualsevol subconjunt d'aquest també ho és.*

**Teorema 6** *Si un conjunt o sistema de vectors és linealment dependent qualsevol conjunt que el contingui també ho és.*

## 2.3 Rang d'una matriu

**Definició 13** *Donada una matriu $A$ d'ordre $m \times n$, definim:*
*– El rang per files $r_f(A)$ com el màxim nombre de files linealment independents de $A$.*[1]
*– El rang per columnes $r_c(A)$ com el màxim nombre de columnes linealment independents.*

**Teorema 7 (Transformacions que deixen invariant el rang d'una matriu)**
*Els rang per files/columnes no canvia quan:*

*a) Es canvia l'ordre de les files/columnes.*

*b) Es multiplica una fila/columna per un escalar diferent de zero.*

*c) Es substitueix una fila/columna per una combinació lineal de les files/columnes amb el coeficient de la fila substituïda diferent de zero.*

*d) S'afegeix o s'elimina una fila/columna que és combinació lineal de les altres.*

[1] Recordem que identifiquem les files i columnes de la matriu amb vectors, respectivament, de $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$.

A continuació donarem una definició i un criteri per determinar el rang d'una matriu un cop aplicades, de manera adequada, les transformacions que el deixen invariant. Aquest criteri és una generalització de la situació exposada en l'exemple 7.

**Definició 14** *Direm que una matriu és esglaonada si es compleix:*
*– En cada fila existeix algun coeficient diferent de 0.*[2]
*– Per a cada fila, llevat de la primera, es compleix que el primer coeficient diferent de zero ocupa un lloc més avançat que en la fila anterior.*

*Direm que una matriu esglaonada és triangular si els coeficients $a_{ii}$ de la diagonal principal són diferents de zero.*[3]

**Exemple 8**
*La matriu $A$ és esglaonada i no triangular, la matriu $B$ és triangular i la matriu $C$ no és esglaonada.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Teorema 8** *Els vectors-fila d'una matriu esglaonada són linealment independents i, per tant, el rang per files d'una matriu esglaonada és igual al seu nombre de files.*

**Exemple 9**
*En l'exemple 8, $r_f(A) = 3$, $r_f(B) = 3$ i $r_f(C) \geq 2$. Per determinar aquest últim rang podem actuar amb el mètode del pivot explicat en la resolució de sistemes d'equacions.*

Efectivament, pel teorema 8, $r_f(A) = r_f(B) = 3$. Quant a $r_f(C)$, pels teoremes 7 i 8 ,

$$r_f(C) = r_f \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = r_f \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 3.$$

□

Una qüestió important es la d'esbrinar relacions entre $r_f$ i $r_c$. El teorema següent, de demostració complexa, ens proporciona la resposta.

**Teorema 9** *En qualsevol matriu $A$ es compleix $r_f(A) = r_c(A)$.*

**Definició 15** *Anomenem rang $r(A)$ d'una matriu $A$, el seu rang per files o columnes indistintament.*

L'últim teorema ha mostrat que el rang és independent del fet de considerar la matriu composta de files o de columnes. Entre d'altres qüestions, això planteja la possibilitat de treballar en el càlcul del rang, amb la matriu donada o amb la que resulta de convertir les files en columnes i les columnes en files.

[2] En alguns textos no s'imposa aquesta condició.
[3] En alguns textos es restringeix el domini de les matrius triangulars a les matrius $n \times n$ o quadrades. En d'altres no s'imposa la restricció de que els termes de la diagonal siguin diferents de zero.

**Exemple 10**
*Càlcul del rang de la matriu* $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

$$r\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} = 2$$

□

**Definició 16** *Anomenem matriu transposada d'una matriu $A$, la matriu $A^t$ que resulta en canviar, en la matriu $A$, les files per columnes i les columnes per files, conservant-ne l'ordre.*

**Exemple 11**
*La transposada de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *és* $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *i* $r(A) = r(A^t) = 3$.

□

## 2.4 Aplicació als sistemes lineals. Teorema de Rouché-Frobenius

Recordem que quan es proposa de resoldre un sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \quad \text{en què } a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

el que es pretén es trobar $n$ nombres reals que satisfaguin les $m$ condicions anteriors. Aquest problema es pot traduir a llenguatge vectorial anomenant

$$\vec{A}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m\,, \text{ per } 1 \le j \le n \quad \text{i} \quad \vec{B} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Així, la qüestió consisteix en trobar

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \quad \text{tals que} \quad x_1\vec{A}_1 + x_2\vec{A}_2 + \ldots + x_n\vec{A}_n = \vec{B}.$$

És a dir, en trobar una combinació lineal de les columnes $\vec{A}_j$ de la matriu $A$ del sistema que sigui igual a la columna $\vec{B}$ de la matriu ampliada $A|B$.

### 2.4.1 Condició necessària i suficient per a l'existència de solucions

Utilitzant aquest nou llenguatge trobarem una condició necessària i suficient per a l'existència de solucions, i estudiarem en el cas de compatibilitat el nombre de solucions.

Suposem que el sistema té solució. Llavors $\vec{B}$ és combinació lineal dels vectors-columna $\vec{A}_j$. Per tant, pel teorema 7, en afegir la columna $B$ a la matriu $A$, el rang no varia i $\boxed{r(A) = r(A|B)}$. Hem trobat una condició necessària per tal que el sistema tingui solució.

Esbrinem si aquesta condició és suficient. Suposem, doncs, que $r(A) = r(A|B) = r$. Siguin $\vec{A}_{j_1}, \vec{A}_{j_2}, \ldots, \vec{A}_{j_r}$ les columnes independents. Veurem que $\vec{B}$ és combinació lineal d'aquestes i, per tant, el sistema tindrà solució.

Actuem per reducció a l'absurd. Si $\vec{B}$ no fos combinació lineal d'aquestes columnes, llavors $\lambda_0\vec{B} + \lambda_1\vec{A}_{j_1} + \lambda_2\vec{A}_{j_2} + \cdots + \lambda_r\vec{A}_{j_r} = \vec{0} \Longrightarrow \boxed{\lambda_0 = 0} \Longrightarrow \lambda_1\vec{A}_{j_1} + \lambda_2\vec{A}_{j_2} + \cdots + \lambda_r\vec{A}_{j_r} = \vec{0} \Longrightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0} \Longrightarrow \vec{B}, \vec{A}_{j_1}, \vec{A}_{j_2}, \ldots, \vec{A}_{j_r}$ són linealment independents $\Longrightarrow r(A|B) = r + 1 > r = r(A|B)$.

Aquesta última desigualtat estableix una contradicció amb la hipòtesi de treball que era la igualtat dels rangs. Conseqüentment hem establert el teorema següent:

**Teorema 10 (Teorema de Rouché-Frobenius)**

$$\textit{El sistema } (5) \textit{ és compatible} \quad \Longleftrightarrow \quad r(a_{ij}) = r(a_{ij}|b_i)\,.$$

### 2.4.2 Nombre de solucions

Si anomenem $r = r(a_{ij}) = r(a_{ij}|b_i)$, sabem que $r \le n$. Es presenten dues possibilitats:

$\mathbf{r = n}$ $\Longrightarrow$ El sistema és equivalent a un sistema triangular amb igual nombre de files i columnes en la matriu $A$. Per tant té solució única.[4]

$\mathbf{r < n}$ $\Longrightarrow$ Existeixen $r$ columnes $\vec{A}_{j_1}, \ldots, \vec{A}_{j_r}$, linealment independents. Podem situar-les en els $r$ primers llocs i el sistema és equivalent a un sistema triangular amb menys files que columnes. Llavors, per a cada col·lecció de $n-r$ valors reals arbitraris donats a les $n-r$ incògnites corresponents a les últimes $n-r$ columnes de $A$, obtindrem un sistema amb les $r$ incògnites $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ que tindrà solució única. Conseqüentment, en poder assignar un nombre infinit de col·leccions de nombres arbitraris a les últimes $n-r$ incògnites, el sistema tindrà un nombre infinit de solucions dependents de $n-r$ paràmetres.

**Exemple 12**
*Discussió del sistema*
$$\left\{\begin{aligned} x + 2y + z + t &= 0 \\ 2x - y - 3z + 2t &= 2 \\ x - 3y - 4z + t &= 2 \\ 4x - 7y - 11z + 4t &= 6\,. \end{aligned}\right.$$

Aplicant el mètode de Gauss-pivot és fàcil comprovar que aquest sistema és equivalent al que té per matrius:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

on tenim $r(a_{ij}) = 2 = r(a_{ij}|b_i)$, la qual cosa significa que el sistema és compatible. Com que $r = 2 \le 4 = n$ el sistema és indeterminat i el nombre de solucions dependrà de $4 - 2 = 2$ paràmetres. Agafarem com a paràmetres les incògnites que quedin després d'excloure dues columnes independents. En aquest cas, la única parella d'incògnites que no podríem considerar com a paràmetres seria la parella $y, z$ perquè les columnes primera i quarta són linealment dependents. En total podríem considerar cinc eleccions diferents de paràmetres. □

[4]Per a la discussió dels sistemes triangulars vegeu la secció 1.1, pàgina 2.

## 2.5 Matrius. Estructura

De la mateixa manera que hem definit la suma i el producte per un escalar de vectors o matrius-fila/columna, es poden definir aquestes operacions per a matrius $m \times n$:

**Suma de matrius:**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

**Producte de matrius per un escalar:**

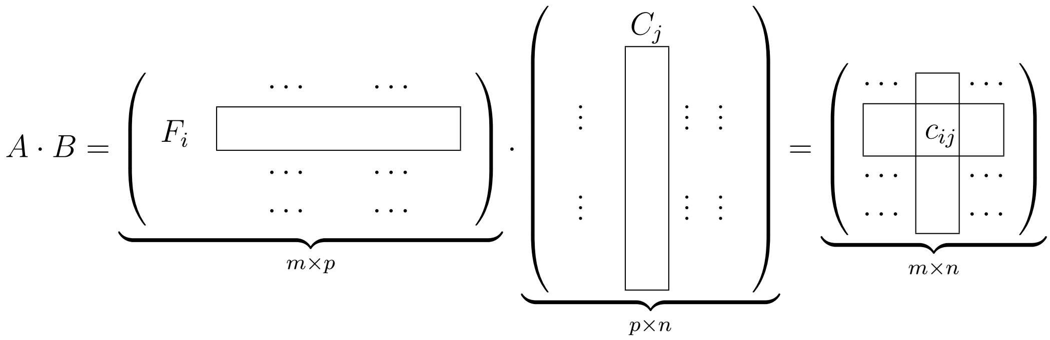
$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \cdots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Aquestes operacions proporcionen a les matrius $m \times n$, una estructura igual a la dels vectors.

**Producte de matrius:** També es defineix un producte d'una matriu $A = (a_{ij})$, d'ordre $m \times p$, per una altra $B = (b_{ij})$, d'ordre $p \times n$, com una altra matriu $C$ de coeficients

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \,.$$

Observem que per poder multiplicar les dues matrius el nombre $p$ de columnes de la primera ha de ser igual al nombre $p$ de files de la segona, i la matriu resultant té $m$ files, com la primera, i $n$ columnes com la segona. En l'esquema adjunt es mostra el lloc de $c_{ij}$ que resulta de multiplicar la fila $F_i$ de la matriu $A$ per la columna $C_j$ de la matriu $B$:




Es pot comprovar que aquest producte té la propietat distributiva respecte de la suma, la propietat associativa, però no té la commutativa.

**Exemple 13**

*Càlcul de* $3A + B$ *i* $A \cdot C$, *en què*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

$$3A+B=\begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 1+0 & 3\cdot 2+3 \\ 3\cdot 3-1 & 3\cdot 1+2 \\ 3\cdot 4+5 & 3\cdot 0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 8 & 5 \\ 17 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot(-1)+2\cdot 2 \\ 3\cdot 1+1\cdot 0 & 3\cdot(-1)+1\cdot 2 \\ 4\cdot 1+0\cdot 0 & 4\cdot(-1)+0\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

□

En el cas del producte de matrius d'ordre $n\times n$, anomenades *matrius quadrades d'ordre* $n$, el producte té element neutre i aquest és la *matriu identitat*

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en què} \quad a_{ii}=1 \ \text{ i } a_{ij}=0 \ \text{ si } \ i\neq j,$$

que compleix $A\cdot I_n=I_n\cdot A=A$.

A partir de l'existència d'aquest element $I_n$ és natural preguntar-nos per l'existència d'element invers, és a dir per l'existència de matrius invertibles. La resposta a aquesta pregunta és que no totes les matrius són invertibles.

**Definició 17** *Una matriu quadrada $A$ és invertible ssi existeix una matriu quadrada $X$ tal que $A\cdot X=X\cdot A=I_n$. A la matriu $X$ se l'anomena la inversa d'$A$ i es representa $X=A^{-1}$.*

De fet, per establir que una matriu A és invertible només cal comprovar que existeix $X$ tal que $A\cdot X=I_n$. Veurem sobre un exemple la manera d'actuar en la recerca de la inversa d'una matriu.

**Exemple 14**
*Recerca de la inversa de la matriu* $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Hem de resoldre els tres sistemes d'equacions resultants de plantejar

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aquests tres sistemes es poden resoldre d'una manera simultània, aplicant el mètode de Gauss-pivot a la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \tag{6}$$

i fent zeros, no tant sols per sota de la diagonal principal, sinó també per sobre. Així els tres sistemes (6) són equivalents als sistemes

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & -3 & -12 & 9 \\ 0 & 9 & 0 & 6 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & -4/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 1 \end{array}\right),$$

d'on resulta immediatament que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & -4/3 & 1 \\ 2/3 & 2/3 & -1 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$. □

En general, es pot demostrar el teorema següent sobre l'existència d'inverses:

**Teorema 11** *La matriu $A$ d'ordre $n \times n$ és invertible si i només si $r(A) = n$.*

**Presentació d'un sistema d'equacions mitjançant un producte de matrius:** Observem que el sistema d'equacions $m \times n$ de la pàgina 1 es pot presentar utilitzant el producte de matrius,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{o bé} \quad A \cdot X = B.$$

A més, en el cas en què el sistema és $n \times n$ amb $r(A) = r(A|B) = n$, la solució única es pot obtenir multiplicant per la matriu $A^{-1}$ a l'esquerra. És a dir,

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Longrightarrow I_n \cdot X = A^{-1} \cdot B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

D'aquesta manera s'obté,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

**Exemple 15**
*Resolució del sistema* $\left\{\begin{array}{ll} x + 3y + 2z & = 1 \\ -x + z & = 2 \\ y + 2z & = 3 \end{array}\right.$

És de fàcil comprovació que el seu rang és 3. Llavors,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} -1/3 & -4/3 & 1 \\ 2/3 & 2/3 & -1 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solució és $x = 0,\ y = -1,\ z = 2$.
$(*)$ La matriu inversa ha sigut calculada a l'exemple 14. □

# 3 Determinants

## 3.1 Exercicis d'introducció

**Exercici 1**
*Siguin els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ linealment independents, $\vec{x} = a_{11}\vec{u} + a_{21}\vec{v}$ i $\vec{y} = a_{12}\vec{u} + a_{22}\vec{v}$. Quines condicions han de complir els $a_{ij}$ per tal que $\vec{x}$ i $\vec{y}$ siguin linealment independents?*

**Exercici 2**
*Siguin els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ linealment independents, $\vec{x} = a_{11}\vec{u} + a_{21}\vec{v} + a_{31}\vec{w}$, $\vec{y} = a_{12}\vec{u} + a_{22}\vec{v} + a_{32}\vec{w}$ i $\vec{z} = a_{13}\vec{u} + a_{23}\vec{v} + a_{33}\vec{w}$. Quines condicions han de complir els $a_{ij}$ per tal que $\vec{x}$, $\vec{y}$ i $\vec{z}$ siguin linealment independents?*

## Resolució de l'Exercici 1

La condició d'independència és: $\vec{x}, \vec{y}$ l.i. $\iff (\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0)$.
Perquè sigui així és necessari i suficient que el sistema en les incògnites $\lambda_1, \lambda_2$,

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 &= 0\,, \end{aligned}$$

sigui compatible determinat. Això ens porta a la discussió:

- $\boxed{a_{11} \neq 0}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \end{array}\right)$$

el qual és compatible determinat si i només si

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0\,. \tag{7}$$

- $\boxed{a_{11} = 0}$

Perquè sigui compatible determinat és necessari i suficient que $a_{21} \neq 0$ i $a_{12} \neq 0$, la qual cosa equival a

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0\,. \tag{8}$$

## Resolució de l'Exercici 2

La condició és: $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ l.i. $\iff (\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} + \lambda_3\vec{z} = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0)$.
Perquè sigui així és necessari i suficient que el sistema en les incògnites $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3 &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{23}\lambda_3 &= 0 \\ a_{31}\lambda_1 + a_{32}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3 &= 0\,, \end{aligned}$$

sigui compatible determinat i, en aquest cas la discussió és:

- $\boxed{a_{11} \neq 0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} & 0 \end{array}\right)$$

I si $\boxed{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0}$ aquest equival a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21} & 0 \\ 0 & 0 & (*) & 0 \end{array}\right)$$

en el qual l'expressió $(*)$ és:

$$\begin{aligned} (*) \;\; = \;\; & a_{11}\left(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\right)+ \\ & +\cancel{a_{12}a_{13}a_{21}a_{31}}-\cancel{a_{12}a_{13}a_{21}a_{31}}=a_{11}\cdot\Delta\,. \end{aligned}$$

Perquè sigui compatible determinat és condició necessària i suficient que

$$\Delta\neq 0\,. \tag{9}$$

Si $\boxed{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0}$, i exigim que el sistema sigui compatible determinat haurà de ser:

$$a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}\neq 0 \quad \text{i} \quad a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}\neq 0\,,$$

i aquesta condició equival a

$$\Delta\neq 0\,. \tag{10}$$

Efectivament, si no fos així, tindríem

$$\begin{aligned} \Delta \;\; & = \;\; a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})-a_{23}(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})+a_{33}(\cancel{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}})= \\ & = \;\; a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})-a_{23}(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}) \;=\; 0\,, \end{aligned}$$

la qual cosa significaria que $\dfrac{a_{11}}{a_{21}}\neq\dfrac{a_{13}}{a_{23}}=\dfrac{a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}}{a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}}$, i per tant $\cancel{a_{11}a_{21}a_{32}}-a_{11}a_{22}a_{31}\neq \cancel{a_{21}a_{11}a_{32}}-a_{21}a_{12}a_{31}$, d'on se seguiria que $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$ contra la hipòtesi.

- $\boxed{a_{11}=0}$

En aquest cas $a_{21}\neq 0$ o $a_{31}\neq 0$. Llavors si canviem l'ordre de les files del sistema i actuem igual que abans, arribem a la mateixa conclusió, $\Delta\neq 0$. □

Observem que les expressions (7), (8), (9) i (10), que determinen la independència lineal dels vectors dels exercicis anteriors, es construeixen a partir de la consideració de totes les *permutacions* possibles dels subíndexs que ocupen la segona posició —dues en el primer cas, i sis en el segon—. Aquestes expressions tenen una gran rellevància en la teoria i les aplicacions de l'Àlgebra i reben el nom de *determinant*. Per tal de donar-ne una definició clara farem una introducció a la teoria de les permutacions.

## 3.2 Permutacions

**Definició 18** *Donat el conjunt $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, cadascuna de les possibles ordenacions dels seus elements s'anomena permutació de n elements. Si utilitzem el llenguatge d'aplicacions entre conjunts, es diu que una permutació de n elements és una aplicació bijectiva*

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \{1, 2, \ldots, n\} & \longrightarrow & \{1, 2, \ldots, n\} \\ n & \longmapsto & \sigma(n) \end{array}$$

*la qual es representa per* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. *El conjunt de permutacions d'A es representa per $S_n$ i té estructura de grup amb l'operació de composició de funcions.*[5]

Per exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ és la permutació $\sigma \in S_3$ d'$A = \{1, 2, 3\}$ tal que $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$ i $\sigma(3) = 3$.

**Definició 19** *Si fixem un ordre entre els elements d'A, a la permutació que conserva aquest ordre l'anomenen permutació principal. Si no es diu el contrari es considera* $(1\ 2\ \ldots\ m)$ *com la permutació principal.*

**Definició 20** *Una permutació $\sigma$ presenta una inversió en les posicions $i,\ j,\ (i < j)$ si $\sigma(i) > \sigma(j)$. També es podria dir, si no conserva l'ordre de la permutació principal en els llocs $i,\ j$.*

Per exemple la permutació $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$, presenta les inversions 4 3, 4 2 i 3 2.

**Definició 21** *Direm que una permutació és de classe parell si presenta un nombre parell d'inversions, i que és de classe senar si en presenta un nombre senar.*

**Definició 22** *Definim el signe $\varepsilon(\sigma)$ d'una permutació $\sigma$, com*

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & ,si \quad \sigma \text{ és parell} \\ -1 & ,si \quad \sigma \text{ és senar} \end{cases}$$

**Teorema 12** *Dues permutacions $\sigma$ i $\tau$ tals que existeixen $p, q \in \{1, 2, \ldots, n\}$, amb $\tau(p) = \sigma(q)$ i $\tau(q) = \sigma(p)$, i $\forall j \neq p, q$ és $\tau(j) = \sigma(j)$, són de classes diferents. (Si tenen dos elements i només dos intercanviats són de classes diferents.)*

*Prova.* Estudiem el nombre d'inversions que fan falta per passar d'una permutació a l'altra. Considerarem dos casos:

a) Suposem que $p$ i $q$ són consecutius, $(p = p + 1)$. Llavors només farà variar el nombre total d'inversions el fet que $\sigma(p)$ i $\sigma(p + 1)$ estiguin en inversió o no. Efectivament,

   – $\sigma(p)$ i $\sigma(p + 1)$ no presenten inversió $\Longrightarrow \tau(p) = \sigma(p + 1)$ i $\tau(p + 1) = \sigma(p)$ presenten inversió.

[5] Això vol dir que la composició de dues permutacions és una altra permutació, i que aquesta composició té la propietat associativa, té un element neutre (la permutació que transforma cada element en ell mateix), i que cada permutació es pot compondre amb una altra tal que el resultat és l'element neutre.

– $\sigma(p)$ i $\sigma(p+1)$ presenten inversió $\Longrightarrow \tau(p) = \sigma(p+1)$ i $\tau(p+1) = \sigma(p)$ no presenten inversió.

O sigui que $\sigma$ i $\tau$ es diferencien en una inversió i són de classes diferents

b) Si $p$ i $q$ no són consecutius

$$\begin{array}{ccc} \sigma & : & \sigma(1)\ldots\sigma(p)\ldots\sigma(q)\ldots\sigma(n) \\ \tau & : & \sigma(1)\ldots\sigma(q)\ldots\sigma(p)\ldots\sigma(n) \end{array}$$

Per posar $\sigma(p)$ en el lloc de $\sigma(q)$, haurem de fer $q-p$ intercanvis consecutius amb elements adjacents, és a dir $q-p$ canvis de classe.

Per posar $\sigma(q)$ en el lloc que ocupava $\sigma(p)$ —entre $\sigma(p-1)$ i $\sigma(p+1)$—, haurem de fer $q-p-1$ canvis de classe.

En total haurem de fer $(q-p)+(q-p-1) = 2(q-p)-1$ canvis de classe. Això vol dir que $\sigma$ i $\tau$ es diferencien en un nombre senar d'inversions i, per tant, són de classes diferents. □

**Teorema 13** *Si $n \geq 2$, hi ha tantes permutacions parells com senars.*

*Prova.* En total hi ha un nombre $n!$ de permutacions que podem agrupar de dues en dues, de manera que les agrupades tinguin només dos llocs intercanviats. Com que cadascuna de les permutacions d'aquestes parelles pertany a una classe diferent, hi haurà $n!/2$ permutacions parells i $n!/2$ permutacions senars. □

## 3.3 Propietats dels determinants

Amb l'ajut del llenguatge de les permutacions definirem els determinats i enunciarem les seves propietats sense demostrar-les.

**Definició 23** *Anomenem determinant d'una matriu quadrada $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ a l'expressió*

$$\det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}\,,$$

*en què $n$ rep el nom d'ordre del determinant.*

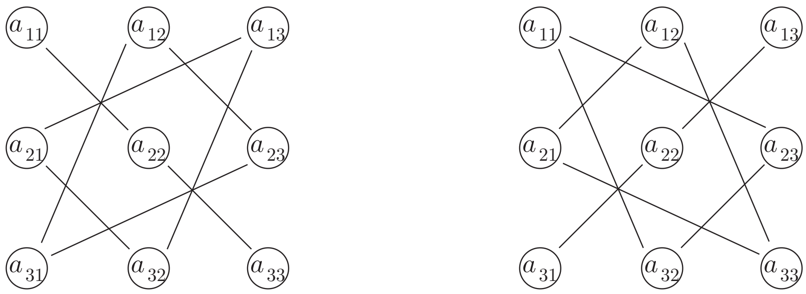
Notem que el teorema 13 ens permet afirmar que hi haurà tants sumands amb signe positiu com negatiu; i que el determinant és la suma de tots els productes que resulten d'agafar com factors un sol element de cada fila i de cada columna, afectats del signe de la permutació determinada pels subíndexs corresponents a les columnes de la matriu.

**Exemple 16**
*Determinació del signe del producte $a_{12}a_{25}a_{31}a_{44}a_{53}$ en un determinant d'ordre 5.*

La permutació $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ presenta les inversions 2 1, 5 1, 5 4, 5 3, 4 3. En total fan un nombre de 5, i per tant és senar, és a dir que el signe del producte és el $(-)$. □

## 3.4 Regla de Sarrus

Per calcular determinants d'ordre 3, la definició de determinant origina la regla basada en l'esquema següent, en què cada circuit representa un sumand format pel producte dels tres coeficients que conecta. Els productes de la figura de l'esquerra vindran afectats pel signe positiu i els de la dreta pel signe negatiu.




**Teorema 14 (Propietats dels determinants)** *Si representem les columnes del determinant per $\vec{C}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$, $1 \leq j \leq n$, llavors es compleix:*

*a)* $\det\left(\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_j + \vec{C}'_j, \ldots, \vec{C}_n\right) = \det\left(\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_j, \ldots, \vec{C}_n\right) + \det\left(\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}'_j, \ldots, \vec{C}_n\right).$

*b)* $\lambda \cdot \det\left(\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_j, \ldots, \vec{C}_n\right) = \det\left(\vec{C}_1, \ldots, \lambda \cdot \vec{C}_j, \ldots, \vec{C}_n\right), \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$

*c)* $\det\left(\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_p, \ldots, \vec{C}_q, \ldots, \vec{C}_n\right) = -\det\left(\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_q, \ldots, \vec{C}_p, \ldots, \vec{C}_n\right).$

*d)* $\det\left(\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_p, \ldots, \vec{C}_p, \ldots, \vec{C}_n\right) = 0.$

*e)* $\lambda_j \neq 0 \Longrightarrow \det\left(\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_j, \ldots, \vec{C}_n\right) = \dfrac{1}{\lambda_j} \cdot \det\left(\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_{j-1}, \sum_{p=1}^{n} \lambda_p \vec{C}_p, \vec{C}_{j+1}, \ldots, \vec{C}_n\right).$

*f) Sigui $A^{\perp}$ la matriu que resulta de canviar les files d'A per columnes, a la qual anomenem transposada d'A, llavors*

$$\det(A^{\perp}) = \det(A)\,.$$

*g) Tot el que hem dit per a les columnes serveix per a les files.*

*h)* $\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_n$ *són l.i. a* $\mathbb{R}^n \Longleftrightarrow r\left(\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_n\right) = n \Longleftrightarrow \det\left(\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_n\right) \neq 0.$

*i) Es tracta d'expressar un determinant d'ordre $n$ a partir de determinants d'ordre $n-1$. Per fer-ho cal que introduïm un parell de definicions:*

**Definició 24** *Anomenem menor complementari d'$a_{ij}$ el determinant*

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \widehat{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \widehat{a_{i1}} & \cdots & \widehat{a_{ij}} & \cdots & \widehat{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \widehat{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

*és a dir el determinant que resulta en eliminar la columna j-èsima i la fila i-èsima. Anomenem adjunt d'$a_{ij}$ a $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.*

*Aquestes definicions ens permeten expressar de manera simplificada la propietat següent, que també es podria prendre com una definició recurrent de determinant, alternativa a la que hem proposat a l'inici de la secció —només cal definir $|a_{11}| = a_{11}$—:*

$$\det(a_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kp} A_{kp} = \sum_{k=1}^{n} a_{pk} A_{pk}\,.$$

*És a dir que per calcular un determinant fem la tria d'una columna o fila —p-èsima— multipliquem cadascun dels seus elements pel seu adjunt i sumem tots els productes que en resulten. Segons actuem d'una manera o de l'altra diem que estem desenvolupant el determinant per la columna p o la fila p.*

## 3.5 Aplicació a la resolució de sistemes

### 3.5.1 Sistemes amb solució única (Regla de Cramer)

Suposem que tenim el sistema $(a_{ij})\,(x_j) = (b_i)$, $1 \leq i, j \leq n$, compatible determinat. Això equival a $r(a_{ij}) = n$ i també a que $\det(a_{ij}) \neq 0$. I si $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ és la solució, podem escriure —amb la notació de la secció 2.4—:

$$s_1\vec{A}_1 + s_2\vec{A}_2 + \cdots + s_n\vec{A}_n = \vec{B}\,.$$

Conseqüentment, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, per les propietats dels determinants

$$\begin{aligned}\det\left(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_{j-1}, \vec{B}, \vec{A}_{j+1}, \ldots, \vec{A}_n\right) &= \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot \det\left(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_{j-1}, \vec{A}_i, \vec{A}_{j+1}, \ldots, \vec{A}_n\right) = \\ &= s_j \cdot \left(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_j, \ldots, \vec{A}_n\right) = s_j \cdot \det\left(a_{ij}\right)\,,\end{aligned}$$

en què podem aïllar $s_j$ i obtenim la *regla de Cramer*:

$$s_j = \frac{\det\left(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_{j-1}, \vec{B}, \vec{A}_{j+1}, \ldots, \vec{A}_n\right)}{\det\left(a_{ij}\right)}\,, \quad 1 \leq j \leq n\,.$$

**Exemple 17**
*Resolució del sistema* $\left\{\begin{aligned} 3x - y + z &= 0 \\ x + y + z &= 1 \\ 2x - y - z &= 2 \end{aligned}\right.$

Observem que el sistema és compatible determinat. Efectivament,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Longrightarrow r(A) = r(A|B) = 3 \Longrightarrow \text{solució única. Per tant:}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 1\,, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{3}{2}\,, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = -\frac{3}{2}$$

$\square$

### 3.5.2 Sistemes indeterminats

Sigui $r = r(A) < n =$ nombre d'incògnites i $m =$ nombre d'equacions. Un cop eliminades les $m - r$ equacions dependents, i convertides en paràmetres les $n - r$ incògnites corresponents a les columnes dependents tenim

$$\left.\begin{array}{l} x_{r+1} = \lambda_1 \\ \quad\vdots \\ x_n \;\;= \lambda_n \end{array}\right\}, \quad \text{en què } \lambda_j \in \mathbb{R} \quad \text{i} \qquad \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - \sum_{j=r+1}^{n} a_{1j}\lambda_j \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - \sum_{j=r+1}^{n} a_{rj}\lambda_j \,. \end{array}$$

Llavors per a cada elecció de les $\lambda_j$, el sistema de la dreta és compatible determinat de rang $r$, i podem aplicar la regla de Cramer per a la seva resolució.

**Exemple 18**
*Resolució del sistema* $\left\{\begin{array}{l} 3x - y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right.$

$r = 2 < 3 =$ nombre d'incògnites. La columna de coeficients de les $z$ depèn de les dues primeres, i per a cada elecció del paràmetre $z = \lambda \in \mathbb{R}$ tenim el sistema compatible determinat de rang 2

$$\left\{\begin{array}{l} 3x - y = \;\; -\lambda \\ x + y = 1 - \lambda \end{array}\right. \qquad \text{i si apliquem Cramer:}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{2}\,, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -\lambda \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{4} - \frac{\lambda}{2}\,, \qquad z = \lambda\,.$$

## 3.6 Determinants i rang d'una matriu

Existeix una tècnica que permet trobar ràpidament el rang d'una matriu a partir del càlcul de determinants. La relació entre el rang d'una matriu i el càlcul de determinants la hem trobat d'una manera implícita en els exercicis d'introducció de la teoria de determinants de la secció 3.1. D'altra banda la penúltima propietat de la teoria de determinants presentada en el teorema 14 serà clau per a l'establiment d'aquesta relació. El resultat fonamental d'aquesta secció és el teorema 17, el qual ens proporcionarà la tècnica anunciada.

**Definició 25** *Donada una matriu $A$ d'ordre $m \times n$, triem $k$ columnes i $k$ files d'$A$. El determinant de la matriu que té per coeficients, els coeficients d'$A$ que alhora pertanyen a cadascuna de les files i columnes escollides, rep el nom de menor d'ordre $k$ de la matriu $A$.*

**Teorema 15** $\vec{C}_{j_1}, \vec{C}_{j_2}, \ldots, \vec{C}_{j_k}$ *són columnes independents de la matriu* $(c_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \iff$ *Existeix un menor d'ordre $k$, diferent de zero, en les columnes $\vec{C}_{j_1}, \vec{C}_{j_2}, \ldots, \vec{C}_{j_k}$ de la matriu.*

*Prova.*

$\Longrightarrow$) $\begin{pmatrix} c_{1j_1} & \cdots & c_{1j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{mj_1} & \cdots & c_{mj_k} \end{pmatrix}$ té rang $k$, i per tant té $k$ files linealment independents. Llavors existeixen $k$ files —que ocupen els llocs $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k$— tals que, per l'última propietat dels determinants proposada en el teorema 14,

$$\det \begin{pmatrix} c_{i_1j_1} & \cdots & c_{i_1j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i_kj_1} & \cdots & c_{i_kj_k} \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

$\Longleftarrow$) Si existeix un menor, d'ordre $k$, diferent de zero, les columnes corresponents de la matriu $(c_{ij})$ seran linealment independents. Si no fos així, la relació de dependència que hi hauria entre elles també valdria per aquestes columnes en la matriu del menor i, conseqüentment, aquest seria nul, la qual cosa és contradictòria. □

**Teorema 16** *En una matriu $A$ existeix un menor, d'ordre $k$, diferent de zero i tots els d'ordre $k+1$ són nuls $\Longleftrightarrow r(A) = k$.*

*Prova.* $\Longrightarrow$) Pel teorema 15 hi haurà $k$ columnes linealment independents, això implica que $r(A) \geq k$. Ara bé $r(A) > k$ no pot ser, perquè si això passés hi hauria $k+1$ columnes linealment independents i, per tant algun menor d'ordre $k+1$ diferent de zero, la qual cosa va contra la hipòtesi.

$\Longleftarrow$) $r(A) = k \Longrightarrow$ existeixen $k$ columnes linealment independents, això implica que existeix un menor d'ordre $k$ no nul. D'altra banda si n'existís algun d'ordre $k+1$ diferent de zero, hi hauria $k+1$ columnes linealment independents i seria $r(A) > k$, la qual cosa és una contradicció. □

**Definició 26**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\;B\;} & \cdots & \boxed{\phantom{x}} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ \boxed{\phantom{xxx}} & \cdots & \boxed{\phantom{x}} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}}_{A}$$

*Donada una matriu $A$ i un menor $M = \det(B)$, orlar el menor $M$ significa construir un altre menor afegint a cada fila de $B$ un element de la mateixa fila en $A$, de manera que tots els elements afegits estiguin en la mateixa columna en $A$; i a la matriu resultant, afegir a cada columna un element de la mateixa columna en $A$, de manera que tots els elements afegits siguin de la mateixa fila en $A$.*

**Exemple 19**

*Construcció d'una orla i càlcul del nombre d'orles del menor que s'indica en la matriu:*

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & \boxed{4} & 1 & \boxed{0} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per construir una orla afegim a cada fila del menor, l'element corresponent de la primera columna, i a cada columna resultant l'element corresponent de la segona fila:

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & \boxed{4} & 1 & \boxed{0} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ \boxed{1} & \boxed{4} & 1 & \boxed{0} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{3} & -1 & \boxed{2} \\ \boxed{1} & \boxed{4} & 1 & \boxed{0} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Així l'orla és $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3,$ i el nombre d'orles serà $2 \cdot 2 = 4$. □

**Teorema 17** *En una matriu $A = (a_{ij})$ existeix un menor, d'ordre $k$, no nul i qualsevol menor d'ordre $k+1$, que resulta d'orlar l'anterior, és nul $\Longleftrightarrow r(A) = k$.*

*Prova.* $\Longrightarrow$) El rang d'una matriu no canvia en variar l'ordre de les seves files o columnes. Per tant podem suposar que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Si orlem per a cada columna $\vec{A}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj}),\ j > k$, es compleix que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{p1} & \cdots & a_{pk} & a_{pj} \end{vmatrix} = 0\,, \text{ sempre que } k+1 \leq p \leq n.$$

Això significa que $$r \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{kj} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{nj} \end{pmatrix} = k.$$

Conseqüentment cada columna $\vec{A}_j$, tal que $j > k$, és combinació lineal de les $k$ primeres columnes, la qual cosa implica que aquestes formen una base del subespai generat per les columnes, i llavors $r(A) = k$.

$\Longleftarrow$) És immediat pel teorema 16. □

**Exemple 20**
*Economia de càlcul proporcionada per l'ús de la tècnica d'orlar.*

En una matriu d'ordre $m \times n$ el nombre de menors d'ordre $k+1$ és $\binom{m}{k+1} \cdot \binom{n}{k+1}$, i si existeix un menor d'ordre $k$ no nul, el nombre de les seves orles, d'ordre $k+1$, és $(m-k) \cdot (n-k)$. La diferència entre les dues quantitats ens dóna una mesura de l'estalvi d'operacions en el càlcul del rang, en el pitjor dels casos. Per exemple, si $m = 4$, $n = 4$ i $k = 2$, llavors $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} - 2 \cdot 2 = 16 - 4 = 12$. □

**Exemple 21**
*Càlcul del rang de la matriu* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & -4 & 8 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

Considerem el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Si orlem amb la tercera columna i la tercera fila i, després, amb la quarta columna i la tercera fila, obtenim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Però, amb la cinquena columna i la tercera fila obtenim

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Per tant el rang de la matriu és 3. □

# 4 Nota històrica. Un descobriment de Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777–1855), nascut a Brunswick (Alemanya), va ser un dels més grans matemàtics del seu temps. El rei de Hannover va fer encunyar monedes en què es qualificava Gauss com *Princeps mathematicorum*, títol amb el qual encara se'l reconeix. De petit ja demostrava la seva especial aptitud davant els seus mestres amb exemples com el càlcul de la suma dels cent primers nombres naturals en pocs segons i sense necessitat de paper. Prova de l'excel·lencia del seu enginy és un dels seus primers grans descobriments que va fer, segons consta en el seu diari, el 30 de març de 1796, un mes abans de complir els 19 anys. Va consistir en resoldre una qüestió plantejada feia més de dos mil anys pels geòmetres grecs i contra la qual els matemàtics havien fracassat fins aquell moment. Es tractava de la construcció del heptadecàgon regular amb un regle sense marques i un compàs. Pocs anys després, l'any 1801, en el seu tractat de teoria de nombres escrit en llatí, el qual va titular *Disquisitiones Arithmeticae*[6], va incloure el descobriment amb la demostració inclosa de quins eren tots els polígons regulars construïbles amb regle i compàs. Aquests havien de tenir un nombre de costats igual a $2^n$ amb $n \geq 2$, o bé igual a $2^n \cdot p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdots p_{i_s}$ amb $n \geq 0,\ s \geq 1$, en què els nombres $p_{i_j}$ eren *primers de Fermat* no repetits. Aquests primers són nombres que tenen la forma

$$p_k = 2^{2^k} + 1 \quad \text{on} \quad k \geq 0.$$

Reben aquest nom perquè Pierre de Fermat, l'agost del 1640, va conjecturar que tots ells eren primers dient:

> No en tinc la demostració exacta però he exclòs tan gran quantitat de divisors per demostracions infalibles, i tinc proves tan clares que estableixen la meva opinió que seria penós dedicar-m'hi.

[6]Existeix una traducció catalana feta per Griselda Pascual†, fins fa pocs anys professora titular d'Àlgebra de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, editada per l'Institut d'Estudis Catalans l'any 1996.

L'any 1739, LEONHARD EULER va enderrocar la conjectura de Fermat quan va demostrar que
$$p_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417.$$
De fet només es coneixen cinc primers de Fermat, i no se sap si n'hi han més:
$$p_0 = 3 \quad p_1 = 5 \quad p_2 = 17 \quad p_3 = 257 \quad p_4 = 65537.$$
Per fer-nos una idea de si hi ha "molts" o "pocs" polígons regulars construïbles, l'afirmació de Gauss ens permet d'assegurar que, per exemple, amb un nombre de costats menor que 65538 només n'hi ha 137.

# Índex