

# L'algorithm d'Euclides

Departament de Matemàtiques  
IES Pons d'Icart

Euclides [300 aC], en la seva obra *Elements*, dedica els llibres 7, 8 i 9 a l'Aritmètica, tot i que la tracta amb llenguatge geomètric. Representa els nombres amb segments, i substitueix els termes  $a$  divideix  $b$  i  $b$  és múltiple d' $a$ , per  $a$  mesura  $b$  i  $b$  és mesurat per  $a$ . En el llibre 7 presenta dos teoremes que proporcionen un mètode per al càlcul del màxim comú divisor de dos nombres. Essencialment, afirma que el màxim comú divisor de dos nombres és igual al màxim comú divisor del menor d'ells i el residu de la divisió del major entre el menor. Això proporciona un algoritme per al seu càlcul. Observem un exemple:

## Càlcul del màxim comú divisor de 495 i 88.

Si fem la divisió entre el nombre menor i el residu obtenim successivament

$$\begin{array}{r} 495 \overline{)88} \quad 88 \overline{)55} \quad 55 \overline{)33} \quad 33 \overline{)22} \quad 22 \overline{)11} \\ 55 \quad 5 \quad 33 \quad 1 \quad 22 \quad 1 \quad 11 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \end{array}$$

Per tant,

$$\text{mcd}(495, 88) = \text{mcd}(88, 55) = \text{mcd}(55, 33) = \text{mcd}(33, 22) = \text{mcd}(22, 11) = 11.$$

S'acostuma a disposar els nombres implicats en el desenvolupament de l'algorithm d'una manera més abreujada en tres files. La superior per als quocients, la del mig per als successius dividend i divisor i la de sota per als residus. Així en el nostre exemple escriuríem:

	5	1	1	1	2
495	88	55	33	22	11
55	33	22	11	0	

 $\implies \text{mcd}(495, 88) = 11$

## Activitats

1. Calculeu: a)  $\text{mcd}(299, 221)$ .      b)  $\text{mcd}(7425, 1275)$ .
2. Demostreu que el màxim comú divisor de dos nombres és igual al màxim comú divisor del menor d'ells i el residu de la divisió del major entre el menor.
3. Considereu quatre parelles de nombres (les que vulgueu) i calculeu els productes dels respectius **mcd** i **mcm**. Tenen alguna relació amb els respectius productes de les parelles inicials?
4. Cerqueu el mínim nombre de rajoles quadrades amb les quals puc enrajolar una habitació de  $2.34 \text{ m} \times 4.29 \text{ m}$ , sense trencar les rajoles.
5. Quin és el màxim comú divisor del numerador i el denominador d'una fracció irreducible? Per què?
6. Esbrineu si existeix algun rectangle que no es pugui recobrir amb quadrats posats un al costat de l'altre de manera no se solapin ni sobrepassin la frontera del rectangle.

