Àlgebra lineal

Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

1 Sistemes d'equacions lineals

1.1 Definicions i teoremes

Definició 1 *El conjunt de m equacions lineals amb n incògnites representat per*

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

en què $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$ i x_j són les incògnites, rep el nom de sistema d'equacions lineals $m \times n$. També el representem per:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ 1 \leq i \leq m \tag{2}$$

Definició 2 *Una solució del sistema és una col·lecció ordenada de nombres reals $s_1, s_2, \ldots, s_n$ que, substituïda en els llocs de les incògnites, satisfà totes les equacions. La solució també s'escriu $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.*

Definició 3 *Els sistemes que no tenen solució se'ls anomena incompatibles, i els que en tenen compatibles. Quan la solució és única se'ls anomena determinats, i quan no ho és indeterminats. D'una manera esquemàtica escrivim:*

$$\textit{Sistemes} \left\{\begin{array}{l} \textit{Incompatibles} \\ \textit{Compatibles} \left\{\begin{array}{l} \textit{Determinats} \\ \textit{Indeterminats} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Definició 4 *Anomenem homogeni un sistema en què $b_i = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$.*

Els sistemes homogenis sempre són compatibles, perquè tenen la solució trivial $(0, 0, \ldots, 0)$.

Definició 5 *Un sistema $m \times n$ és triangular si:*

- *$m \leq n$.*
- *Tots els coeficients a_{kk}, els quals constitueixen la diagonal principal del sistema, són diferents de zero.*
- *Els a_{pk} amb $p > k$ són iguals a zero.*

És de fàcil comprovació que aquests sistemes sempre són compatibles, essent determinats si el nombre n d'incògnites és igual al nombre m d'equacions, i indeterminat si $n > m$.

Exemple 1
Comprovació de la compatibilitat dels sistemes triangulars

$$\begin{aligned} x + 3y - z &= 0 \\ 2y + 3z &= 1 \\ 2z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - 2y + z + t &= 2 \\ 3y - 2z - 4t &= 2 \\ 4z + t &= 1 \end{aligned}$$

En el primer sistema obtenim la solució única

$$z = \boxed{\frac{3}{2}}, \quad y = \frac{1}{2}\left(1 - 3 \cdot \frac{3}{2}\right) = \boxed{-\frac{7}{4}}, \quad x = 0 - 3 \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) + \frac{3}{2} = \boxed{\frac{27}{4}}.$$

En el segon, per a cada valor $\lambda \in \mathbb{R}$ que donem a la t obtenim una solució. Per tant n'existiran tantes com nombres reals, és a dir infinites:

$$t = \boxed{\lambda}, \quad z = \frac{1}{4}(1 - \lambda) = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4}}, \quad y = \frac{1}{3}\left(2 + 2\left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4}\right) + 4\lambda\right) = \boxed{\frac{5}{6} + \frac{7\lambda}{6}},$$
$$x = 2 + 2\left(\frac{5}{6} + \frac{7\lambda}{6}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4}\right) - \lambda = \boxed{\frac{41}{12} + \frac{19\lambda}{12}}.$$

$\square$

En general, si $n = m$, el sistema triangular

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \tag{3}$$

té solució única $\quad x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} = s_n\,, \quad x_k = \dfrac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}s_j\right) = s_k\,,$ on $1 \le k \le n-1$.

Si $n > m$, el sistema triangular

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1m}x_m + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2m}x_m + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & a_{mm}x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{4}$$

té una solució real per a cada col·lecció de $n - m$ valors reals

$$x_{m+1} = \lambda_1,\ x_{m+2} = \lambda_2,\ \ldots,\ x_n = \lambda_{n-m}$$

que donem a les incògnites que no formen part de les columnes de la diagonal principal. Aquestes solucions són en nombre infinit i s'obtenen de la mateixa manera que en el cas anterior. Les incògnites a les quals anem assignant valors arbitraris, independents i reals reben el nom de variables lliures o *paràmetres*, i $n - m$ rep el nom de *grau d'indeterminació del sistema*.

Definició 6 *Una combinació lineal de les equacions del sistema (2), és una equació del tipus*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i, \quad \text{on } \lambda_i \in \mathbb{R},\ \forall i$$

la qual resulta de sumar els dos membres de les m equacions multiplicats pels n nombres λ_i.

Exemple 2
L'equació $21y + 7z = 0$ és combinació lineal de les equacions del sistema:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 2 \\ 5x + 2y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y + 5z &= 3 \end{aligned}$$

Efectivament només cal comprovar que

$$\begin{aligned} 21y + 7z &= (-3) \cdot (2x - 3y + z) + 0 \cdot (5x + 2y - 3z) + 2 \cdot (3x + 6y + 5z) = \\ &= (-3) \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = -6 + 0 + 6 = 0. \end{aligned}$$

□

Definició 7 *Direm que dos sistemes són equivalents quan tenen les mateixes solucions.*

Exemple 3
Els sistemes $\left\{ \begin{array}{l} x - y = 2 \\ x + 2y = 11 \end{array} \right.$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} x - y = 2 \\ 3y = 9, \end{array} \right.$ *són equivalents.*

Efectivament, tenen la mateixa solució $x = 5,\ y = 3$. □

En el teorema següent s'estableixen les manipulacions que converteixen un sistema en un sistema equivalent:

Teorema 1

a) Si sotmetem un sistema a un canvi d'ordre en les seves equacions, en resulta un sistema equivalent.

b) Un sistema i el que resulta d'afegir-li una equació que sigui combinació lineal de les del sistema són equivalents. En particular, això implica que es pot prescindir de les equacions en què tots els coeficients són zero.

c) Un sistema i el sistema resultant de substituir en el primer una equació per una combinació lineal de totes les equacions, on el coeficient de l'equació substituïda és diferent de zero, són equivalents.

Algunes conseqüències immediates de l'últim apartat d'aquest teorema són que:

- Si substituïm una equació per ella mateixa multiplicada per un valor real $\lambda \neq 0$, en resulta un sistema equivalent.

- Si substituïm una equació per ella mateixa més alguna combinació lineal de les altres, en resulta un sistema equivalent.

Exemple 4
Segons el teorema 1 els següents sistemes són equivalents i, gràcies a la seva forma triangular final, el càlcul de solucions és immediat. (Damunt de cada signe d'equivalència indiquem les substitucions efectuades, on l'equació que ocupa la posició i-èsima ve representada per F_i):

$$
\left\{\begin{aligned} x-2y+z&=3\\ 3x-5y+2z&=0\\ 2x+4y-z&=1 \end{aligned}\right.
\overset{\left[(-3)\cdot F_1+\boxed{1}\cdot F_2+0\cdot F_3\longrightarrow F_2\right]}{\Longleftrightarrow}
\left\{\begin{aligned} x-2y+z&=\ \ 3\\ y-z&=-9\\ 2x+4y-z&=\ \ 1 \end{aligned}\right.
\overset{\left[(-2)\cdot F_1+0\cdot F_2+\boxed{1}\cdot F_3\longrightarrow F_3\right]}{\Longleftrightarrow}
\left\{\begin{aligned} x-2y+z&=\ \ 3\\ y-z&=-9\\ 8y-3z&=-5 \end{aligned}\right.
\overset{\left[0\cdot F_1+-8\cdot F_2+\boxed{1}\cdot F_3\longrightarrow F_3\right]}{\Longleftrightarrow}
\left\{\begin{aligned} x-2y+z&=\ \ 3\\ y-z&=-9\\ 5z&=\ 67 \end{aligned}\right.
\Longleftrightarrow
\left\{\boxed{\begin{aligned} x&=-\tfrac{8}{5}\\ y&=\tfrac{22}{5}\\ z&=\tfrac{67}{5} \end{aligned}}\right.
$$

Observem que quan fem combinacions lineals entre les equacions del sistema només entren en joc els coeficients a_{ij}, b_i. O sigui que prescindirem de tota la resta i treballarem amb els coeficients distribuïts segons la següent configuració:

$$
\underbrace{\left(\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{(a_{ij})}\ \begin{matrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m \end{matrix}\right)}_{(a_{ij}|b_i)}
$$

Definició 8 – *A la configuració amb coeficients a_{ij} se l'anomena matriu del sistema i ve representada per (a_{ij}) o també A.*

- *A la configuració amb coeficients a_{ij}, b_i se l'anomena matriu ampliada del sistema i es representa per $(a_{ij}|b_i)$ o també $A|B$.*

- *Les col·leccions ordenades de tots els coeficients amb el primer subíndex igual reben el nom de files de la matriu.*

- *Les col·leccions ordenades de tots els coeficients amb el segon subíndex igual, i també la col·lecció de coeficients independents, reben el nom de columnes de la matriu.*

A partir d'ara quan parlem de les files del sistema voldrà dir que parlem de les equacions del sistema, i quan parlem de les columnes ens referirem als coeficients d'una incògnita determinada o bé als termes independents.

1.2 Mètode de resolució de Gauss-pivot

El teorema 1 ens permet establir un altre teorema que automatitzarà la resolució de sistemes donant pas al mètode que anomenarem *Gauss-pivot*.

Teorema 2 *Si en un sistema escollim un coeficient $a_{rt} \neq 0$ —al qual donarem el nom de pivot—, substituïm els a_{ij}, amb $i \neq r$, per $a'_{ij} = a_{rt} \cdot a_{ij} - a_{rj} \cdot a_{it}$, i els b_i per $b'_i = a_{rt} \cdot b_i - b_r \cdot a_{it}$, llavors el sistema resultant és equivalent al sistema primitiu.*

$$
\begin{array}{c} F_1: \\ \vert \\ F_r: \\ \vert \\ F_i: \\ \vert \\ F_m: \end{array}
\left(
\left(\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & — & a_{1t} & — & a_{1j} & — & a_{1n} \\
\vert & & \vert & & \vert & & \vert \\
a_{r1} & — & \boxed{\boxed{a_{rt}}} & — & a_{rj} & — & a_{rn} \\
\vert & & \vert & & \vert & & \vert \\
a_{i1} & — & a_{it} & — & \boxed{a_{ij}} & — & a_{in} \\
\vert & & \vert & & \vert & & \vert \\
a_{m1} & — & a_{mt} & — & a_{mj} & — & a_{mn}
\end{array}\right)
\begin{array}{c} b_1 \\ \vert \\ b_r \\ \vert \\ b_i \\ \vert \\ b_m \end{array}
\right)
$$

Prova. Només cal observar que fer la substitució indicada és el mateix que:
– Fer la combinació lineal d'equacions F_s:

$$a_{rt} \cdot F_i + (-a_{it}) \cdot F_r + \sum_{k \neq i,r} 0 \cdot F_k$$

– Substituir F_i per l'anterior combinació, operació permesa gràcies al teorema 1, en ser $a_{rt} \neq 0$.

□

- **Forma d'utilitzar la proposició (mètode de Gauss-pivot)**

  – Considerarem els elements a_{rr} de la diagonal principal com a pivots en els diferents sistemes d'equacions equivalents que aniran apareixent, començant per $r = 1$.

  – Les equacions F_i substituïdes seran les que tinguin $i > r$, és a dir les que es trobin a continuació de l'equació F_r que conté el pivot.

  – Si algun dels elements que han de fer de pivot és diferent de zero permutarem per una de posterior la seva fila o columna , —en aquest últim cas caldrà recordar aquest canvi perquè també haurà canviat l'ordre de les incògnites—, fins aconseguir un pivot diferent de zero. Quan aquest procés no pugui seguir podrem discutir, i resoldre en el seu cas, el sistema plantejat.

- En un sistema $m \times n$, actuant de la manera explicada, sempre s'obté un sistema on els elements que es troben sota de la diagonal principal són igual a zero, i la última fila ve expressada d'una de les maneres següents:

1. $(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0)\; b'_s\;)$, amb $b'_s \neq 0$.
2. $(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad a'_{nn})\; b'_n\;)$, amb $a'_{nn} \neq 0$.
3. $(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad a'_{pp} \quad a'_{pp+1} \quad \cdots \quad a'_{pn})\; b'_p\;)$, amb $p < n$ i $a'_{pp} \neq 0$.

És immediat que en el cas (1.) el sistema és incompatible. Tant en el cas (2.) com en el (3.) s'obté un sistema triangular, el qual, com ja sabem, té solució. En el cas (2.) té solució única. En el cas (3.) en té un nombre infinit que depenen dels $n - p$ paràmetres reals $x_{p+1} = \lambda_{p+1}, x_{p+2} = \lambda_{p+2} \ldots x_n = \lambda_n$, i el grau d'indeterminació és $n - p$.

Exemple 5
Discussió i resolució del sistema

$$\begin{aligned} x+y-z+t+s &= 1\\ 2y+3z+4t+3s &= 2\\ x+y-z+6t+s &= 2\\ 3x+3y-3z+8t+3s &= 4 \end{aligned}$$

$$\left(\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3\\ 1 & 1 & -1 & 6 & 1\\ 3 & 3 & -3 & 8 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1\\2\\2\\4 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1\\2\\1\\1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 4 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1\\2\\1 \end{array}\right)$$

Aquest sistema resulta ser compatible indeterminat. Aquí tenim $p = 3$ i $n = 5$ essent els paràmetres, (observem que hem intercanviat les columnes 3a. i 4a.), $z = \lambda \in \mathbb{R}$ i $s = \mu \in \mathbb{R}$, d'on resulta:

$$\begin{aligned} x+y+t &= 1+\lambda-\mu\\ 2y+4t &= 2-3\lambda-3\mu\\ 5t &= 1 \end{aligned}$$

el qual té solució $\quad (x,y,z,t,s) = \left(\frac{1}{5}+\frac{5}{2}\lambda+\frac{1}{2}\mu\ ,\ \frac{3}{5}-\frac{3}{2}\lambda-\frac{3}{2}\mu\ ,\ \lambda\ ,\ \frac{1}{5}\ ,\ \mu\right).$

És fàcil comprovar que si es trien els paràmetres $t = \lambda$ i $s = \mu$ resulta un sistema que no admet $t = \lambda$ com a paràmetre la qual cosa indica que s'ha d'anar amb molta cura en fer aquesta tria. $\square$

1.3 Exercicis

Discuteix i resol els següents sistemes:

a) $\left\{\begin{aligned} x+2y+2t &= 3\\ -z+2t &= 0\\ 2x+4y+3z-2t &= 6\\ x+2y+z &= 3\\ 3x+6y+z+4t &= 9 \end{aligned}\right.$

b) $\left\{\begin{aligned} x+2y+z &= a\\ x+(a+3)y+z &= 2a\\ 2x+(a+5)y+(a-1)z &= 4a \end{aligned}\right.$

c) $\left\{\begin{aligned} -ax+(a-1)y+2z &= k\\ x-3y+2z &= -1\\ (a+2)x+(a-4)y+4z &= -2 \end{aligned}\right.$

Solucions:

a) $(3-2\lambda-2\mu, \lambda, -3+2\mu, \mu)$

b) Incompatible si $a = -1$ o $a = 3$.
Compatible determinat si $a \neq -1$ i $a \neq 3$,
$\left(\frac{a(a^2-5a+2)}{(a+1)(a-3)}, \frac{a}{a+1}, \frac{a}{a-3}\right)$

c) Incompatible si $a = -2$ i $k \neq -1$, o bé $a = -1/2$ i $k \neq -1$.
Compatible determinat si $a \neq -2$ i $a \neq -1/2$,
$\left(-\frac{k+1}{2a+1}, \frac{a(k+1)}{(a+2)(2a+1)}, \frac{2k-a}{2(a+2)}\right)$
Compatible indeterminat si $a = -2$ i $k = -1$, o si $a = -1/2$ i $k = -1$,
$\left(0, \frac{1}{3}+\frac{2\lambda}{3}, \lambda\right)$ o $\left(3\lambda, \lambda, -\frac{1}{2}\right)$

2 Matrius

2.1 Definicions

En les operacions realitzades en la discussió i resolució de sistemes lineals hem observat que els únics elements implicats eren els coeficients de les incògnites i els coeficients independents. Això ha propiciat un tractament d'aquests coeficients en una configuració que hem anomenat matriu. En general:

Definició 9 *Anomenem matriu d'ordre $m \times n$ a la col·lecció A de $m \cdot n$ nombres reals a_{ij}, on $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$, ordenats en la forma:*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

A les col·leccions ordenades $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq m$ se les anomena files de la matriu.[1] *A les col·leccions ordenades $(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq j \leq n$ se les anomena columnes.*[2]
S'anomena fila o matriu-fila a una matriu amb una sola fila, i columna o matriu-columna a una matriu amb una sola columna.

En el conjunt de files o columnes es pot trobar una estructura algebraica. Aquesta ve proporcionada per les mateixes operacions que les utilitzades en les combinacions lineals de files d'un sistema d'equacions per a l'obtenció de sistemes d'equacions equivalents:

Suma de files:
$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$

Producte de files per un escalar real:
$\lambda \cdot (a_1, a_2, \ldots a_n) = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \ldots, \lambda \cdot a_n)$

Aquestes operacions es poden generalitzar a les matrius $m \times n$ com veurem en la secció 2.5. Ara, estudiarem aquesta estructura amb la finalitat d'introduir el concepte de rang d'una matriu. Aquest concepte permetrà caracteritzar l'existència de solucions en els sistemes lineals.

2.2 Dependència i independència lineal de files

Mentre no diguem res en contra, tot el que afirmarem per a les files també es pot afirmar per a les columnes.
Recordem que les files són col·leccions ordenades i finites de nombres reals, les quals es poden sumar i multiplicar per escalars. Concretament les representem amb la notació:

$$F = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

i anomenem la fila $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, *fila zero* o *nul·la*.

[1] La notació $\mathbb{R}^n$ representa el conjunt de col·leccions ordenades de n nombres reals.
[2] A les files també se les anomena vectors-fila i a les columnes vectors-columna.

Definició 10 *Una combinació lineal de les files $F_1, F_2, \ldots, F_p$, és una expressió del tipus*

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i F_i = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \ldots + \lambda_p F_p,$$

en què $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$. Una fila $F = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i F_i$, direm que és combinació lineal de les files $F_1, F_2, \ldots, F_p$.

Exemple 6
En la matriu $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \\ 17 & -9 \end{pmatrix}$, la fila $F_3 = (17, -9)$ és combinació lineal de les files $F_1 = (3, 4)$ i $F_2 = (-1, 5)$.

Efectivament, $(17, -9) = \lambda_1(3, 4) + \lambda_2(-1, 5) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\lambda_1 - \lambda_2 = 17 \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 = -9 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 3\lambda_1 - \lambda_2 = 17 \\ 19\lambda_2 = -95. \end{array} \right.$

Per tant, $\lambda_2 = -5$ i $\lambda_1 = \dfrac{17-5}{3} = 4$. És a dir,

$$\boxed{(17, -9) = 4 \cdot (3, 4) - 5 \cdot (-1, 5) \Longleftrightarrow F_3 = 4F_1 + (-5)F_2}.$$

□

Definició 11 *Un sistema o conjunt de files és linealment dependent o lligat si alguna d'elles és combinació lineal de les altres.*

Definició 12 *Un sistema o conjunt de files és linealment independent o lliure si cap d'elles és combinació lineal de les altres.*

Segons aquestes definicions, en l'exemple 6 hem trobat tres files linealment dependents. A continuació proposarem un altre criteri per establir la dependència o independència lineal d'un conjunt de files. Observem que si $F_1, F_2, \ldots, F_p$ són linealment dependents, una de les files F_j es pot escriure

$$F_j = \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_{j-1} F_{j-1} + \lambda_{j+1} F_{j+1} + \ldots + \lambda_p F_p.$$

Això és el mateix que $\lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_{j-1} F_{j-1} + (-1) F_j + \lambda_{j+1} F_{j+1} + \ldots + \lambda_p F_p = \bar{0}$. És a dir, que existeix una combinació lineal nul·la de les F_i amb algun coeficient diferent de zero. Partint d'aquesta observació es poden demostrar els teoremes següents:

Teorema 3 *$F_1, F_2, \ldots, F_p$ linealment dependents $\Longleftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, amb algun $\lambda_i \neq 0$, tals que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i F_i = \bar{0}$.*

Teorema 4 *$F_1, F_2, \ldots, F_p$ linealment independents $\Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i F_i = \bar{0} \Longrightarrow \lambda_i = 0,\ \forall i \right)$.*

Exemple 7 *En la matriu* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$, *les files són linealment independents si* $a_1, b_2, c_3 \neq 0$,.

Efectivament, $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = \bar{0} \Longrightarrow (\lambda_1 a_1, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2, \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3) = (0,0,0) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_1 a_1 = 0 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = 0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{0}{a_1} = 0 \\ \lambda_2 = \dfrac{-\lambda_1 b_1}{b_2} = \dfrac{0}{b_2} = 0 \\ \lambda_3 = \dfrac{-\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2}{c_3} = \dfrac{0}{c_3} = 0 \end{array} \qquad \text{perquè } a_1, b_2, c_3 \neq 0.$$

□

Teorema 5 *– Si un conjunt de files és lin. indep., qualsevol subconjunt ho és.*
– Si un conjunt de files és lin. dep., qualsevol conjunt que el contingui ho és.

2.3 Rang d'una matriu

Definició 13 *Donada una matriu A d'ordre $m \times n$, definim:*
– El rang per files $r_f(A)$ com el màxim nombre de files linealment independents de A.
– El rang per columnes $r_c(A)$ com el màxim nombre de columnes linealment independents.

Teorema 6 (Transformacions que deixen invariant el rang d'una matriu)
El rang per files/columnes no canvia quan:
- *a) Es canvia l'ordre de les files/columnes.*
- *b) Es multiplica una fila/columna per un escalar diferent de zero.*
- *c) Es substitueix una fila/columna per una combinació lineal de les files/columnes amb el coeficient de la fila substituïda diferent de zero.*
- *d) S'afegeix o s'elimina una fila/columna que és combinació lineal de les altres.*

A continuació donarem una definició i un criteri per determinar el rang d'una matriu un cop aplicades, de manera adequada, les transformacions que el deixen invariant. Aquest criteri és una generalització de la situació exposada a l'exemple 7.

Definició 14 *Direm que una matriu és esglaonada si es compleix que:*
– En cada fila existeix algun coeficient diferent de 0.[3]
– Per a cada fila, llevat de la primera, el primer coeficient diferent de zero ocupa una columna de subíndex més gran que el primer coeficient diferent de zero en la fila anterior.
Direm que una matriu esglaonada és triangular si els coeficients a_{ii} de la diagonal principal són diferents de zero.[4]

Exemple 8
La matriu A és esglaonada i no triangular, la matriu B és triangular i la matriu C no és esglaonada.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[3] En alguns textos no s'imposa aquesta condició.
[4] En alguns textos es restringeix el domini de les matrius triangulars a les matrius $n \times n$ o quadrades. En d'altres no s'imposa la restricció de que els termes de la diagonal siguin diferents de zero.

Teorema 7 *Les files d'una matriu esglaonada són linealment independents i, per tant, el rang per files d'una matriu esglaonada és igual al seu nombre de files.*

Per a la demostració s'actuaria de manera semblant a l'exemple 7.

Exemple 9
A l'exemple 8, $r_f(A) = 3$, $r_f(B) = 3$ i $r_f(C) \geq 2$. Per determinar aquest últim rang podem actuar amb el mètode del pivot explicat en la resolució de sistemes d'equacions.

Efectivament, pel teorema 7, $r_f(A) = r_f(B) = 3$. Quant a $r_f(C)$, pels teoremes 6 i 7 ,

$$r_f(C) = r_f \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} r_f \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \overset{(**)}{=} 3.$$

$(*)$ Hem aplicat el teorema 6c. Concretament, hem fet la substitució $(-1)F_2 + 2F_3 \longrightarrow F_3$.
$(**)$ Hem aplicat el teorema 7. □

Definició 15 *Anomenem matriu transposada d'una matriu A, la matriu A^t que resulta en canviar, en la matriu A, les files per columnes i les columnes per files, conservant-ne l'ordre.*

Des d'aquesta definició podem afirmar que $r_c(A) = r_f(A^t)$.

Exemple 10
La transposada de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *és* $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *i* $r_c(A) = r_f(A^t) = 3.$

□

Una qüestió important es la d'esbrinar relacions entre r_f i r_c. El teorema següent proporciona la resposta:

Teorema 8 *En qualsevol matriu A es compleix $r_f(A) = r_c(A)$.*

La demostració no és senzilla i no la presentem. Ens limitem a comprovar amb un exemple la veritat de l'afirmació.

Exemple 11
Càlcul del rang per files i del rang per columnes de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$r_f \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \end{pmatrix} = r_f \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & 1 & -7 \end{pmatrix} = r_f \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -7 \end{pmatrix} = 2$$

$$r_c \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \end{pmatrix} = r_f \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} = r_f \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} = r_f \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} = 2$$

□

L'últim teorema ha mostrat que el rang és independent del fet de considerar la matriu composta de files o de columnes. Així, podem definir el rang d'una matriu:

Definició 16 *Anomenem rang $r(A)$ d'una matriu A, el seu rang per files o columnes indistintament.*

Entre d'altres qüestions, això planteja la possibilitat de calcular el rang d'una matriu, a partir del càlcul del rang de la matriu transposada.

Exemple 12
Càlcul del rang de la matriu $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

$$r\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} = 2$$

□

2.4 Aplicació als sistemes lineals. Teorema de Rouché-Frobenius

Recordem que quan es proposa de resoldre un sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \quad \text{en què } a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

el que es pretén es trobar n nombres reals que satisfaguin les m condicions anteriors. Aquest problema es pot traduir al llenguatge de matrius i files anomenant

$$A_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m, \text{ per } 1 \leq j \leq n \quad \text{i} \quad B = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Així, la qüestió consisteix en trobar

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \quad \text{tals que} \quad x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n = B.$$

És a dir, en trobar una combinació lineal de les columnes A_j de la matriu A del sistema que sigui igual a la columna B de la matriu ampliada $A|B$.

2.4.1 Condició necessària i suficient per a l'existència de solucions

Utilitzant aquest nou llenguatge trobarem una condició necessària i suficient per a l'existència de solucions, i estudiarem en el cas de compatibilitat el nombre de solucions.
Suposem que el sistema té solució. Llavors B és combinació lineal de les columnes A_j. Per tant, pel teorema 6, en afegir la columna B a la matriu A, el rang no varia i $\boxed{r(A) = r(A|B)}$.
Hem trobat una condició necessària per tal que el sistema tingui solució.
Esbrinem si aquesta condició és suficient. Suposem, doncs, que $r(A) = r(A|B) = r$. Siguin $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r}$ les columnes independents. Veurem que B és combinació lineal d'aquestes i, per tant, el sistema tindrà solució.

Actuem per reducció a l'absurd. Si B no fos combinació lineal d'aquestes columnes, llavors $\lambda_0 B + \lambda_1 A_{j_1} + \lambda_2 A_{j_2} + \cdots + \lambda_r A_{j_r} = \bar{0} \Longrightarrow \boxed{\lambda_0 = 0} \Longrightarrow \lambda_1 A_{j_1} + \lambda_2 A_{j_2} + \cdots + \lambda_r A_{j_r} = \bar{0} \Longrightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0} \Longrightarrow B, A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r}$ són linealment independents $\Longrightarrow r(A|B) = r+1 > r = r(A|B)$.
Aquesta última desigualtat estableix una contradicció amb la hipòtesi de treball que era la igualtat dels rangs. Conseqüentment hem establert el teorema següent:

Teorema 9 (Teorema de Rouché-Frobenius)

$$\textit{El sistema } (5) \textit{ és compatible} \quad \Longleftrightarrow \quad r(A) = r(A|B)\,.$$

2.4.2 Nombre de solucions

Si anomenem $r = r(A) = r(A|B)$, sabem que $r \leq n$. Es presenten dues possibilitats:

$\mathbf{r = n}$ $\Longrightarrow$ El sistema és equivalent a un sistema triangular amb igual nombre de files i columnes en la matriu A. Per tant té solució única.[5]

$\mathbf{r < n}$ $\Longrightarrow$ Existeixen r columnes $A_{j_1}, \ldots, A_{j_r}$, linealment independents. Podem situar-les en els r primers llocs i el sistema és equivalent a un sistema triangular amb menys files que columnes. Llavors, per a cada col·lecció de $n-r$ valors reals arbitraris donats a les $n-r$ incògnites corresponents a les últimes $n-r$ columnes de A, obtindrem un sistema amb les r incògnites $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ que tindrà solució única. Conseqüentment, en poder assignar un nombre infinit de col·leccions de nombres arbitraris a les últimes $n-r$ incògnites, el sistema tindrà un nombre infinit de solucions dependents de $n-r$ paràmetres.

Exemple 13
Discussió del sistema
$$\left\{\begin{aligned} x + 2y + z + t &= 0 \\ 2x - y - 3z + 2t &= 2 \\ x - 3y - 4z + t &= 2 \\ 4x - 7y - 11z + 4t &= 6\,. \end{aligned}\right.$$

Aplicant el mètode de Gauss-pivot és fàcil comprovar que aquest sistema és equivalent al que té per matrius:
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & 2 \end{array}\right),$$
on tenim $r(A) = 2 = r(A|B)$, la qual cosa significa que el sistema és compatible. Com que $r = 2 \leq 4 = n$ el sistema és indeterminat i el nombre de solucions dependrà de $4-2=2$ paràmetres. Agafarem com a paràmetres les incògnites que quedin després d'excloure dues columnes independents. En aquest cas, l'única parella d'incògnites que no podríem considerar com a paràmetres seria la parella y, z perquè les columnes primera i quarta són linealment dependents. En total podríem considerar cinc eleccions diferents de paràmetres. $\square$

[5] Per a la discussió dels sistemes triangulars vegeu la secció 1.1, pàgina 2.

2.5 Matrius. Estructura

De la mateixa manera que hem definit la suma i el producte per un escalar de files o columnes, es defineixen aquestes operacions per a matrius-fila o columna i per a matrius $m \times n$ en general:

Suma de matrius:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Producte de matrius per un escalar:

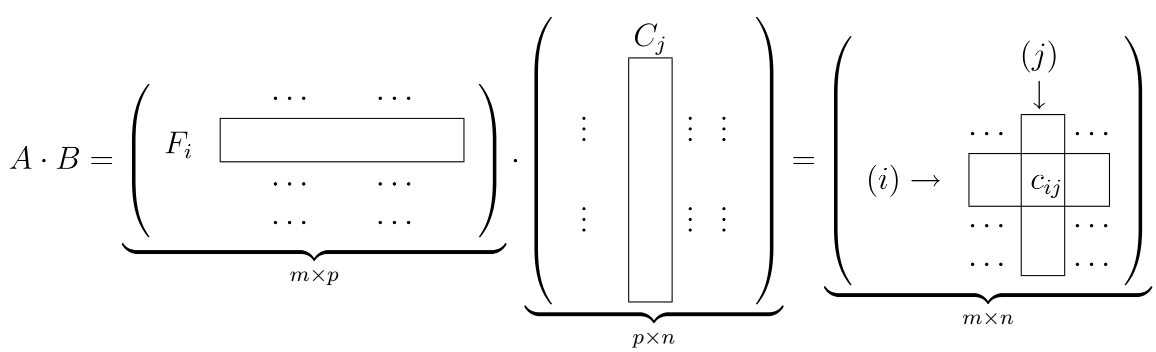
$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \cdots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Aquestes operacions proporcionen a les matrius $m \times n$ la mateixa estructura que la de les files quan s'operen.

Producte de matrius: També es defineix un producte d'una matriu $A = (a_{ij})$, d'ordre $m \times p$, per una altra $B = (b_{ij})$, d'ordre $p \times n$, com una altra matriu C de coeficients

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \,.$$

Observem que per poder multiplicar les dues matrius el nombre p de columnes de la primera ha de ser igual al nombre p de files de la segona, i la matriu resultant té m files, com la primera, i n columnes com la segona. En l'esquema adjunt es mostra el lloc de c_{ij} que resulta de multiplicar la fila F_i de la matriu A per la columna C_j de la matriu B:



Es pot comprovar que aquest producte té la propietat distributiva respecte de la suma, la propietat associativa, però no té la commutativa.

Exemple 14
Càlcul de $3A+B$ i $A\cdot C$, en què

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\\4&0\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}0&3\\-1&2\\5&1\end{pmatrix}\quad,\quad C=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}.$$

$$3A+B=\begin{pmatrix}3\cdot1&3\cdot2\\3\cdot3&3\cdot1\\3\cdot4&3\cdot0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3\\-1&2\\5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot1+0&3\cdot2+3\\3\cdot3-1&3\cdot1+2\\3\cdot4+5&3\cdot0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&9\\8&5\\17&1\end{pmatrix},$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0&1\cdot(-1)+2\cdot2\\3\cdot1+1\cdot0&3\cdot(-1)+1\cdot2\\4\cdot1+0\cdot0&4\cdot(-1)+0\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\3&-1\\4&-4\end{pmatrix}.$$

□

En el cas del producte de matrius d'ordre $n\times n$, anomenades *matrius quadrades d'ordre* n, el producte té element neutre i aquest és la *matriu identitat*

$$I_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\qquad\text{en què }\ a_{ii}=1\ \text{ i } a_{ij}=0\ \text{ si }\ i\neq j,$$

que compleix $A\cdot I_n=I_n\cdot A=A$.
A partir de l'existència d'aquest element I_n és natural preguntar-nos per l'existència d'element invers, és a dir per l'existència de matrius invertibles. La resposta a aquesta pregunta és que no totes les matrius són invertibles.

Definició 17 *Una matriu quadrada A és invertible ssi existeix una matriu quadrada X tal que $A\cdot X=X\cdot A=I_n$. A la matriu X se l'anomena la inversa d'A i es representa $X=A^{-1}$.*

De fet, es pot demostrar que per establir que una matriu A és invertible només cal comprovar que existeix X tal que $A\cdot X=I_n$. Veurem sobre un exemple la manera d'actuar en la recerca de la inversa d'una matriu.

Exemple 15
Recerca de la inversa de la matriu $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

Hem de resoldre els tres sistemes d'equacions resultants de plantejar

$$\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Aquests tres sistemes es poden resoldre d'una manera simultània, aplicant el mètode de Gauss-pivot a la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&1&0&0\\-1&0&1&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right),\tag{6}$$

i fent zeros, no tant sols per sota de la diagonal principal, sinó també per sobre. Així els tres sistemes (6) són equivalents als sistemes

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & -3 & -12 & 9 \\ 0 & 9 & 0 & 6 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & -4/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 1 \end{array}\right),$$

d'on resulta immediatament que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & -4/3 & 1 \\ 2/3 & 2/3 & -1 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$. □

En general, es pot demostrar el teorema següent sobre l'existència d'inverses:

Teorema 10 *La matriu A d'ordre $n \times n$ és invertible si i només si $r(A) = n$.*

Presentació d'un sistema d'equacions mitjançant un producte de matrius: Observem que el sistema d'equacions $m \times n$ de la pàgina 1 es pot presentar utilitzant el producte de matrius,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{o bé} \quad A \cdot X = B.$$

A més, en el cas en què el sistema és $n \times n$ amb $r(A) = r(A|B) = n$, la solució única es pot obtenir multiplicant per la matriu A^{-1} a l'esquerra. És a dir,

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Longrightarrow I_n \cdot X = A^{-1} \cdot B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

D'aquesta manera s'obté,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Exemple 16
Resolució del sistema $\left\{\begin{array}{rl} x + 3y + 2z & = 1 \\ -x + z & = 2 \\ y + 2z & = 3 \end{array}\right.$

És de fàcil comprovació que el seu rang és 3. Llavors,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} -1/3 & -4/3 & 1 \\ 2/3 & 2/3 & -1 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solució és $x = 0,\ y = -1,\ z = 2$.
$(*)$ La matriu inversa ha sigut calculada a l'exemple 15. □

3 Determinants

3.1 Exercicis d'introducció

Exercici 1
Sigui la matriu $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$*. Volem estudiar la condició sobre els seus coeficients que determina que el rang sigui 2 o no ho sigui. És a dir la condició que determina la independència lineal entre les seves files.*

Exercici 2
Sigui la matriu $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$*. Volem estudiar la condició sobre els seus coeficients que determina que el rang sigui 3 o no ho sigui. És a dir la condició que determina la independència lineal entre les seves files.*

Resolució de l'Exercici 1

Estudiem el rang aplicant transformacions que conservin el rang. Concretament, apliquem el teorema 6c de la secció 2.3, el qual ens porta a la discussió:

- $\boxed{a_{11} \neq 0}$

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

Aquesta última té rang igual a 2 si i només si

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0\,. \tag{7}$$

- $\boxed{a_{11} = 0}$

Perquè tingui rang igual a 2 cal que $a_{12} \neq 0$. Llavors

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} \boxed{a_{12}} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ 0 & a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} \end{pmatrix}$$

Igual que abans, aquesta última té rang igual a 2 si i només si

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0\,. \tag{8}$$

Resolució de l'Exercici 2

Portem la discussió de la mateixa manera que a l'exercici anterior:

- $\boxed{a_{11} \neq 0}$

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{pmatrix} \tag{9}$$

I si $\boxed{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0}$ aquest rang és igual a

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21} \\ 0 & 0 & (*) \end{pmatrix}$$

en què l'expressió $(*)$ és:

$$\begin{aligned}(*) \;&=\; a_{11}\left(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\right)+ \\ &\quad + \cancel{a_{12}a_{13}a_{21}a_{31}} - \cancel{a_{12}a_{13}a_{21}a_{31}} = a_{11}\cdot\Delta\,.\end{aligned}$$

Llavors, la matriu té rang igual a 3 si i només si

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\neq 0\,. \tag{10}$$

Si $\boxed{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0}$, no podem fer l'última transformació de matrius. Perquè el rang sigui igual a 3 cal que $a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}\neq 0$. Llavors, si permutem les dues últimes columnes obtenim que l'expressió (9) és igual a

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ 0 & a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21} & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \\ 0 & 0 & -a_{11}\cdot\Delta \end{pmatrix}$$

Per tant, el rang és igual a 3 si i només si $\Delta\neq 0$.

• $\boxed{a_{11}=0}$

En aquest cas $a_{21}\neq 0$ o $a_{31}\neq 0$. Llavors si canviem l'ordre de les files del sistema i actuem igual que abans, arribaríem a la mateixa conclusió que abans, $\Delta\neq 0$. □

Observacions finals. Els factors dels productes de les expressions

$$\begin{gathered} a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \\ a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}, \end{gathered} \tag{11}$$

que determinen els rangs de les matrius d'ordre 2 i 3, es construeixen a partir de la consideració de totes les *permutacions* possibles dels subíndexs que ocupen la segona posició —dues en el primer cas, i sis en el segon—:

Permutacions en el cas d'ordre 2 : 1 2 2 1.
Permutacions en el cas d'ordre 3 : 1 2 3 2 1 3 3 2 1 1 3 2 2 3 1 3 1 2.

A més, si anomenem permutacions principals a 1 2 i 1 2 3, i considerem el nombre de canvis d'ordre entre parelles d'elements que apareixen en la resta de permutacions respecte d'aquestes dues, s'observa que:

– Si hi ha un nombre parell de canvis, el signe del producte corresponent és positiu.

– Si hi ha un nombre senar de canvis, el signe del producte corresponent és negatiu.

Les expressions (11) tenen una gran rellevància en la teoria i les aplicacions de l'Àlgebra i reben el nom de *determinant* de la matriu quadrada corresponent. Per tal de donar una definició rigorosa d'aquest nou objecte farem una introducció a la teoria de les permutacions.

3.2 Permutacions

Definició 18 *Donat el conjunt $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, cadascuna de les possibles ordenacions dels seus elements s'anomena permutació de n elements. Si utilitzem el llenguatge d'aplicacions entre conjunts, es diu que una permutació de n elements és una aplicació bijectiva*

$$\begin{array}{rcl} \sigma \ : \ \{1, 2, \ldots, n\} & \longrightarrow & \{1, 2, \ldots, n\} \\ n & \longmapsto & \sigma(n) \end{array}$$

la qual es representa per $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$*, o també per $\sigma(1)\ \sigma(2) \ldots \sigma(n)$. El conjunt de permutacions d'A es representa per S_n i té estructura de grup amb l'operació de composició de funcions.*[6]

Per exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2\ 1\ 3$, és la permutació σ tal que $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$ i $\sigma(3) = 3$.

Definició 19 *Si fixem un ordre entre els elements d'A, a la permutació que conserva aquest ordre l'anomenen permutació principal. Si no es diu el contrari es considera $(1\ 2\ \ldots\ n)$ com la permutació principal.*

Definició 20 *Una permutació σ presenta una inversió en les posicions $i,\ j$, si no conserva l'ordre de la permutació principal en els llocs $i,\ j$. És a dir, quan $i < j$ i $\sigma(i) > \sigma(j)$.*

Per exemple la permutació $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$, presenta les inversions 4 3, 4 2 i 3 2.

Definició 21 *Direm que una permutació és de classe parell si presenta un nombre parell d'inversions, i que és de classe senar si en presenta un nombre senar.*

Definició 22 *Definim el signe $\varepsilon(\sigma)$ d'una permutació σ, com*

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} +1 & ,si \ \ \sigma \text{ és parell} \\ -1 & ,si \ \ \sigma \text{ és senar} \end{cases}$$

Teorema 11 *Dues permutacions que tenen dos elements i només dos intercanviats són de classes diferents. En un llenguatge més tècnic diríem, σ i τ tals que existeixen $p, q \in \{1, 2, \ldots, n\}$, amb $\tau(p) = \sigma(q)$ i $\tau(q) = \sigma(p)$, i $\forall j \neq p, q$ és $\tau(j) = \sigma(j)$, són de classes diferents.*

Prova. Estudiem el nombre d'inversions que fan falta per passar d'una permutació a l'altra. Considerarem dos casos:

a) Suposem que p i q són consecutius, $(p = p + 1)$. Llavors només farà variar el nombre total d'inversions el fet que $\sigma(p)$ i $\sigma(p + 1)$ estiguin en inversió o no. Efectivament,

   – $\sigma(p)$ i $\sigma(p + 1)$ no presenten inversió $\Longrightarrow \tau(p) = \sigma(p + 1)$ i $\tau(p + 1) = \sigma(p)$ presenten inversió.

[6] Això vol dir que la composició de dues permutacions és una altra permutació, i que aquesta composició té la propietat associativa, té un element neutre (la permutació que transforma cada element en ell mateix), i que cada permutació es pot compondre amb una altra tal que el resultat és l'element neutre.

– $\sigma(p)$ i $\sigma(p+1)$ presenten inversió $\Longrightarrow \tau(p)=\sigma(p+1)$ i $\tau(p+1)=\sigma(p)$ no presenten inversió.

O sigui que σ i τ es diferencien en una inversió i són de classes diferents

b) Si p i q no són consecutius

$$\begin{array}{ccc} \sigma & : & \sigma(1)\ldots\sigma(p)\ldots\sigma(q)\ldots\sigma(n) \\ \tau & : & \sigma(1)\ldots\sigma(q)\ldots\sigma(p)\ldots\sigma(n) \end{array}$$

Per posar $\sigma(p)$ en el lloc de $\sigma(q)$, haurem de fer $q-p$ intercanvis consecutius amb elements adjacents, és a dir $q-p$ canvis de classe.

Per posar $\sigma(q)$ en el lloc que ocupava $\sigma(p)$ —entre $\sigma(p-1)$ i $\sigma(p+1)$—, haurem de fer $q-p-1$ canvis de classe.

En total haurem de fer $(q-p)+(q-p-1)=2(q-p)-1$ canvis de classe. Això vol dir que σ i τ es diferencien en un nombre senar d'inversions i, per tant, són de classes diferents. □

Teorema 12 *Si $n \geq 2$, hi ha tantes permutacions parells com senars.*

Prova. En total hi ha un nombre $n!$ de permutacions que podem agrupar de dues en dues, de manera que les agrupades tinguin només dos llocs intercanviats. Com que cadascuna de les permutacions d'aquestes parelles pertany a una classe diferent, hi haurà $n!/2$ permutacions parells i $n!/2$ permutacions senars. □

3.3 Propietats dels determinants

Amb l'ajut del llenguatge de les permutacions definirem els determinats i enunciarem les seves propietats sense demostrar-les.

Definició 23 *Anomenem determinant d'una matriu quadrada $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ a l'expressió*

$$\det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}\,,$$

en què n rep el nom d'ordre del determinant.

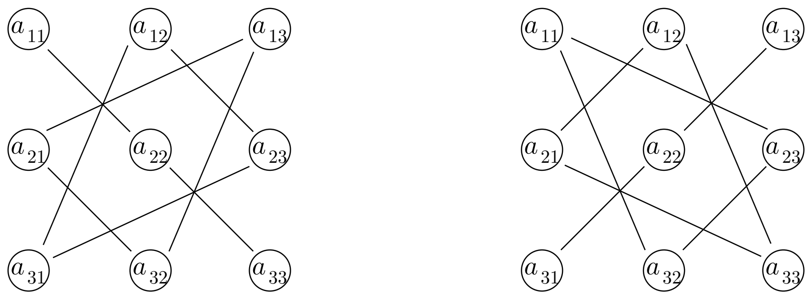
Notem que el teorema 12 ens permet afirmar que hi haurà tants sumands amb signe positiu com negatiu; i que el determinant és la suma de tots els productes que resulten d'agafar com factors un sol element de cada fila i de cada columna, afectats del signe de la permutació determinada pels subíndexs corresponents a les columnes de la matriu.

Exemple 17
Determinació del signe del producte $a_{12}a_{25}a_{31}a_{44}a_{53}$ en un determinant d'ordre 5.

La permutació 2 5 1 4 3 presenta les inversions 2 1, 5 1, 5 4, 5 3, 4 3. En total fan un nombre de 5, i per tant és senar, és a dir que el signe del producte és el $(-)$. □

3.4 Regla de Sarrus

Per calcular determinants d'ordre 3, la definició de determinant origina la regla basada en l'esquema següent, en què cada circuit representa un sumand format pel producte dels tres coeficients que conecta. Els productes de la figura de l'esquerra vindran afectats pel signe positiu i els de la dreta pel signe negatiu.



Teorema 13 (Propietats dels determinants) *Si representem les columnes del determinant per $C_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$, $1 \leq j \leq n$, llavors es compleix:*

a) $\det\left(C_1, \ldots, C_j + C'_j, \ldots, C_n\right) = \det\left(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n\right) + \det\left(C_1, \ldots, C'_j, \ldots, C_n\right)$.

b) $\lambda \cdot \det\left(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n\right) = \det\left(C_1, \ldots, \lambda \cdot C_j, \ldots, C_n\right), \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$.

c) $\det\left(C_1, \ldots, C_p, \ldots, C_q, \ldots, C_n\right) = -\det\left(C_1, \ldots, C_q, \ldots, C_p, \ldots, C_n\right)$.

d) $\det\left(C_1, \ldots, C_p, \ldots, C_p, \ldots, C_n\right) = 0$.

e) $\lambda_j \neq 0 \Longrightarrow \det\left(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n\right) = \dfrac{1}{\lambda_j} \cdot \det\left(C_1, \ldots, C_{j-1}, \sum_{p=1}^{n} \lambda_p C_p, C_{j+1}, \ldots, C_n\right)$.

f) Sigui $A^{\perp}$ la matriu que resulta de canviar les files d'A per columnes, a la qual anomenem transposada d'A, llavors
$$\det(A^{\perp}) = \det(A)\,.$$

g) Tot el que hem dit per a les columnes serveix per a les files.

h) $C_1, \ldots, C_n$ *són l.i.* $\Longleftrightarrow r\left(C_1, \ldots, C_n\right) = n \Longleftrightarrow \det\left(C_1, \ldots, C_n\right) \neq 0$.

i) Es tracta d'expressar un determinant d'ordre n a partir de determinants d'ordre $n-1$. Per fer-ho cal que introduïm un parell de definicions:

Definició 24 *Anomenem menor complementari d'a_{ij} el determinant*[7]

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \widehat{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \widehat{a_{i1}} & \cdots & \widehat{a_{ij}} & \cdots & \widehat{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \widehat{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

[7] La notació $\widehat{a}$ indica que es prescindeix de l'element a.

és a dir el determinant que resulta en eliminar la columna j-èsima i la fila i-èsima.

Anomenem adjunt d'a_{ij} a $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Aquestes definicions ens permeten expressar de manera simplificada la propietat següent, que també es podria prendre com una definició recurrent de determinant, alternativa a la que hem proposat a l'inici de la secció —només cal definir $|a_{11}| = a_{11}$—:

$$\det(a_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kp} A_{kp} = \sum_{k=1}^{n} a_{pk} A_{pk} \,.$$

És a dir que per calcular un determinant fem la tria d'una columna o fila —p-èsima— multipliquem cadascun dels seus elements pel seu adjunt i sumem tots els productes que en resulten. Segons actuem d'una manera o de l'altra diem que estem desenvolupant el determinant per la columna p o per la fila p.

Exemple 18
Siguin $a \in \mathbb{R}$ i la matriu $M = \begin{pmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{pmatrix}$.
Càlcul de x per tal que la matriu M tingui rang igual a 3.

$$\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{vmatrix} x+2a & a & a \\ x+2a & x & a \\ x+2a & a & x \end{vmatrix} \overset{(**)}{=} \begin{vmatrix} x+2a & a & a \\ 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} \overset{(***)}{=} (x+2a)(x-a)^2.$$

$(*)$ $C_1 + C_2 + C_3 \longrightarrow C_1$. (Teorema 13e.)
$(**)$ $F_2 - F_1 \longrightarrow F_2$ i $F_3 - F_1 \longrightarrow F_3$. (Teorema 13eg.)
$(***)$ Apliquem la regla de Sarrus.
Conseqüentment,

$$r(M) = 3 \overset{(****)}{\Longleftrightarrow} (x+2a)(x-a)^2 \neq 0 \Longleftrightarrow \boxed{x \neq -2a \ \text{ i } \ x \neq a}\,.$$

$(****)$ Pel teorema 13h. □

3.5 Aplicació a la resolució de sistemes

3.5.1 Sistemes amb solució única (Regla de Cramer)

Suposem que tenim el sistema $(a_{ij})\,(x_j) = (b_i)$, $1 \leq i, j \leq n$, compatible determinat. Això equival a $r(a_{ij}) = n$ i també a que $\det(a_{ij}) \neq 0$. Llavors, si $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ és la solució, podem escriure —amb la notació de la secció 2.4—:

$$s_1 A_1 + s_2 A_2 + \cdots + s_n A_n = B \,.$$

Conseqüentment, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, per les propietats dels determinants

$$\begin{aligned} \det\left(A_1, \ldots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \ldots, A_n\right) &= \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot \det\left(A_1, \ldots, A_{j-1}, A_i, A_{j+1}, \ldots, A_n\right) = \\ &= s_j \cdot \left(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_n\right) = s_j \cdot \det\left(a_{ij}\right) \,, \end{aligned}$$

en què podem aïllar s_j i obtenim la *regla de Cramer*:

$$s_j = \frac{\det(A_1, \ldots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \ldots, A_n)}{\det(a_{ij})}, \quad 1 \leq j \leq n\,.$$

Exemple 19
Resolució del sistema $\left\{\begin{aligned} 3x - y + z &= 0 \\ x + y + z &= 1 \\ 2x - y - z &= 2 \end{aligned}\right.$

Observem que el sistema és compatible determinat. Efectivament,
$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Longrightarrow r(A) = r(A|B) = 3 \Longrightarrow$ solució única. Per tant:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-6}{-6} = 1\,, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}\,, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2}$$

□

3.5.2 Sistemes indeterminats

Sigui $r = r(A) < n =$ nombre d'incògnites i $m =$ nombre d'equacions. Un cop eliminades les $m - r$ equacions dependents, i convertides en paràmetres les $n - r$ incògnites x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n, corresponents a les columnes dependents tenim

$$\left.\begin{aligned} x_{r+1} &= \lambda_1 \\ &\vdots \\ x_n &= \lambda_n \end{aligned}\right\}, \quad \text{en què } \lambda_j \in \mathbb{R} \quad \text{i} \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r &= b_1 - \sum_{j=r+1}^{n} a_{1j}\lambda_j \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r &= b_r - \sum_{j=r+1}^{n} a_{rj}\lambda_j\,. \end{aligned}$$

Llavors, per a cada elecció de les λ_j, el sistema de la dreta és compatible determinat de rang r, i podem aplicar la regla de Cramer per a la seva resolució.

Exemple 20
Resolució del sistema $\left\{\begin{aligned} 3x - y + z &= 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}\right.$

$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow$ les columnes $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ són l.i. i $r = 2 < 3 =$ nombre d'incògnites.
Per tant, la columna de coeficients de les z depèn de les dues primeres columnes i, per a cada elecció del paràmetre $z = \lambda \in \mathbb{R}$, tenim el sistema compatible determinat de rang 2

$\left\{\begin{aligned} 3x - y &= -\lambda \\ x + y &= 1 - \lambda. \end{aligned}\right.$ Finalment, si apliquem Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{2}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -\lambda \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{4} - \frac{\lambda}{2}, \qquad z = \lambda\,.$$

3.6 Determinants i rang d'una matriu

Existeix una tècnica que permet trobar ràpidament el rang d'una matriu a partir del càlcul de determinants. La relació entre el rang d'una matriu i el càlcul de determinants la hem trobat d'una manera implícita en els exercicis d'introducció de la teoria de determinants de la secció 3.1. D'altra banda la penúltima propietat de la teoria de determinants presentada en el teorema 13 serà clau per a l'establiment d'aquesta relació. El resultat fonamental d'aquesta secció és el teorema 16, el qual proporcionarà la tècnica anunciada.

Definició 25 *Donada una matriu A d'ordre $m \times n$, triem k columnes i k files d'A. El determinant de la matriu que té per coeficients, els coeficients d'A que alhora pertanyen a cadascuna de les files i columnes escollides, rep el nom de menor d'ordre k de la matriu A.*

Teorema 14 *$C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_k}$ són columnes independents de la matriu $(c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ $\Longleftrightarrow$ Existeix un menor d'ordre k, diferent de zero, en les columnes $C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_k}$ de la matriu.*

Prova.
$\Longrightarrow$) $\begin{pmatrix} c_{1j_1} & \cdots & c_{1j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{mj_1} & \cdots & c_{mj_k} \end{pmatrix}$ té rang k, i per tant té k files linealment independents. Llavors existeixen k files —que ocupen els llocs $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k$— tals que, per l'última propietat dels determinants proposada en el teorema 13,

$$\det \begin{pmatrix} c_{i_1j_1} & \cdots & c_{i_1j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i_kj_1} & \cdots & c_{i_kj_k} \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

$\Longleftarrow$) Si existeix un menor, d'ordre k, diferent de zero, les columnes corresponents de la matriu (c_{ij}) seran linealment independents. Si no fos així, la relació de dependència que hi hauria entre elles també valdria per aquestes columnes en la matriu del menor i, conseqüentment, aquest seria nul, la qual cosa és contradictòria. □

Teorema 15 *En una matriu A existeix un menor, d'ordre k, diferent de zero i tots els d'ordre $k+1$ són nuls $\Longleftrightarrow$ $r(A) = k$.*

Prova. $\Longrightarrow$) Pel teorema 14 hi haurà k columnes linealment independents, això implica que $r(A) \geq k$. Ara bé $r(A) > k$ no pot ser, perquè si això passés hi hauria $k+1$ columnes linealment independents i, per tant algun menor d'ordre $k+1$ diferent de zero, la qual cosa va contra la hipòtesi.
$\Longleftarrow$) $r(A) = k \Longrightarrow$ existeixen k columnes linealment independents, això implica que existeix un menor d'ordre k no nul. D'altra banda si n'existís algun d'ordre $k+1$ diferent de zero, hi hauria $k+1$ columnes linealment independents i seria $r(A) > k$, la qual cosa és una contradicció. □

Definició 26

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\;B\;} & \cdots & \boxed{} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ \boxed{} & \cdots & \Box & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}}_{A}$$

Donada una matriu A i un menor $M = \det(B)$, orlar el menor M significa construir un altre menor afegint a cada fila de B un element de la mateixa fila en A, de manera que tots els elements afegits estiguin en la mateixa columna en A; i a la matriu resultant, afegir a cada columna un element de la mateixa columna en A, de manera que tots els elements afegits siguin de la mateixa fila en A.

Exemple 21
Construcció d'una orla i càlcul del nombre d'orles del menor que s'indica en la matriu:

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & \boxed{4} & 1 & \boxed{0} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per construir una orla afegim a cada fila del menor, l'element corresponent de la primera columna, i a cada columna resultant l'element corresponent de la segona fila:

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & \boxed{4} & 1 & \boxed{0} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ \boxed{1} & \boxed{4} & 1 & \boxed{0} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{3} & -1 & \boxed{2} \\ \boxed{1} & \boxed{4} & 1 & \boxed{0} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Així l'orla és $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3$. En ser el nombre de columnes disponibles igual a 2 i el nombre de files disponibles igual a 2, el nombre d'orles que es poden construir serà $2 \cdot 2 = 4$. □

Teorema 16 *En una matriu $A = (a_{ij})$ existeix un menor, d'ordre k, no nul i qualsevol menor d'ordre $k+1$, que resulta d'orlar l'anterior, és nul $\Longleftrightarrow r(A) = k$.*

Prova. $\Longrightarrow$) El rang d'una matriu no canvia en variar l'ordre de les seves files o columnes. Per tant podem suposar que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Si orlem aquest menor, per a cada columna $C_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj}),\ j > k$, es compleix que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{p1} & \cdots & a_{pk} & a_{pj} \end{vmatrix} = 0\,, \text{ sempre que } k+1 \leq p \leq n.$$

Això implica que $\quad r\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{kj} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{nj} \end{pmatrix} = k.$

Consegüentment cada columna C_j, tal que $j > k$, és combinació lineal de les k primeres columnes. Llavors, es pot establir que no hi pot haver $k+1$ columnes linealment independents.[8] Per tant, $r(A) = k$.

$\Longleftarrow$) És immediat pel teorema 15. □

Exemple 22

Economia de càlcul proporcionada per l'ús de la tècnica d'orlar.

En una matriu d'ordre $m \times n$ el nombre de menors d'ordre $k+1$ és $\binom{m}{k+1} \cdot \binom{n}{k+1}$, i si existeix un menor d'ordre k no nul, el nombre de les seves orles, d'ordre $k+1$, és $(m-k)\cdot(n-k)$. La diferència entre les dues quantitats ens dóna una mesura de l'estalvi d'operacions en el càlcul del rang, en el pitjor dels casos. Per exemple, si $m = 4$, $n = 4$ i $k = 2$, llavors $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} - 2 \cdot 2 = 16 - 4 = 12$. □

Exemple 23

Càlcul del rang de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & -4 & 8 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

Considerem el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Si orlem amb la tercera columna i la tercera fila i, després, amb la quarta columna i la tercera fila, obtenim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Però, amb la cinquena columna i la tercera fila obtenim

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Per tant el rang de la matriu és 3. Això implica que no hi ha relacions de dependència entre les files i que les columnes tercera, quarta i sisena són combinació lineal de la primera, segona i cinquena. □

[8] La demostració d'aquesta afirmació és complexa i es pot dur a terme en les etapes següents:
– Suposar que hi pot haver $k+1$ columnes linealment independents.
– Provar per inducció que alguna d'aquestes columnes és combinació lineal de les altres, la qual cosa contradiu la suposició de sortida.

En general, entre totes les columnes (o files) que poden ser generades per un nombre finit k de columnes (o files), mai se'n poden trobar més de k linealment independents.

4 Nota històrica. Un descobriment de Gauss

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855), nascut a Brunswick (Alemanya), va ser un dels més grans matemàtics del seu temps. El rei de Hannover va fer encunyar monedes en què es qualificava Gauss com *Princeps mathematicorum*, títol amb el qual encara se'l reconeix. De petit ja demostrava la seva especial aptitud davant els seus mestres amb exemples com el càlcul de la suma dels cent primers nombres naturals en pocs segons i sense necessitat de paper. Prova de l'excel·lència del seu enginy és un dels seus primers grans descobriments que va fer, segons consta en el seu diari, el 30 de març de 1796, un mes abans de complir els 19 anys. Va consistir en resoldre una qüestió plantejada feia més de dos mil anys pels geòmetres grecs i contra la qual els matemàtics havien fracassat fins aquell moment. Tot i que no té relació amb el tema estudiat aquí, la presento com un homenatge a la seva figura i pel paral·lelisme entre l'edat de Gauss quan va fer el seu descobriment i les edats dels estudiants d'aquestes pàgines. Es tracta de la construcció del heptadecàgon regular amb un regle sense marques i un compàs. Pocs anys després, l'any 1801, en el seu tractat de teoria de nombres escrit en llatí, el qual va titular *Disquisitiones Arithmeticae*,[9] va incloure el descobriment amb la demostració inclosa de quins eren tots els polígons regulars construïbles amb regle i compàs. Aquests havien de tenir un nombre de costats igual a 2^n amb $n \geq 2$, o bé igual a $2^n \cdot p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdots p_{i_s}$ amb $n \geq 0,\ s \geq 1$, en què els nombres p_{i_j} eren *primers de Fermat* no repetits. Aquests primers són nombres que tenen la forma

$$p_k = 2^{2^k} + 1 \quad \text{on} \quad k \geq 0.$$

Reben aquest nom perquè PIERRE DE FERMAT, l'agost del 1640, va conjecturar que tots ells eren primers dient:

> No en tinc la demostració exacta però he exclòs tan gran quantitat de divisors per demostracions infalibles, i tinc proves tan clares que estableixen la meva opinió que seria penós dedicar-m'hi.

L'any 1739, LEONHARD EULER va enderrocar la conjectura de Fermat quan va demostrar que

$$p_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417.$$

De fet només es coneixen cinc primers de Fermat, i no se sap si n'hi han més:

$$p_0 = 3 \quad p_1 = 5 \quad p_2 = 17 \quad p_3 = 257 \quad p_4 = 65537.$$

Per fer-nos una idea de si hi ha "molts" o "pocs" polígons regulars construïbles, l'afirmació de Gauss ens permet d'assegurar que, per exemple, amb un nombre de costats menor que 65538 només n'hi ha 137.

[9] Existeix una traducció catalana feta per GRISELDA PASCUAL†, fins fa pocs anys professora titular d'Àlgebra de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, editada per l'Institut d'Estudis Catalans l'any 1996.

Índex