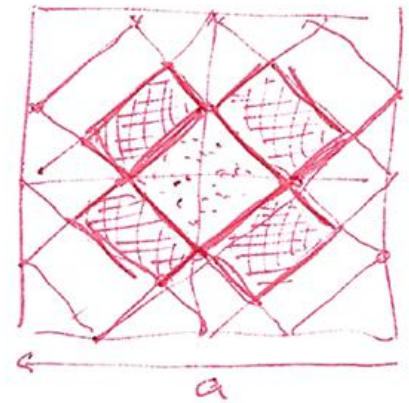


Problema de la caixa amb paper plegat

En aquest encàrrec cal ordenar i descriure el tractament fet al problema de la caixa que s'ha desenvolupat a l'aula casa. Constarà dels apartats següents:

1. Presentació de l'activitat.
2. Redacció de les instruccions del plegat del paper acompanyada de gràfics.
3. Dibuix esquemàtic, amb regle, del full amb els plecs remarcats
4. Càlcul raonat del volum de la caixa resultant.
 - En primer lloc el volum aproximat amb l'explicació del mètode seguit.
 - En segon lloc el volum exacte si sabem que partim d'un full de $21\text{cm}\times 21\text{cm}$.
5. Presentació d'un tractament raonat que respongui a la pregunta de si en tindríem prou amb un full A3 per construir una caixa de mig litre de volum amb el mateix mètode.



PROBLEMA DE LA CAIXA

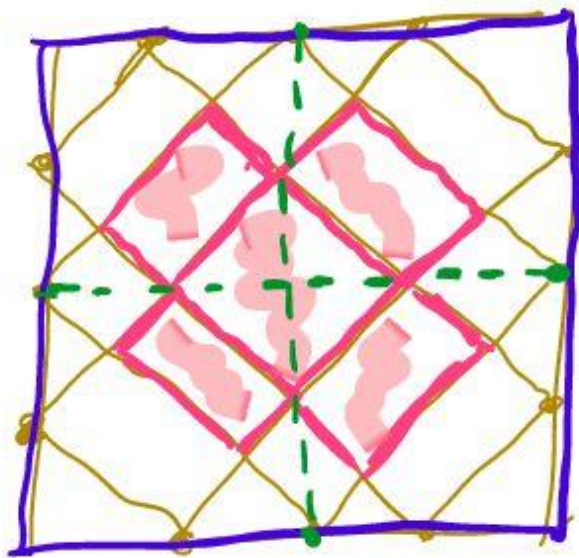
3r d'ESO
10/14

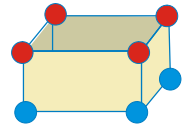
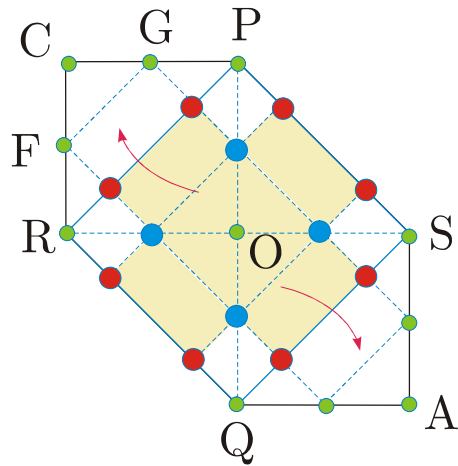
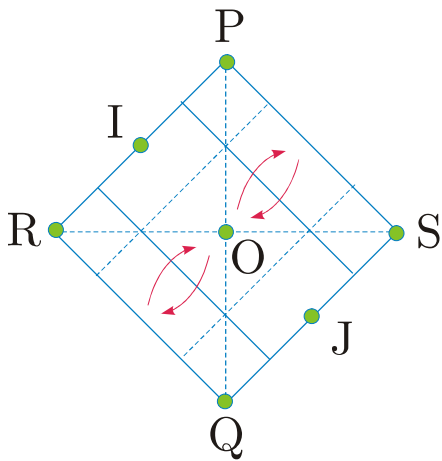
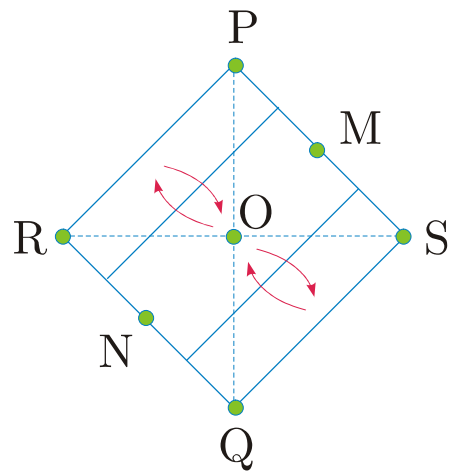
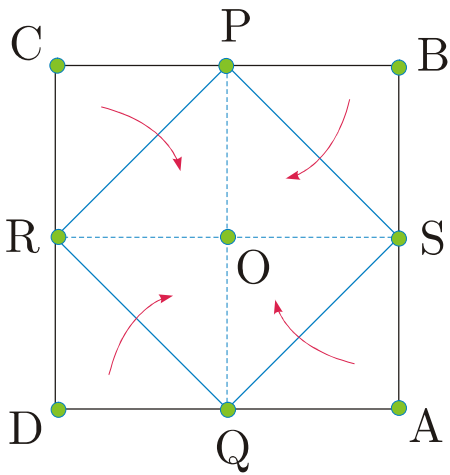
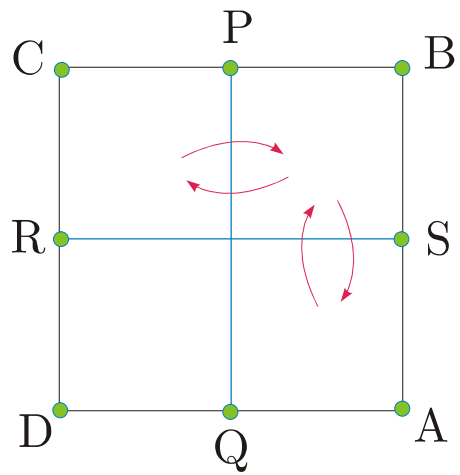
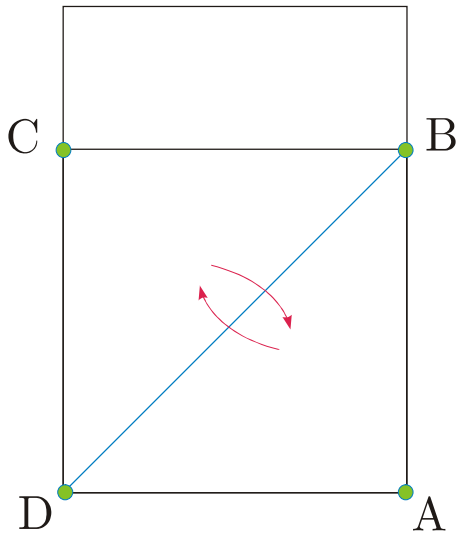
1. Presentació

Aquesta activitat tracta de construir una caixa amb forma d'ortocèdre, concretament serà un prisma recte de base quadrada.

Es farà a partir d'uns plecs practicats en un paper quadrat de $21\text{ cm} \times 21\text{ cm}$ retallat d'un full A4 de $21\text{ cm} \times 29,7\text{ cm}$.

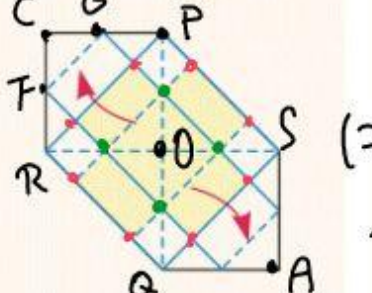
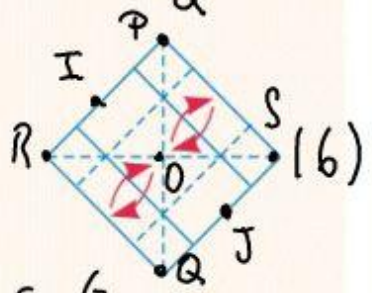
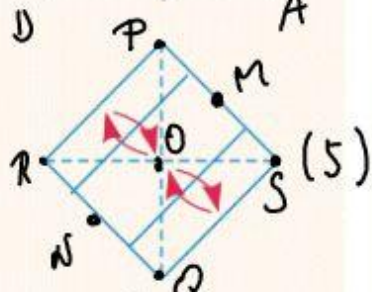
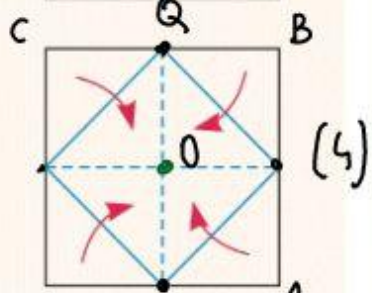
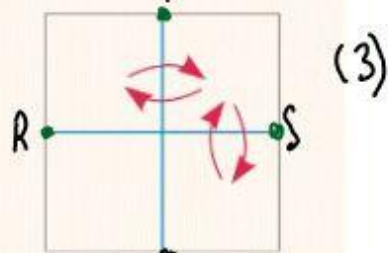
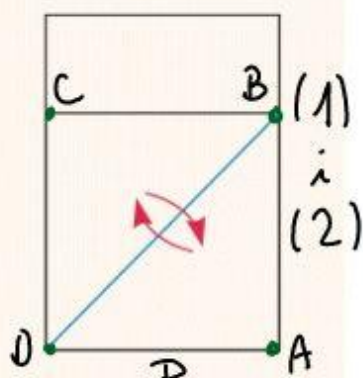
Un cop construït calcularem el seu volum aproximat i el seu volum exacte. Finalment, estudiarem si amb un full A3 ($29,7\text{ cm} \times 42\text{ cm}$) es pot construir una caixa de $1/2$ litre.





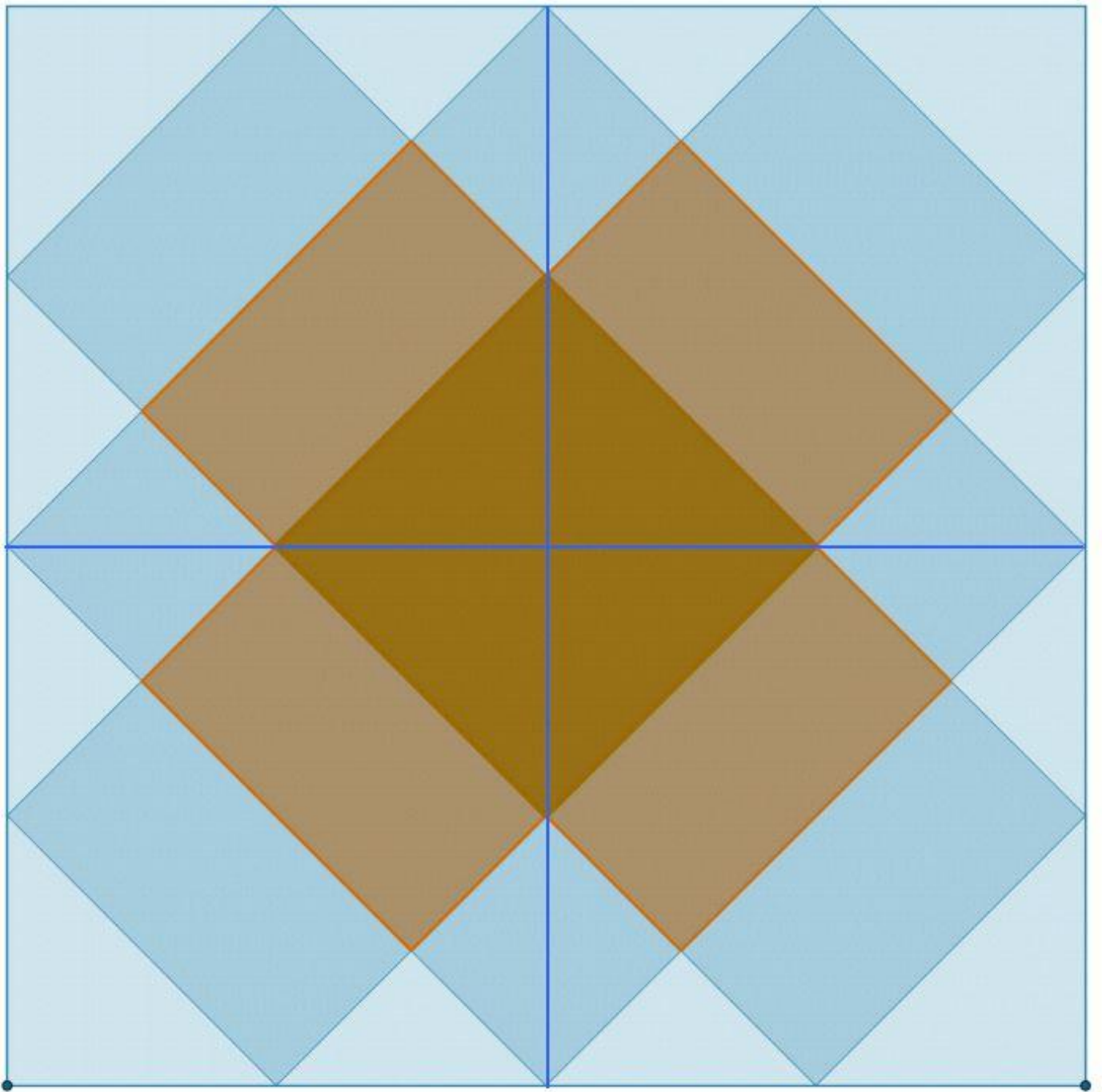
2. Instruccions sobre un full A4

- ① Portar A a C, plegar i desplegar
 - ② Tallar per BC i seguir treballant amb el quadrat ABCD.
 - ③ Portar AB sobre DC i AD sobre BC. Plegar i desplegar.
 - ④ En sentit oposat, portar A sobre O, B sobre O, C sobre O i D sobre O. Plegar
 - ⑤ Portar PR sobre MN i QS sobre NOM. Plegar i desplegar
 - ⑥ Portar PS sobre IOT i RQ sobre IOT. Plegar i desplegar.
 - ⑦ Desplegar el plec PR i el plec QS.
 - ⑧ Manipular i plegar els quadradets dels vèrtexs P i R per la seva diagonal i portar P i R sobre el punt mitjà de PR. Llavors plegar pel que queda de PR i tornar a plegar per FG per portar C sobre O.
- Finalment, fer el mateix a partir dels quadradets dels vèrtexs Q i S.



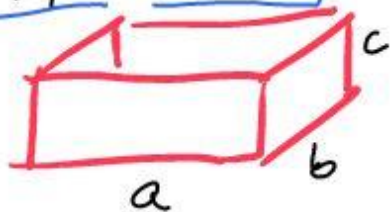
3. Di buix esquema tic amb regle del full amb plecs

De les instruccions de plegat de l'apartat anterior en resulten els plecs d'aquesta imatge.



4. Càlcul raonat del volum

Aproximat



Amb un regle he mesurat les arestes de la caixa i he obtingut

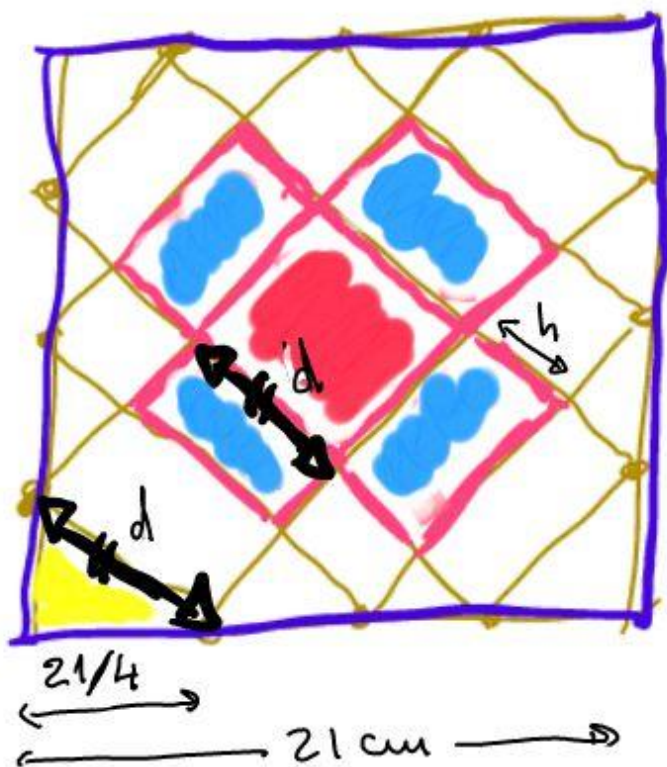
$$\begin{aligned} a &= 7.4 \text{ cm} \\ b &= 7.4 \text{ cm} \\ c &= 3.8 \text{ cm} \end{aligned}$$

Per tant, el volum resultant aproximat serà:

$$\text{Volum} = 7.4 \cdot 7.4 \cdot 3.8 = 208,088 \text{ cm}^3$$

És a dir, el voltant de 0,2 litres

Exacte



Observem:

- La base de la caixa pintada de **vermell**
- Les cares laterals de la caixa pintades de **blau**
- El costat, d , de la base remarcat de negre.
- Aquest costat coincideix amb la hipotenusa del triangle rectangle rectangle gros



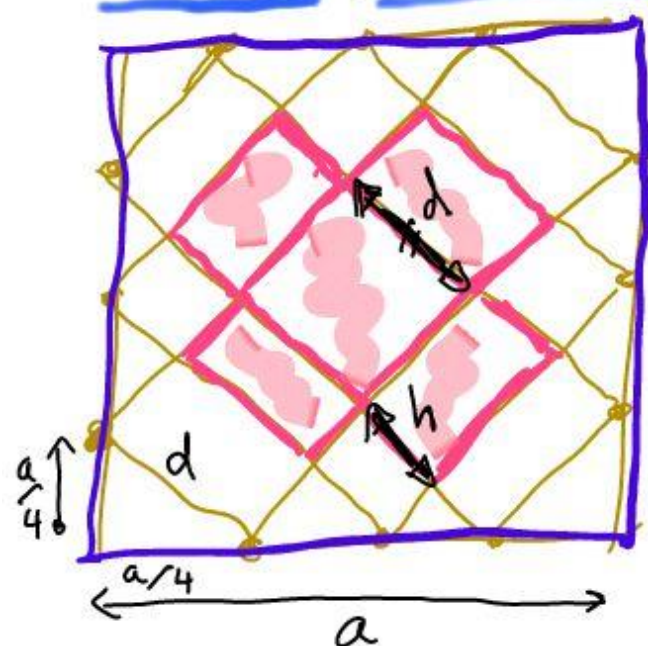
$$\begin{aligned} \text{llavors, } d &= \sqrt{\left(\frac{21}{4}\right)^2 + \left(\frac{21}{4}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{21}{4}\right)^2} \\ &= \frac{21}{4} \sqrt{2} \quad (\text{teorema de Pitàgores}) \end{aligned}$$

$$\text{A més, } h = \frac{d}{2} = \frac{21\sqrt{2}}{4} : 2 = \frac{21\sqrt{2}}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{Conclusió: Volum} &= d^2 \cdot h = \left(\frac{21\sqrt{2}}{4}\right)^2 \cdot \frac{21\sqrt{2}}{8} = \frac{21^2 \cdot 2 \cdot 21 \cdot \sqrt{2}}{16 \cdot 8} \\ &= \frac{21^3 \cdot \sqrt{2}}{64} = \frac{9261\sqrt{2}}{64} \approx 204,6411 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Volum exacte

5. Full A3 per 1/2 litre?



$$\text{Volum} = d^2 \cdot h$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{2a^2}{16} \quad \left(\begin{array}{l} \text{teorema} \\ \text{de Pitàgores} \end{array} \right) \\ h = \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{2a^2}{16}} : 2 = \frac{a\sqrt{2}}{4} : 2 = \frac{a\sqrt{2}}{8} \end{array} \right.$$

Per tant,

$$\text{Volum} = \frac{2a^2}{16} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{8} = \frac{a^3\sqrt{2}}{64}$$

Llavors, sabem que el quadrat que surt d'un full A3 té el costat $a = 29.7 \text{ cm}$.

Per tant el volum que podrà contenir la caixa és:

$$\text{Volum} = \frac{29.7^3 \cdot \sqrt{2}}{64} = 578,901 \text{ cm}^3 = \underline{\underline{0,578 \text{ litres}}}$$

Conclusió: Amb un full A3 la caixa construïda pot contenir mig litre.

Ampliació: Si observem la fórmula del volum, podem saber la meitat del costat del quadrat que pot contenir un volum donat.

Efectivament,

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{64} \Rightarrow 64V = a^3\sqrt{2} \Rightarrow a^3 = \frac{64V}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{\underline{a = \sqrt[3]{\frac{64V}{\sqrt{2}}}}}$$

Exemple: Si $V = 1 \text{ litre}$ llavors,

$$a = \sqrt[3]{\frac{64000}{\sqrt{2}}} = 35,636 \text{ cm de costat}$$