Potència d'un binomi

Binomi de Newton

RAMON NOLLA
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

1 Introducció

Hi ha ocasions en què té interès el treball amb el desenvolupament de la potència d'un binomi, o amb l'expressió simplificada d'un polinomi en funció de la potència d'un binomi. Un dels problemes que il·lustren aquesta qüestió és el de l'elaboració d'un algoritme d'extracció d'arrels. Aquest sembla ser, també, un dels problemes que originà, no més tard del segle XI, l'estudi de la presentació del desenvolupament d'un binomi sotmès a una potència natural qualsevol en les civilitzacions àrab i xinesa, i possiblement en la civilització índia.[1] En les seccions que segueixen veurem que si, per a dos nombres naturals $1 \leq k \leq n$, representem la fracció

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k) \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 2 \cdot 1} \tag{1}$$

mitjançant l'expressió $\binom{n}{k}$, i fem $\binom{n}{0} = 1$, llavors, es pot escriure

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n, \tag{2}$$

Per exemple,

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= 1\, a^4 + \frac{4}{1}\, a^3\, b + \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}\, a^2\, b^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1}\, a\, b^3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}\, b^4 = \\
&= a^4 + 4\, a^3\, b + 6\, a^2\, b^2 + 4\, a\, b^3 + b^4
\end{aligned}$$

Hi ha indicis prou seriosos que fan pensar que aquest desenvolupament era conegut, —per a $n = 2$—, en el període babiloni antic (2000–1500 aC)[2] i, —per a $n > 2$—, als voltants del segle XI en les civilitzacions de l'Est. Malgrat l'antiguitat d'aquest coneixement en la cultura oriental, de manera sovint avui aquest desenvolupament s'anomena *fórmula del binomi de Newton*. Evidentment, sir Isaac Newton (1643–1727) no en va ser el descobridor però va ser capaç d'estendre la fórmula de la potència d'un binomi per al cas que l'exponent fos un nombre racional positiu o negatiu, —i aquí sí, que el nom de la fórmula és adequat—, la qual cosa li serví per crear una nova anàlisi de funcions. Concretament, després d'estudiar els treballs sobre càlcul d'àrees en l'*Arithmetica Infinitorum* de Wallis (1616–1703), seguí amb

[1] Per a l'estudi d'un exemple concret d'extracció d'arrels vegeu l'apèndix 4.1.
[2] Vegeu l'apèndix 4.2.

les investigacions d'aquest i descobrí que si considerava $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{N}$, i definia, de manera similar a (1),

$$\binom{\frac{m}{n}}{k} = \frac{\frac{m}{n} \cdot \left(\frac{m}{n} - 1\right) \cdot \left(\frac{m}{n} - 2\right) \cdots \left(\frac{m}{n} - k + 1\right)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 1} \tag{3}$$

i feia $\binom{\frac{m}{n}}{0} = 1$, llavors, podia expressar $(1+x)^{\frac{m}{n}}$ com la suma infinita[3]

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = \binom{\frac{m}{n}}{0} + \binom{\frac{m}{n}}{1} x + \cdots + \binom{\frac{m}{n}}{k} x^k + \cdots \ . \tag{4}$$

Aquesta expressió li resulta molt útil, entre d'altres coses, de cara al càlcul d'àrees "sota" funcions logarítmiques, trigonomètriques, etc. Il·lustrarem aquesta utilitat amb un càlcul més senzill. Aproximarem el valor de $\sqrt[3]{10}$,

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{10} &= \sqrt[3]{8+2} = \sqrt[3]{8\left(1+\frac{2}{8}\right)} = 2 \cdot \sqrt[3]{1+\frac{1}{4}} = \\
&= 2 \cdot \left(1 + \frac{\frac{1}{3}}{1} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots\right) \approx \\
&\approx 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{144} + \frac{5}{5184}\right) = 2 \cdot \frac{5585}{5184} = 2.15470\,\overline{679012345}.
\end{aligned}$$

Si tenim en compte que els primers dígits de $\sqrt[3]{10}$ són 2.15443, en l'aproximació amb quatre sumands del binomi de Newton hem comès un error menor que $3 \cdot 10^{-4}$.

2 Desenvolupament de $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{\mathbf{n}}$

Desenvoluparem l'expressió $(a+b)^n$ per als primers nombres n naturals i mirarem de trobar una pauta per al càlcul dels coeficients i de les parts literals que en resultin.

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= \boxed{1} \\
(a+b)^1 &= \boxed{a+b} \\
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = (a^2+ab)+(ab+b^2) = \boxed{a^2+2\,a\,b+b^2} \\
(a+b)^3 &= (a^2+2\,a\,b+b^2)(a+b) = (a^3+2\,a^2\,b+a\,b^2)+(a^2\,b+2\,a\,b^2+b^3) = \\
&= \boxed{a^3+3\,a^2\,b+3\,a\,b^2+b^3} \\
(a+b)^4 &= (a^3+3\,a^2\,b+3\,a\,b^2+b^3)(a+b) = \\
&= (a^4+3\,a^3\,b+3\,a^2\,b^2+a\,b^3)+(a^3\,b+3\,a^2\,b^2+3\,a\,b^3+b^4) = \\
&= \boxed{a^4+4\,a^3\,b+6\,a^2\,b^2+4\,a\,b^3+b^4} \\
(a+b)^5 &= (a^4+4\,a^3\,b+6\,a^2\,b^2+4\,a\,b^3+b^4)(a+b) = \\
&= \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&= \boxed{a^5+5\,a^4\,b+10\,a^3\,b^2+10\,a^2\,b^3+5\,a\,b^4+b^5}
\end{aligned}$$

[3]Vegeu l'apèndix 4.3

- **Part literal** S'observa que el terme a apareix afectat d'un exponent que decreix una unitat des del primer a l'últim sumand, essent el primer exponent l'exponent del binomi i l'últim igual a zero. Amb el terme b passa el mateix però en sentit creixent. Així, si l'exponent del binomi fos $n = 6$ i se seguís la mateixa pauta tindríem

$$(a+b)^6 = \square\, a^6 + \square\, a^5\, b + \square\, a^4\, b^2 + \square\, a^3\, b^3 + \square\, a^2\, b^4 + \square\, a\, b^5 + \square\, b^6,$$

en què falta posar els coeficients en els requadres.

- **Coeficients** Podem disposar els coeficients en una estructura triangular de manera que en cada fila apareguin, en l'ordre del desenvolupament anterior, els corresponents a cada exponent. D'aquesta manera, resulta la configuració[4]

$$\begin{array}{llccccccccccccc}
 & & & & & & & & & \mathrm{D}_0 & & & & & \\
 & & & & & & & & \swarrow & & \mathrm{D}_1 & & & & \\
\text{Fila 0} & \longleftrightarrow & & & & & & 1 & & \swarrow & & \mathrm{D}_2 & & & \\
\text{Fila 1} & \longleftrightarrow & & & & & 1 & & 1 & & \swarrow & & \mathrm{D}_3 & & \\
\text{Fila 2} & \longleftrightarrow & & & & 1 & & 2 & & 1 & & \swarrow & & \mathrm{D}_4 & \\
\text{Fila 3} & \longleftrightarrow & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \swarrow & & \mathrm{D}_5 \\
\text{Fila 4} & \longleftrightarrow & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \swarrow & \\
\text{Fila 5} & \longleftrightarrow & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & &
\end{array}$$

És pot trobar una pauta en la construcció de les files, la qual estendrem a la construcció del nombre de files que desitgem. Partirem de dues propietats fàcilment observables,

[**A.**] Els valors extrems de cada fila valen 1.

[**B.**] La suma de dos termes consecutius en una fila genera el terme de la fila següent adjacent als dos.

Llavors, la Fila 6 seria

$$\text{Fila 6} \longleftrightarrow 1 \quad \underset{6}{\underset{\|}{\underbrace{1+5}}} \quad \underset{15}{\underset{\|}{\underbrace{5+10}}} \quad \underset{20}{\underset{\|}{\underbrace{10+10}}} \quad \underset{15}{\underset{\|}{\underbrace{10+5}}} \quad \underset{6}{\underset{\|}{\underbrace{5+1}}} \quad 1$$

El triangle construït d'aquesta manera l'anomenem *triangle aritmètic*. A partir dels seus coeficients es poden conjecturar els successius desenvolupaments de $(a+b)^n$. Per exemple,

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5\, b + 15\, a^4\, b^2 + 20\, a^3\, b^3 + 15\, a^2\, b^4 + 6\, a\, b^5 + b^6,$$

[4]Aquesta configuració rep el nom de *Triangle de Pascal* encara que els seus coeficients eren coneguts pels matemàtics indis, —Pingala (II aC)—, per la seva relació amb problemes combinatoris. La configuració en forma de triangle és descrita per Halayudha (X–XI). Yang Hui (XIII) quan comenta els *Nou capítols sobre l'art matemàtic* (abans II) diu que Jia Xian (XI) inventa un diagrama ,—el triangle aritmètic—, que usa per a l'extracció d'arrels d'ordre superior a 2. A l'apèndix 4.4 en presentem un fragment que hem dissenyat a partir d'una reproducció del *Yongle dadian* (1407), —*Gran Enciclopèdia del període-regen Yongle*—, que es mostra a *Histoire des mathématiques chinoises*, 1987 de Martzloff.

Els nombres que configuren el triangle reben el nom de *coeficients binomials* i es representen per qualsevol dels símbols

$$C_{n,k} \qquad\qquad C_n^k \qquad\qquad \binom{n}{k},$$

en què $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ és el nombre de la Fila n, i $k \in \{0, 1, 2, , \ldots\}$ és el nombre de la diagonal D_k. Amb aquesta notació, les propietats que proporcionaven la construcció del triangle es poden presentar així:

[A.] $\displaystyle\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}.$

[B.] $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},\ \forall n, k \in \mathbb{N}$, tals que $n \geq 1,\ k \leq n-1$.

De tot el que hem dit en resulta la conjectura següent, per al desenvolupament del binomi, que trobareu demostrada a l'apèndix:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n, \tag{5}$$

la qual es presenta amb la notació

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k. \tag{6}$$

3 Valor dels coeficients binomials

Es tracta de trobar una expressió tancada, no recurrent, per al càlcul del valor de qualsevol coeficient binomial. En el seu *Traité du triangle aritmhétique* 1665, Pascal proporciona una propietat que li permet solucionar aquesta qüestió. Concretament, divideix cada terme $\binom{n}{k}$ de cada fila, a partir de la fila 1, pel terme $\binom{n}{k-1}$ que el precedeix. D'aquesta manera es configura el triangle equivalent de la dreta,

Fila $n \geq 1$		$\binom{n}{k},\ k \geq 0$		$\binom{n}{k} / \binom{n}{k-1},\ k \geq 1$		$\binom{n}{k} / \binom{n}{k-1},\ k \geq 1$ equivalent
1	$\longleftrightarrow$	1 1	$\longrightarrow$	$\frac{1}{1}$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{1}$
2	$\longleftrightarrow$	1 2 1	$\longrightarrow$	$\frac{2}{1}$ $\frac{1}{2}$	$\longrightarrow$	$\frac{2}{1}$ $\frac{1}{2}$
3	$\longleftrightarrow$	1 3 3 1	$\longrightarrow$	$\frac{3}{1}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\longrightarrow$	$\frac{3}{1}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{1}{3}$
4	$\longleftrightarrow$	1 4 6 4 1	$\longrightarrow$	$\frac{4}{1}$ $\frac{6}{4}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{1}{4}$	$\longrightarrow$	$\frac{4}{1}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$
5	$\longleftrightarrow$	1 5 10 10 5 1	$\longrightarrow$	$\frac{5}{1}$ $\frac{10}{5}$ $\frac{10}{10}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{1}{5}$	$\longrightarrow$	$\frac{5}{1}$ $\frac{4}{2}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{5}$
...		...		...		...

en què els coeficients, —per a $n \geq 1, k \geq 1$—,valen

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\text{posició de } \binom{n}{k} \text{ en la fila } n \text{ des de la dreta}}{\text{posició de } \binom{n}{k-1} \text{ en la fila } n \text{ des de l'esquerra}}. \tag{7}$$

És a dir, hem trobat la propietat

[E.] $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$, $\forall n, k \in \mathbb{N}$, tals que $n \geq 1,\ 1 \leq k \leq n$.

Llavors, si considerem un parell d'exemples dels coeficients dels triangles, es pot conjecturar una fórmula tancada per al càlcul de $\binom{n}{k}$. Només cal observar que cada coeficient binomial és el producte del quocients generats en la seva fila, des de l'esquerra, fins arribar al seu lloc.

$$\frac{5}{1}\cdot\frac{10}{5}\cdot\frac{10}{10} = \frac{\cancel{5}}{1}\cdot\frac{\cancel{10}}{\cancel{5}}\cdot\frac{10}{\cancel{10}} = 10 = \binom{5}{3} \Longrightarrow \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = \binom{5}{3}$$
$$\frac{4}{1}\cdot\frac{6}{4} = \frac{\cancel{4}}{1}\cdot\frac{6}{\cancel{4}} = 6 = \binom{4}{2} \Longrightarrow \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = \binom{4}{2}$$

O sigui que per a $\binom{n}{k}$ tenim una fracció de numerador i denominador formats per k factors amb valors que disminueixen d'unitat en unitat. En el numerador, el factor més gran és n i en el denominador és k. Per tant, l'últim factor del numerador és $n-(k-1)$ i el del denominador és 1. Així tenim[5]

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+2)\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdots 2\cdot 1}\,. \tag{8}$$

Si es vol establir aquest resultat d'una manera rigorosa caldrà:

a) Demostrar la igualtat [E.] per inducció.

b) A partir de la igualtat [E.] aplicada de manera recurrent demostrar la igualtat (8).

Aquestes demostracions es troben a l'apèndix en què també s'han demostrat i utilitzat dues propietats dels coeficients binomials que es poden observar directament sobre el triangle, els valors de la diagonal D_1 i la simetria respecte a la columna central de coeficients. És a dir,

[C.] $\displaystyle\binom{n}{1} = n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

[D.] $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\forall n, k \in \mathbb{N}$, tals que $k \leq n$.

---

[5]Recordem que es defineix el *factorial* de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, com $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$. Llavors, el valor dels coeficients binomials es pot presentar en forma factorial com,

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+2)\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdots 1}{k\cdot(k-1)\cdots 2\cdot 1\cdot(n-k)\cdots 1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,,$$

la qual també és vàlida per a $n = k = 0$, si considerem $0! = 1$.

4 Apèndix

4.1 Càlcul d'arrels

El cas més senzill és el de l'extracció d'arrels quadrades. Suposem que volem calcular $\sqrt{5921}$. Veurem de quina manera ens pot ajudar a trobar un algoritme el desenvolupament

$$(x+y)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot y + y^2.$$

És evident que $10^2 < 5921 < 100^2 \Longrightarrow 10 < \sqrt{5921} < 100$. Per tant,[6]

$$\mathrm{E}\left[\sqrt{5921}\right] = a\cdot 10 + b, \quad \text{en què } a, b \in \mathbb{Z},\ 0 < a < 10,\ 0 \leq b < 10.$$

Això implica que

$$59\cdot 10^2 + 21 \geq (a\cdot 10 + b)^2 = a^2\cdot 10^2 + 2\cdot a\cdot 10\cdot b + b^2 = a^2\cdot 10^2 + (2\cdot a\cdot 10 + b)\cdot b.$$

O sigui que $a^2 \leq 59$ i, per tant, $a = 7$. Tenim,

$$\begin{array}{rcl}
a = 7 & \Longrightarrow & 5921 \geq (7\cdot 10)^2 + (2\cdot 7\cdot 10 + b)\cdot b = 4900 + (2\cdot 7\cdot 10 + b)\cdot b \Longrightarrow \\
& \Longrightarrow & 5921 - 4900 = 1021 \geq (2\cdot 7\cdot 10 + b)\cdot b = 14b\cdot b \Longrightarrow b \leq 7, \\
& & (b = 7 \text{ no funciona perquè } 147\cdot 7 = 1029 > 1021) \\
b = 6 & \Longrightarrow & 1021 = 146\cdot 6 + 145 = 876 + 145 \Longrightarrow \\
& \Longrightarrow & 5921 = 4900 + 1021 = 4900 + 876 + 145 = 70^2 + (2\cdot 7\cdot 10 + 6)\cdot 6 + 145.
\end{array}$$

Per tant,

$$5921 = \left[70^2 + 2\cdot(7\cdot 10)\cdot 6 + 6^2\right] + 145 = (70+6)^2 + 145 = 76^2 + 145.$$

O sigui que

$$\mathrm{E}\left[\sqrt{5921}\right] = 76.$$

Tot aquest procediment es pot resumir en l'esquema següent, en què a la part dreta es mostra el paper que ha tingut el desenvolupament de $(a\cdot 10 + b)^2 = (7\cdot 10 + 6)^2$:

$$\begin{array}{r|c|r|l}
\sqrt{\;5\,9\,|\,2\,1} & 7 & & \\
-\ 4\,9 & & 7^2 = \ 49 & (7\cdot 10)^2 = 4900 \\
\hline
1\,0\,2\,1 & 6 & & \\
-\ 8\,7\,6 & & 146\cdot\ 6 = 876 & 2\cdot(7\cdot 10)\cdot 6 = 840 \\
\hline
1\,4\,5 & & & 6^2 = 36\,.
\end{array}$$

[6] Es tracta d'aproximar per defecte, amb el nombre més gran possible, el valor de l'arrel. Per presentar el problema fem una aproximació entera, per això fem ús de la funció $\mathrm{E}[x]$ = *part entera* d'un nombre x.

Aquest esquema se sol presentar en la forma més abreujada

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{5\,9|2\,1} & 76 \\ \hline 1\,0\,2\,1 & 146\cdot 6 \\ 1\,4\,5 & \end{array}$$

Per al càlcul d'arrels d'ordre superior es podria trobar una línia d'actuació emmarcada pel desenvolupament de binomis de grau superior. Per exemple, si tenim en compte que

$$(x+y)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot y + 3\cdot x\cdot y^2 + y^3,$$

presentem un primer esquema que podeu mirar d'interpretar i on es mostra que[7]

$$E\left[\sqrt[3]{73542016}\right] = 418 \quad \text{i} \quad 73542016 = 418^3 + 507384.$$

$$\begin{array}{r||l|lcr}
7\,3|\,5\,4\,2|0\,1\,6 & 4 & & & \\
-\,6\,4 & & 4^3 & = & 64 \\ \hline
9\,5 & 1 & & & \\
-\,4\,8 & & 3\cdot 1\cdot 4^2 & = & 48 \\
4\,7\,4 & & & & \\
-\,1\,2 & & 3\cdot 1^2\cdot 4 & = & 12 \\
4\,6\,2\,2 & & & & \\
-\,1 & & 1\cdot 1^3 & = & 1 \\ \hline
4\,6\,2\,1\,0 & 8 & & & \\
-\,4\,0\,3\,4\,4 & & 3\cdot 8\cdot 41^2 & = & 40344 \\
5\,8\,6\,6\,1 & & & & \\
-\,7\,8\,7\,2 & & 3\cdot 8^2\cdot 41 & = & 7872 \\
5\,0\,7\,8\,9\,6 & & & & \\
-\,5\,1\,2 & & 1\cdot 8^3 & = & 512 \\
5\,0\,7\,3\,8\,4 & & & &
\end{array}$$

4.2 El quadrat d'un binomi a l'antiga Babilònia

A partir de l'any 1857 i, d'una manera molt exhaustiva, en la primera meitat del segle XX es van desxifrar centenes de milers de tauletes de fang cobertes de signes cuneïformes elaborades des dels voltants del 3000 aC a la vall situada entre els rius Tigris i Éufrates (*Mesopotàmia*). Una gran majoria de les transcripcions i traduccions de textos matemàtics inscrits en les tauletes es troben a l'obra d'Otto Neugebauer, *Mathematische Keilschrifttexte*[8], 1935-37. En el volum III, pàg 8, es presenta el següent problema:[9]

[7] La exposició sencera la trobareu a R. Nolla, *Estudis i activitats sobre problemes clau de la Història de la Matemàtica*, 2001, secció 4.3.2, que podeu despenjar de `http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/Estudis/Estudis.asp`. o bé l'edició de la Societat Catalana de Matemàtiques, Barcelona, 2006, a l'apartat de Publicacions de l'adreça `http://www.iecat.net/institucio/societats/SCMatematiques/index.asp`.

[8] Textos matemàtics d'escriptura cuneïforme.

[9] Referència i anàlisi extreta de B.L. Van der Waerden, *Science Awakening*, Oxford University Press, 1961, 68-69, i I. Bashmakova, G. Smirnova, *The Beginnings & Evolution of Algebra*, The Mathematical Association of America, 2000, 6-7.

He sumat les àrees dels meus dos quadrats: 25,25. (El costat d)el segon quadrat és $\frac{2}{3}$ del costat del primer més 5 GAR.[10]

En la resolució que dóna el text s'hi troben els càlculs en numeració sexagesimal, —hem afegit el desenvolupament entre els claudàtors—,

$$
\begin{aligned}
a &= 1 + (0;40)^2 = \left[1 + \left(\frac{40}{60}\right)^2 = 1 + \frac{1600}{60^2} = 1 + \frac{26 \cdot 60 + 40}{60^2} = 1 + \frac{26}{60} + \frac{40}{60^2}\right] = \\
&= 1;26,40 \\
b &= 5 \cdot 0;40 = \left[5 \cdot \frac{40}{60} = \frac{200}{60} = 3 + \frac{20}{60}\right] = \\
&= 3;20 \\
c &= 25,25 - 5^2 = [(25 \cdot 60 + 25) - 25 = 25 \cdot 60] = \\
&= 25,0\,.
\end{aligned}
$$

A continuació calcula el costat del primer quadrat amb l'algoritme

$$a^{-1} \cdot \left(\sqrt{ac + b^2} - b\right),$$

i el del segon quadrat fent els dos terços del primer més 5. Si s'analitzen els càlculs de a, b i c, hi ha una certa evidència que s'han originat en substituir la informació de la relació entre els costats dels quadrats, en la informació de la suma dels quadrats i aplicar la fórmula del quadrat del binomi. Efectivament, si presentem en el nostre llenguatge algebraic la informació sobre els quadrats de costats x i y, tenim

$$
\begin{gathered}
x^2 + y^2 = 25,25 \\
y = 0;40 \cdot x + 5\,.
\end{gathered}
$$

Si substituïm la y de la segona equació en la primera i fem el desenvolupament del quadrat del binomi en resulten els càlculs de a, b i c que apareixen a la tauleta, la qual cosa permet conjecturar que l'autor del problema actuava amb aquest coneixement.

$$
\begin{aligned}
25,25 = x^2 + (0;40 \cdot x + 5)^2 &\implies 25,25 = x^2 + (0;40)^2 \cdot x^2 + 2 \cdot (5 \cdot 0;40) \cdot x + 5^2 \\
&\implies \underbrace{(1 + 0;40^2)}_{a} \cdot x^2 + 2 \cdot \underbrace{(5 \cdot 0;40)}_{b} \cdot x = \underbrace{25,25 - 5^2}_{c}
\end{aligned}
$$

Finalment, amb l'aplicació de l'algoritme de resolució de l'equació de segon grau, obtenen $x = 30$, i de la relació entre els costats dels quadrats obtenen $y = 25$.
Efectivament,

$$
\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{40^2}{60^2}\right) x^2 + 2\left(5 \cdot \frac{40}{60}\right) x = 25 \cdot 60 + 25 - 25 \iff \frac{5200}{3600} x^2 + \frac{400}{60} x = 1500 \\
&\iff 13x^2 + 60x = 13500 \implies x = a^{-1}\left(\sqrt{a \cdot c + b^2} - b\right) = \frac{\sqrt{13 \cdot 13500 + 30^2} - 30}{13} = 30.
\end{aligned}
$$

[10] Un GAR és una mesura de longitud igual a 12 *kúš* (colzes). Un *kúš* $\approx$ 50 cm. Les àrees estan expressades en SAR=quadrat d'un GAR de costat.

4.3 La fórmula del binomi a l'*Epistolae Prior*

El 13 de juny de 1676, Newton escriu a Oldenburg una carta, l'*Epistolae Prior*, per a Leibniz. En ella contesta una demanda que aquest últim havia fet a Oldenburg sobre les demostracions dels matemàtics anglesos de les igualtats

$$
\begin{aligned}
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 + \cdots .
\end{aligned}
$$

En ella es fa públic per primera vegada el desenvolupament de Newton per a la potència d'un binomi d'exponent racional. Ho fa d'una manera una mica diferent a la que hem presentat a la fórmula (4) de la introducció. Presentem el començament de la carta:

> Digníssim senyor
>
> Malgrat que la modèstia del Sr. Leibniz en els extractes de la seva carta que vostè fa poc em va enviar, elogia molt els nostres compatriotes per certes teories sobre sèries infinites de les quals ara es comença a sentir alguna cosa, no tinc cap dubte que ell hagi descobert no tan sols un mètode per reduir qualsevol quantitat a aquestes sèries, com ell assegura, sinó també diverses formes abreujades, potser semblants a les nostres, sinó fins i tot millors. No obstant, ja que sol·licita saber allò que ha sigut descobert pels anglesos en aquest tema, i en haver-ho estudiat jo mateix fa alguns anys, per satisfer en part els seus desitjos li transmeto algunes coses que s'em van acudir.
>
> Les fraccions poden ser reduïdes a sèries infinites per divisió i les quantitats radicals per extracció d'arrels, portant a terme aquestes operacions en la forma que sol fer-se amb els nombres decimals. Aquestes operacions són el fonament d'aquella reducció; però l'extracció d'arrels resulta molt abreujada per aquest teorema.
>
> $$\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c. \quad (9)$$
>
> En què $P+PQ$ significa la quantitat de la qual ha d'investigar-se l'arrel o bé una dimensió qualsevol o bé l'arrel de la dimensió, P el primer terme de la quantitat, Q la resta de termes dividits pel primer, i $\frac{m}{n}$ l'índex numèric de la dimensió de $P+PQ$, sigui dimensió entera, sigui (tal com dic) fraccionària, sigui afirmativa, sigui negativa. Ja que els analistes, en lloc de aa, aaa, etc., solen escriure a^2, a^3, etc.,[11] així jo per $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^5}$, etc., escric $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$, etc., i per $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$ escric a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}. I

[11] Aquesta notació va ser introduïda per Descartes a la seva *Géométrie*, 299 de l'edició de Leiden 1637, que la inclou com un dels tres assajos que acompanyen *Le Discours de la Méthode*. Per al cas d'exponent 2 utilitzen indistintament a^2 o aa, potser perquè en els dos casos calen dos signes i no hi ha economia de notació. A la carta de Newton hem trobat segons la versió utilitzada una notació o una altra, he seguit la de la versió presentada en *The correspondence of Isaac Newton*, II, 1960: 20-40.

així per $\dfrac{aa}{\sqrt{c:\overline{a^3+bbx}}}$ escric $aa\times\overline{a^3+bbx}|^{-\frac{1}{3}}$, i per $\dfrac{aab}{\sqrt{c:\overline{\overline{a^3+bbx}\times\overline{a^3+bbx}}}}$ escric $aab\times\overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$: en què l'últim cas si $\overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$ es concep ser $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}}$ en la Regla; serà $P=a^3$, $Q=\frac{bbx}{a^3}$, $m=-2$ i $n=3$. Finalment, per als termes trobats en el Quocient en operar, utilitzo A, B, C, D, etc., concretament, A pel primer terme $P^{\frac{m}{n}}$, B pel segon $\frac{m}{n}AQ$, i així successivament.

*Fragmentum *Epiſtolæ ad D.* Oldenburgium 13 Junii 1676 *miſſæ.*

FRactiones in Infinitas Series reducuntur per diviſionem; & quantitates radicales per extractionem radicum, perinde inſtituendo operationes iſtas in ſpeciebus ac inſtitui ſolent in decimalibus numeris. Hæc ſunt fundamenta harum reductionum; ſed extractiones radicum, multum abbreviantur per hoc *Theorema*.

$$\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c.$$

Ubi P + PQ ſignificat quantitatem cujus Radix, vel etiam dimenſio quævis, vel radix dimenſionis, inveſtiganda eſt. P, primum terminum quantitatis ejus; Q, reliquos terminos diviſos per primum. Et $\frac{m}{n}$, numeralem indicem dimenſionis ipſius P + PQ: Sive dimenſio illa integra ſit; ſive (ut ita loquar) fracta; ſive affirmativa, ſive negativa. Nam, ſicut Analyſtæ, pro *aa*, *aaa*, &c. ſcribere ſolent a^2, a^3, &c. ſic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^5}$, &c. ſcribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$; & pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$, ſcribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}.

Et

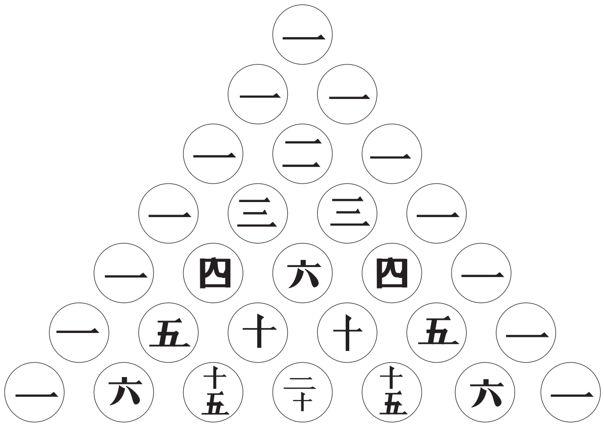
* *Extat Epiſtola in Tom. 3. Operum* Walliſii.

Fragment de l'*Epistolae prior* publicat a l'obra de Newton,

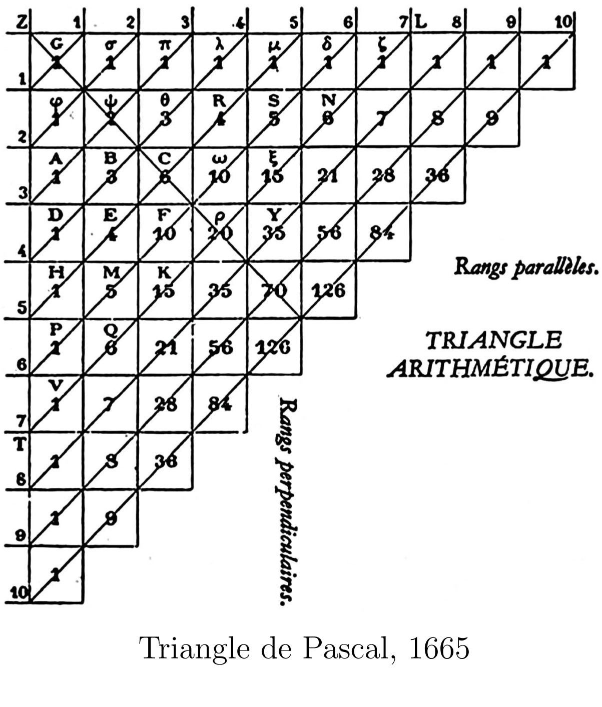
ANALYSIS Per Quantitatum SERIES, FLUXIONES AC DIFFERENTIAS: CUM Enumeratione Linearum TERTII ORDINIS. Londini MDCCXI

4.4 El triangle aritmètic

Presentem dues versions del triangle aritmètic, tal com apareixen al *Yongle dadian* (1407) i al *Traité du triangle aritmhétique* 1665, escrit probablement el 1654.



Fragment del triangle aritmètic segons el *Yongle dadian* (1407).



Triangle de Pascal, 1665

4.5 Demostracions

4.5.1 Desenvolupament de la potència d'un binomi

Les propietats [A.] i [B.] de la pàgina 2 ens porten a definir el *coeficients binomials* com els termes de la successió doble $\binom{n}{k}$, $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n$ tals que

[A.] $\displaystyle \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$

[B.] $\displaystyle \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$

Provarem per inducció la fórmula 5 del desenvolupament del binomi, conjecturada a la pàgina 4,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{0}b^n, \tag{10}$$

a) Per a $n = 0$ és certa perquè $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0}a^0b^{0-0}$.

b) Si la suposem certa per a $n \in \mathbb{N}$, llavors també és certa per a $n+1$. Només cal fer

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b)$$

i aplicar la definició dels coeficients binomials:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \binom{n}{0}a^n & + & \binom{n}{1}a^{n-1}b & +\cdots+ & \binom{n}{k}a^{n-k}b^k & +\cdots+ & \binom{n}{n-1}ab^{n-1} & + & \binom{n}{n}b^n \\
 & & & & & & & & \times & & a+b \\
\hline
 & & \binom{n}{0}a^nb & + & \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 & +\cdots+ & \binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} & +\cdots+ & \binom{n}{n-1}ab^n & + & \binom{n}{n}b^{n+1} \\
\binom{n}{0}a^{n+1} & + & \binom{n}{1}a^nb & + & \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 & +\cdots+ & \binom{n}{k+1}a^{n-k}b^{k+1} & +\cdots+ & \binom{n}{n}ab^n & & \\
\hline
\binom{n+1}{0}a^{n+1} & + & \binom{n+1}{1}a^nb & + & \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 & +\cdots+ & \binom{n+1}{k+1}a^{n-k}b^{k+1} & +\cdots+ & \binom{n+1}{n}ab^n & + & \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}
\end{array}$$

En definitiva, hem obtingut el resultat desitjat

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^nb + \cdots + \binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + \cdots + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}.$$

4.5.2 Propietats i valor dels coeficients binomials

Demostrarem les propietats [C.], [D.] i [E.] dels coeficients binomials i, mitjançant un ús recurrent de [E.], provarem la fórmula (8) que proporciona el seu valor.

- Propietat [C.] $\displaystyle \binom{n}{1} = n$

Actuem per inducció sobre n:

a) Per a $n = 1$ es compleix, —per [A.]—, $\binom{1}{1} = 1$.

b) Si la suposem certa per a $n \in \mathbb{N}$, llavors ho és per a $n+1$ perquè

$$\binom{n+1}{1} \underset{\text{[B.]}}{=} \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \underset{\text{[A.]}}{=} 1 + \binom{n}{1} \underset{\text{(hip. ind.)}}{=} 1 + n = n+1.$$

- Propietat [D.] $\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Per a qualsevol n i per a $k = 0$ o $k = n$ és certa per la propietat [A.]. Apliquem la inducció sobre n:

a) Per a $n = 1$ es compleix perquè s'inclou en els casos anteriors.

b) Si la suposem certa per a $n \in \mathbb{N}$, falta examinar el cas $n+1$ i $1 \leq k \leq n$:

$$\binom{n+1}{k} \underset{\text{[B.]}}{=} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \underset{\text{(hip. ind.)}}{=} \binom{n}{n-(k-1)} + \binom{n}{n-k} =$$
$$= \binom{n}{n-k+1} + \binom{n}{n-k} \underset{\text{[B.]}}{=} \binom{n+1}{n-k+1} = \binom{n+1}{n+1-k}.$$

Per tant, és certa per a $n+1$.

- Propietat [E.] $\quad \dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \dfrac{n-k+1}{k}, \ \forall n \geq 1 \quad \text{i} \quad 1 \leq k \leq n.$

Estudiarem tres casos: $k = 1$, $k = n$ i $2 \leq k \leq n-1$, —l'últim per inducció sobre n—. El primer inclou el cas $n = 1$.

Cas 1: $\dfrac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{0}} \underset{\text{[C.] i [A.]}}{=} \dfrac{n}{1} = \dfrac{n-1+1}{1}.$

Cas 2: $\dfrac{\binom{n}{n}}{\binom{n}{n-1}} \underset{\text{[A.] i [D.]}}{=} \dfrac{1}{\binom{n}{1}} \underset{\text{[C.]}}{=} \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-n+1}{n}.$

Cas 3: En ser $k \geq 2$ l'estudi comença per a $n = 2$.

a) Per a $n = 2$, els casos 1 i 2 demostren que és certa.

b) Si la suposem certa per a $n \in \mathbb{N}$, examinem el cas $n+1$, la qual cosa implica $2 \leq k \leq n$:

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n+1}{k-1}} \underset{[\text{B.}]}{=} \frac{\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-2}+\binom{n}{k-1}} \underset{[\div\binom{n}{k-1}]}{=} \frac{1+\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}}{\frac{\binom{n}{k-2}}{\binom{n}{k-1}}+1} \underset{\text{(hip. ind.)}}{=}$$

$$= \frac{1+\frac{n-k+1}{k}}{\frac{k-1}{n-k+1+1}+1} = \frac{\frac{n+1}{k}}{\frac{n+1}{n+1-k+1}} = \frac{(n+1)-k+1}{k}.$$

Per tant, la propietat és certa.

- Valor dels coeficients binomials: $\binom{n}{k} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdots 1}$, $\forall n \geq k \geq 1$.

L'obtindrem amb l'aplicació recurrent de la propietat [E.].

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{n-k+1}{k}\cdot\frac{n-k+2}{k-1}\binom{n}{k-2} = \\
&= \frac{n-k+1}{k}\cdot\frac{n-k+2}{k-1}\cdot\frac{n-k+3}{k-2}\binom{n}{k-3} = \cdots = \\
&= \frac{n-k+1}{k}\cdot\frac{n-k+2}{k-1}\ \cdots\ \frac{n-k+(k-1)}{k-(k-2)}\cdot\frac{n-k+k}{k-(k-1)}\binom{n}{k-k} = \\
&= \frac{(n-k+1)\cdot(n-k+2)\ \cdots\ (n-1)\cdot n}{k\cdot(k-1)\ \cdots\ 2\cdot 1}\cdot 1 = \\
&= \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+2)\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdots 2\cdot 1}
\end{aligned}$$

Índex