Potència d'un binomi

Binomi de Newton

RAMON NOLLA
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

1 Introducció

Hi ha ocasions en què té interès el treball amb el desenvolupament de la potència d'un binomi, $(a+b)^n$, o amb l'expressió simplificada d'un polinomi en funció d'aquesta potència. Per exemple, la identitat $x^2+10x-119=(x+5)^2-25-119$ té interès de cara a la resolució de l'equació $x^2+10x-119=0$. En aquest apunt comprovarem que si, per a dos nombres naturals $0 \leq k \leq n$, considerem

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\cdots\cdot 1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{1}$$

es pot escriure

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n, \tag{2}$$

Per exemple,

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= 1\,a^4 + \frac{4}{1}\,a^3\,b + \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\,a^2\,b^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1}\,a\,b^3 + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\,b^4 = \\ &= a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4\end{aligned}$$

Hi ha indicis prou seriosos que fan pensar que aquest desenvolupament era conegut, —per a $n=2$—, en el període babiloni antic (2000–1500 aC)[1] i, —per a $n>2$—, no més tard del segle XI en les civilitzacions àrab, xinesa i, possiblement, en la civilització índia. Sembla que un dels problemes que originà el seu estudi fou el de l'elaboració d'un algoritme d'extracció d'arrels de qualsevol ordre. Malgrat l'antiguitat d'aquest coneixement en la cultura oriental, de manera sovint avui aquest desenvolupament s'anomena *fórmula del binomi de Newton*. Evidentment, sir Isaac Newton (1643–1727) no en va ser el descobridor però va ser capaç d'estendre la fórmula de la potència d'un binomi per al cas que l'exponent fos un nombre racional positiu o negatiu, —i aquí sí que el nom de la fórmula és adequat—, la qual cosa li serví per crear una nova anàlisi de funcions.[2].

2 Recerca del desenvolupament de $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{\mathbf{n}}$

Desenvoluparem l'expressió $(a+b)^n$ per als primers nombres n naturals i mirarem de trobar una pauta per al càlcul dels coeficients i de les parts literals que en resultin. En resultarà una

[1] Vegeu l'apèndix 4.1.
[2] Vegeu l'apèndix 4.2

conjectura igual a la fórmula (2).[3]

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= \boxed{1}\\
(a+b)^1 &= \boxed{a+b}\\
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = (a^2+ab)+(ab+b^2) = \boxed{a^2+2\,a\,b+b^2}\\
(a+b)^3 &= (a^2+2\,a\,b+b^2)(a+b) = (a^3+2\,a^2\,b+a\,b^2)+(a^2\,b+2\,a\,b^2+b^3) =\\
&= \boxed{a^3+3\,a^2\,b+3\,a\,b^2+b^3}\\
(a+b)^4 &= (a^3+3\,a^2\,b+3\,a\,b^2+b^3)(a+b) =\\
&= (a^4+3\,a^3\,b+3\,a^2\,b^2+a\,b^3)+(a^3\,b+3\,a^2\,b^2+3\,a\,b^3+b^4) =\\
&= \boxed{a^4+4\,a^3\,b+6\,a^2\,b^2+4\,a\,b^3+b^4}\\
(a+b)^5 &= (a^4+4\,a^3\,b+6\,a^2\,b^2+4\,a\,b^3+b^4)(a+b) =\\
&= \quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots\\
&= \boxed{a^5+5\,a^4\,b+10\,a^3\,b^2+10\,a^2\,b^3+5\,a\,b^4+b^5}
\end{aligned}
$$

- **Part literal** S'observa que el terme a apareix afectat d'un exponent que decreix una unitat des del primer a l'últim sumand, essent el primer exponent l'exponent del binomi i l'últim igual a zero. Amb el terme b passa el mateix però en sentit creixent. Així, si l'exponent del binomi fos $n=6$ i se seguís la mateixa pauta tindríem

$$(a+b)^6 = \square\, a^6 + \square\, a^5\,b + \square\, a^4\,b^2 + \square\, a^3\,b^3 + \square\, a^2\,b^4 + \square\, a\,b^5 + \square\, b^6,$$

en què falta posar els coeficients en els requadres.

- **Coeficients** Podem disposar els coeficients en una estructura triangular de manera que en cada fila apareguin, en l'ordre del desenvolupament anterior, els corresponents a cada exponent. D'aquesta manera, resulta la configuració[4]

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & \mathrm{D}_0 & & & & & \\
 & & & & & & & & \swarrow & & \mathrm{D}_1 & & & & \\
\text{Fila 0} & \longleftrightarrow & & & & & & 1 & & \swarrow & & \mathrm{D}_2 & & & \\
\text{Fila 1} & \longleftrightarrow & & & & & 1 & & 1 & & \swarrow & & \mathrm{D}_3 & & \\
\text{Fila 2} & \longleftrightarrow & & & & 1 & & 2 & & 1 & & \swarrow & & \mathrm{D}_4 & \\
\text{Fila 3} & \longleftrightarrow & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \swarrow & & \mathrm{D}_5\\
\text{Fila 4} & \longleftrightarrow & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \swarrow & \\
\text{Fila 5} & \longleftrightarrow & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & &
\end{array}
$$

És pot trobar una pauta en la construcció de les files, la qual estendrem a la construcció del nombre de files que desitgem. Partirem de dues propietats fàcilment observables,

[3]Si us interessa una demostració rigorosa de la seva certesa, vegeu l'apèndix 4.4.

[4]Aquesta configuració rep el nom de *Triangle de Pascal* [1623–1662] o, també, *Triangle de Tartaglia* [1499–1557], encara que els seus coeficients eren coneguts pels matemàtics indis, —Pingala (II aC)—, per la seva relació amb problemes combinatoris. La configuració en forma de triangle és descrita per Halayudha (X–XI). Yang Hui (XIII) quan comenta els *Nou capítols sobre l'art matemàtic* (abans II) diu que Jia Xian (XI) inventa un diagrama ,—el triangle aritmètic—, que usa per a l'extracció d'arrels d'ordre superior a 2. A l'apèndix 4.3 en presentem un fragment que hem dissenyat a partir d'una reproducció del *Yongle dadian* (1407), —*Gran Enciclopèdia del període-regen Yongle*—, que es mostra a *Histoire des mathématiques chinoises*, 1987 de Martzloff.

- Els valors extrems de cada fila valen 1.
- La suma de dos termes consecutius en una fila genera el terme de la fila següent adjacent als dos.

Així, la Fila 6 seria

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \overbrace{1+5} & \overbrace{5+10} & \overbrace{10+10} & \overbrace{10+5} & \overbrace{5+1} & \\ & & & \| & \| & \| & \| & \| & \\ \text{Fila 6} & \longleftrightarrow & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{array}$$

El triangle construït d'aquesta manera l'anomenem *triangle aritmètic*. A partir dels seus coeficients i de l'estudi anterior de les parts literals es poden conjecturar els successius desenvolupaments de $(a+b)^n$. Per exemple,

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5\,b + 15\,a^4\,b^2 + 20\,a^3\,b^3 + 15\,a^2\,b^4 + 6\,a\,b^5 + b^6,$$

Els nombres que configuren el triangle reben el nom de *coeficients binomials* i coincideixen amb els nombres combinatoris els quals havíem representat amb els símbols

$$C_{n,k} \qquad C_n^k \qquad \binom{n}{k},$$

en què $n \in \{0,1,2,\ldots\}$ és el nombre de la Fila n, i $k \in \{0,1,2,,\ldots\}$ és el nombre de la diagonal D_k. Amb aquesta notació, les propietats que podem observar en el triangle i les que proporcionen la seva construcció són les ja conegudes dels nombres combinatoris:

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$

b) $\binom{n}{1} = n.$

c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$

d) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$

De tot el que hem dit en resulta la conjectura següent:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n, \tag{3}$$

la qual es presenta amb la notació

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.}$$

3 Exercicis

1. Desenvolupament de $(2x+3)^4$.

Resolució:

$$\begin{aligned}(2x+3)^4 &= (2x)^4 + 4\cdot(2x)^3\cdot 3 + 6\cdot(2x)^2\cdot 3^2 + 4\cdot 2x\cdot 3^3 + 3^4\\ &= 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81.\end{aligned}$$

2. Desenvolupament de $\left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^3$.

Resolució:

$$\begin{aligned}\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^3 &= \left(x^2\right)^3 + 3\left(x^2\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{x}\right) + 3x^2\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)^2 + \left(-\frac{2}{x}\right)^3\\ &= x^6 - \frac{6x^4}{x} + \frac{12x^2}{x^2} - \frac{8}{x^3} = x^6 - 6x^3 + 12 - \frac{8}{x^3}\,.\end{aligned}$$

3. Recompte del nombre total de col·leccions no ordenades que es poden muntar amb 7 boles numerades de l'1 al 7.

Resolució: Es tracta de combinacions sense repetició de 7 elements agafats d'1 en 1, de 2 en 2, de 3 en 3, etc.

$$\binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \cdots \binom{7}{7} = (1+1)^7 - \binom{7}{0} = 128 - 1 = 127.$$

4. Terme que ocupa el lloc cinquè del desenvolupament de $\left(2x - x^3\right)^{10}$.

Resolució:

$$\mathrm{T}_5 = \binom{10}{4}(2x)^6\left(x^3\right)^4 = 210\cdot 64\, x^6\cdot x^{12} = 13440\, x^{18}.$$

5. Demostració de les propietats dels nombres combinatoris.

Resolució:

a) $\displaystyle \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 = \frac{n!}{n!} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \binom{n}{n}.$

b) $\displaystyle \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!}\,\frac{n\,(n-1)!}{(n-1)!} = n.$

c) $\displaystyle \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$

d) $$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} = \frac{n!\,(k+1) + n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!}\\ &= \frac{n!\,\left[(k+1)+(n-k)\right]}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

4 Apèndix

4.1 El quadrat d'un binomi a l'antiga Babilònia

A partir de l'any 1857 i, d'una manera molt exhaustiva, en la primera meitat del segle XX es van desxifrar centenes de milers de tauletes de fang cuit cobertes de signes cuneïformes elaborades des dels voltants del 3000 aC a la vall situada entre els rius Tigris i Éufrates (*Mesopotàmia*). Una gran majoria de les transcripcions i traduccions de textos matemàtics inscrits en les tauletes es troben a l'obra d'Otto Neugebauer, *Mathematische Keilschrifttexte*[5], 1935-37. En el volum III, pàg 8, es presenta el següent problema:[6]

> He sumat les àrees dels meus dos quadrats: 25,25. (El costat d)el segon quadrat és $\frac{2}{3}$ del costat del primer més 5 GAR.[7]

En la resolució que dóna el text s'hi troben els càlculs en numeració sexagesimal, —hem afegit el desenvolupament entre els claudàtors—. Primerament proporciona els valors,

$$\begin{aligned}
a &= 1+(0;40)^2 = \left[1+\left(\frac{40}{60}\right)^2 = 1+\frac{1600}{60^2} = 1+\frac{26\cdot 60+40}{60^2} = 1+\frac{26}{60}+\frac{40}{60^2}\right] = \\
&= 1;26,40 \\
b &= 5\cdot 0;40 = \left[5\cdot\frac{40}{60} = \frac{200}{60} = 3+\frac{20}{60}\right] = \\
&= 3;20 \\
c &= 25,25-5^2 = [(25\cdot 60+25)-25 = 25\cdot 60] = \\
&= 25,0\,.
\end{aligned}$$

A continuació calcula el costat del primer quadrat amb l'algoritme

$$a^{-1}\cdot\left(\sqrt{ac+b^2}-b\right),$$

i el del segon quadrat fent els dos terços del primer més 5.
Si s'analitzen els càlculs de a, b i c, hi ha una certa evidència que s'han originat en substituir la informació de la relació entre els costats dels quadrats, en la informació de la suma dels quadrats i aplicar la fórmula del quadrat del binomi. Efectivament, si presentem en el nostre llenguatge algebraic la informació sobre els quadrats de costats x i y, tenim

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 &= 25,25 \\
y &= 0;40\cdot x+5\,.
\end{aligned}$$

Si substituïm la y de la segona equació en la primera i fem el desenvolupament del quadrat del binomi en resulten els càlculs de a, b i c que apareixen a la tauleta, la qual cosa permet

[5] Textos matemàtics d'escriptura cuneïforme.

[6] Referència i anàlisi extreta de B.L. Van der Waerden, *Science Awakening*, Oxford University Press, 1961, 68-69, i I. Bashmakova, G. Smirnova, *The Beginnings & Evolution of Algebra*, The Mathematical Association of America, 2000, 6-7.

[7] Un GAR és una mesura de longitud igual a 12 *kúš* (colzes). Un *kúš* ≈ 50 cm. Les àrees estan expressades en SAR=quadrat d'un GAR de costat.

conjecturar que l'autor del problema actuava amb aquest coneixement.

$$\begin{aligned} 25,25 = x^2 + (0;40 \cdot x + 5)^2 &\Longrightarrow 25,25 = x^2 + (0;40)^2 \cdot x^2 + 2 \cdot (5 \cdot 0;40) \cdot x + 5^2 \\ &\Longrightarrow \underbrace{(1 + 0;40^2)}_{a} \cdot x^2 + 2 \cdot \underbrace{(5 \cdot 0;40)}_{b} \cdot x = \underbrace{25,25 - 5^2}_{c} \end{aligned}$$

Finalment, amb l'aplicació de l'algoritme de resolució de l'equació de segon grau, obtenen $x = 30$, i de la relació entre els costats dels quadrats obtenen $y = 25$.
Efectivament, en el nostre llenguatge,

$$\left(1 + \frac{40^2}{60^2}\right) x^2 + 2\left(5 \cdot \frac{40}{60}\right) x = 25 \cdot 60 + 25 - 25 \Longleftrightarrow \frac{5200}{3600} x^2 + \frac{400}{60} x = 1500$$

$$\Longleftrightarrow \quad 13x^2 + 60x = 13500 \Longrightarrow x = a^{-1}\left(\sqrt{a \cdot c + b^2} - b\right) = \frac{\sqrt{13 \cdot 13500 + 30^2} - 30}{13} = 30.$$

4.2 La fórmula del binomi de Newton i l'*Epistolae Prior*

Sir Isaac Newton, després d'estudiar els treballs sobre càlcul d'àrees en l'*Arithmetica Infinitorum* de Wallis (1616–1703), seguí amb les investigacions d'aquest i descobrí que si considerava $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{N}$, i definia, de manera similar a (1),

$$\binom{\frac{m}{n}}{k} = \frac{\frac{m}{n} \cdot \left(\frac{m}{n} - 1\right) \cdot \left(\frac{m}{n} - 2\right) \cdots \left(\frac{m}{n} - k + 1\right)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 1} \tag{4}$$

i feia $\binom{\frac{m}{n}}{0} = 1$, llavors, podia expressar $(1+x)^{\frac{m}{n}}$ com la suma infinita,

$$\boxed{(1+x)^{\frac{m}{n}} = \binom{\frac{m}{n}}{0} + \binom{\frac{m}{n}}{1} x + \cdots + \binom{\frac{m}{n}}{k} x^k + \cdots \ .}$$

Aquesta expressió li resultà molt útil, entre d'altres coses, de cara al càlcul d'àrees "sota" funcions logarítmiques, trigonomètriques, etc. Il·lustrarem aquesta utilitat amb un càlcul més senzill. Aproximarem el valor de $\sqrt[3]{10}$,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{10} &= \sqrt[3]{8+2} = \sqrt[3]{8\left(1 + \frac{2}{8}\right)} = 2 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{4}} = \\ &= 2 \cdot \left(1 + \frac{\frac{1}{3}}{1} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots\right) \approx \\ &\approx 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{144} + \frac{5}{5184}\right) = 2 \cdot \frac{5585}{5184} = 2.15470\,\overline{679012345}. \end{aligned}$$

Si tenim en compte que els primers dígits de $\sqrt[3]{10}$ són 2.15443, en l'aproximació amb quatre sumands del binomi de Newton hem comès un error menor que $3 \cdot 10^{-4}$.

- **Presentació de la fórmula a l'*Epistolae Prior***

El 13 de juny de 1676, Newton escriu a Oldenburg una carta, l'*Epistolae Prior*, per a Leibniz. En ella contesta una demanda que aquest últim havia fet a Oldenburg sobre les demostracions dels matemàtics anglesos de les igualtats

$$\begin{aligned}\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 + \cdots .\end{aligned}$$

En ella es fa públic per primera vegada el desenvolupament de Newton per a la potència d'un binomi d'exponent racional. Ho fa d'una manera una mica diferent i, en aparença, més complexa que la presentada a la fórmula (2) de la introducció. Ara bé, per al càlcul és de més ràpida execució, perquè calcula cada sumand a partir del resultat del sumand anterior. Presentem el començament de la carta:

> Digníssim senyor
>
> Malgrat que la modèstia del Sr. Leibniz en els extractes de la seva carta que vostè fa poc em va enviar, elogia molt els nostres compatriotes per certes teories sobre sèries infinites de les quals ara es comença a sentir alguna cosa, no tinc cap dubte que ell hagi descobert no tan sols un mètode per reduir qualsevol quantitat a aquestes sèries, com ell assegura, sinó també diverses formes abreujades, potser semblants a les nostres, sinó fins i tot millors. No obstant, ja que sol·licita saber allò que ha sigut descobert pels anglesos en aquest tema, i en haver-ho estudiat jo mateix fa alguns anys, per satisfer en part els seus desitjos li transmeto algunes coses que s'em van acudir.
>
> Les fraccions poden ser reduïdes a sèries infinites per divisió i les quantitats radicals per extracció d'arrels, portant a terme aquestes operacions en la forma que sol fer-se amb els nombres decimals. Aquestes operacions són el fonament d'aquella reducció; però l'extracció d'arrels resulta molt abreujada per aquest teorema.
>
> $$\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c. \quad (5)$$
>
> En què $P+PQ$ significa la quantitat de la qual ha d'investigar-se l'arrel o bé una dimensió qualsevol o bé l'arrel de la dimensió, P el primer terme de la quantitat, Q la resta de termes dividits pel primer, i $\frac{m}{n}$ l'índex numèric de la dimensió de $P+PQ$, sigui dimensió entera, sigui (tal com dic) fraccionària, sigui afirmativa, sigui negativa. Ja que els analistes, en lloc de aa, aaa, etc., solen escriure a^2, a^3, etc.,[8] així jo per $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^5}$, etc., escric $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$, etc., i per $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$ escric a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}. I així per $\dfrac{aa}{\sqrt{c:\overline{a^3+bbx}}}$ escric $aa \times \overline{a^3+bbx}|^{-\frac{1}{3}}$, i per $\dfrac{aab}{\sqrt{c:\overline{\overline{a^3+bbx} \times \overline{a^3+bbx}}}}$ escric

[8]Aquesta notació va ser introduïda per Descartes a la seva *Géométrie*, 299 de l'edició de Leiden 1637, que la inclou com un dels tres assajos que acompanyen *Le Discours de la Méthode*. Per al cas d'exponent 2 utilitzen indistintament a^2 o aa, potser perquè en els dos casos calen dos signes i no hi ha economia de notació. A la carta de Newton hem trobat segons la versió utilitzada una notació o una altra, he seguit la de la versió presentada en *The correspondence of Isaac Newton*, II, 1960: 20-40.

$aab \times \overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$: en què l'últim cas si $\overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$ es concep ser $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}}$ en la Regla; serà $P=a^3$, $Q=\frac{bbx}{a^3}$, $m=-2$ i $n=3$. Finalment, per als termes trobats en el Quocient en operar, utilitzo A, B, C, D, etc., concretament, A pel primer terme $P^{\frac{m}{n}}$, B pel segon $\frac{m}{n}AQ$, i així successivament.

*Fragmentum *Epiſtolæ ad D.* Oldenburgium 13 Junii 1676 *miſſæ.*

FRactiones in Infinitas Series reducuntur per diviſionem ; & quantitates radicales per extractionem radicum, perinde inſtituendo operationes iſtas in ſpeciebus ac inſtitui ſolent in decimalibus numeris. Hæc ſunt fundamenta harum reductionum ; ſed extractiones radicum, multum abbreviantur per hoc *Theorema*.

$$\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c.$$

Ubi $P+PQ$ ſignificat quantitatem cujus Radix, vel etiam dimenſio quævis, vel radix dimenſionis, inveſtiganda eſt. P, primum terminum quantitatis ejus ; Q, reliquos terminos diviſos per primum. Et $\frac{m}{n}$, numeralem indicem dimenſionis ipſius $P+PQ$: Sive dimenſio illa integra ſit ; ſive (ut ita loquar) fracta ; ſive affirmativa, ſive negativa. Nam, ſicut Analyſtæ, pro aa, aaa, &c. ſcribere ſolent a^2, a^3, &c. ſic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^5}$, &c. ſcribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$; & pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$, ſcribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}. Et

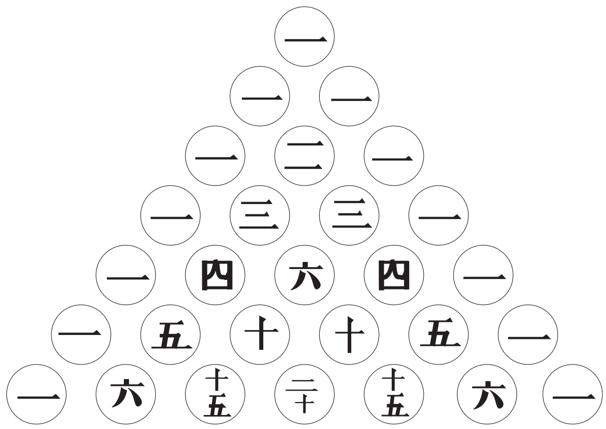
* *Extat Epiſtola in Tom.* 3. *Operum* Walliſii.

Fragment de l'*Epistolae prior* publicat a l'obra de Newton,

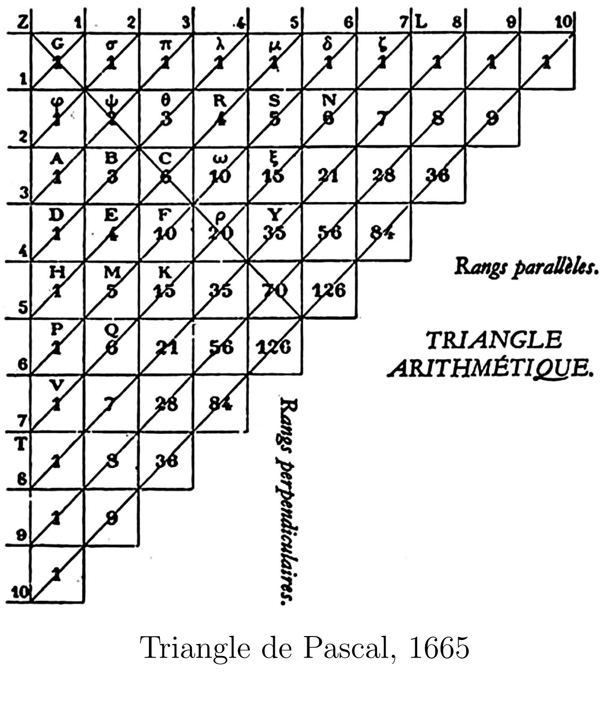
ANALYSIS Per Quantitatum SERIES, FLUXIONES AC DIFFERENTIAS: CUM Enumeratione Linearum TERTII ORDINIS. Londini MDCCXI

4.3 El triangle aritmètic

Presentem dues versions del triangle aritmètic, tal com apareixen al *Yongle dadian* (1407) i al *Traité du triangle aritmhétique* 1665, escrit probablement el 1654.



Fragment del triangle aritmètic segons el *Yongle dadian* (1407).



Triangle de Pascal, 1665

4.4 Demostració de la fórmula de la potència d'un binomi

Provarem per inducció la fórmula 3 del desenvolupament del binomi, conjecturada a la pàgina 3,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{0}b^n, \tag{6}$$

a) Per a $n = 0$ és certa perquè $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0}a^0b^{0-0}$.

b) Si la suposem certa per a $n \in \mathbb{N}$, llavors també és certa per a $n+1$. Només cal fer

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b)$$

i aplicar la definició dels coeficients binomials:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & \binom{n}{0}a^n & + & \binom{n}{1}a^{n-1}b & +\cdots+ & \binom{n}{k}a^{n-k}b^k & +\cdots+ & \binom{n}{n-1}ab^{n-1} & + & \binom{n}{n}b^n \\
 & & & & & & & & \times & & a+b \\
\hline
 & & \binom{n}{0}a^nb & + & \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 & +\cdots+ & \binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} & +\cdots+ & \binom{n}{n-1}ab^n & + & \binom{n}{n}b^{n+1} \\
\binom{n}{0}a^{n+1} & + & \binom{n}{1}a^nb & + & \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 & +\cdots+ & \binom{n}{k+1}a^{n-k}b^{k+1} & +\cdots+ & \binom{n}{n}ab^n & & \\
\hline
\binom{n+1}{0}a^{n+1} & + & \binom{n+1}{1}a^nb & + & \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 & +\cdots+ & \binom{n+1}{k+1}a^{n-k}b^{k+1} & +\cdots+ & \binom{n+1}{n}ab^n & + & \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}
\end{array}$$

En definitiva, hem obtingut el resultat desitjat

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^nb + \cdots + \binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + \cdots + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}.$$