Problemes de probabilitat

Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
Institut Pons d'Icart

1. Llancem a l'aire dos daus i observem la suma de les seves cares. Calculeu:

a) La suma més probable.

b) La probabilitat que surtin dues cares iguals.

a) El conjunt d'esdeveniments elementals és $\Omega = \{(x, y) \text{ tals que } 1 \leq x, y \leq 6\}$, és a dir el conjunt de parelles ordenades amb repetició de nombres de l'1 al 6. Tots aquests esdeveniments són igualment probables, per tant la probabilitat de cadascun d'ells és

$$P((x,y)) = \frac{1}{c(\Omega)} = \frac{1}{\mathrm{VR}_6^2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}\,.$$

Les diferents probabilitats són:

$$P\Big(\text{Suma } 2\Big) = P\Big((1,1)\Big) = \frac{1}{36}$$

$$P\Big(\text{Suma } 3\Big) = P\Big(\{(1,2),(2,1)\}\Big) = \frac{2}{36}$$

$$P\Big(\text{Suma } 4\Big) = P\Big(\{(1,3),(3,1),(2,2)\}\Big) = \frac{3}{36}$$

$$P\Big(\text{Suma } 5\Big) = \cdots = \frac{4}{36}$$

$$P\Big(\text{Suma } 6\Big) = \cdots = \frac{5}{36}$$

$$P\Big(\text{Suma } 7\Big) = \cdots = \frac{6}{36}$$

$$P\Big(\text{Suma } 8\Big) = \cdots = \frac{5}{36}$$

$$P\Big(\text{Suma } 9\Big) = \cdots = \frac{4}{36}$$

$$P\Big(\text{Suma } 10\Big) = \cdots = \frac{3}{36}$$

$$P\Big(\text{Suma } 11\Big) = \cdots = \frac{2}{36}$$

$$P\Big(\text{Suma } 12\Big) = \cdots = \frac{1}{36}$$

Per tant, la probabilitat més gran correspon a la suma de 7 punts.

b) $P\Big(\{(x,x) \text{ tals que } 1 \leq x \leq 6\}\Big) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6} \approx 0.1667\,.$

2. Una penya de travesses de futbol fa una setmana totes les travesses en què apareixen 5 empats, 6 uns i 3 dosos. Quina és la probabilitat que encertin el total de 14 resultats si tots són igualment probables?

$\Omega = \big\{\text{travesses possibles}\big\}$ coincideix amb el nombre de col·leccions ordenades de 3 elements agafats de 14 en 14 on hi ha repetició no fixada. Per tant, $c(\Omega) = \mathrm{VR}_3^{14} = 3^{14}$.

E l conjunt S d'apostes que els jugadors han fet està format per totes les col·leccions ordenades de 14 elements, de manera que els tres elements $1, \times, 2$ es repeteixen un nombre $6, 5, 3$ fixat de vegades. Per tant,

$$P\big(S\big) = \frac{c(S)}{c(\Omega)} = \frac{\mathrm{PR}_{14}^{6,5,3}}{3^{14}} = \frac{14!}{6!\,5!\,3!\,3^{14}} \approx 0.03516\,.$$

3 . Una endevina que fa **prediccions correctes** comunica a la penya del problema 2 que sap segur que sortiran 8 uns, —ni un més ni un menys—. Els de la penya fan una travessa en la que hi ha 8 uns i la resta són $\times$ i dosos. Quina és la probabilitat que encertin 14 resultats ?

Tenim els esdeveniments elementals $\begin{cases} \Omega = \{\text{Travesses amb 8 uns}\} \\ S = \{\text{Travessa feta per la penya}\}\,. \end{cases}$

Per trobar $c(\Omega)$ cal calcular el nombre de possibles posicions dels 8 uns i, per cadascuna d'aquestes posicions, el nombre de col·leccions d'$\times$ i de dosos que s'hi poden afegir. Llavors

$$\begin{cases} \text{Nombre de possibles posicions dels 8 uns} = \dbinom{14}{8}\,. & \left[\begin{array}{l}\text{Col·leccions no ordenades de 8 llocs no} \\ \text{repetits triats entre 14.}\end{array}\right] \\ \text{Nombre de col·leccions d'}\times\text{ i dosos per a cada posició} = \mathrm{VR}_2^6\,. & \left[\begin{array}{l}\text{Col·leccions ordenades de} \\ \text{dos elements repetits triats} \\ \text{de 6 en 6.}\end{array}\right] \end{cases}$$

Per tant, $\quad c(\Omega) = \dbinom{14}{8} \cdot 2^6 = 192192 \Longrightarrow P(S) = \dfrac{1}{192192} = 5.2 \cdot 10^{-6}\,.$

4 . L'endevina del problema 3 afina una mica més i comunica a la penya els partits amb els 8 uns. A més els diu que, de la resta de 6 partits, n'hi haurà un mínim de 3 amb un dos com a resultat. Els de la penya, com abans, fan una travessa seguint-ne les indicacions. Quina és la probabilitat que encertin 14 resultats ?

En aquest cas Ω és el conjunt de travesses on en 6 llocs fixats hi ha un mínim de 3 dosos i S és la travessa que han fet. Comptarem per casos separats com col·locar els dosos. Observem que col·locar k dosos es muntar col·leccions no ordenades de k llocs no repetits triats entre 6 llocs:

$$\left.\begin{array}{r} \text{3 dosos i 3 }\times \longrightarrow \dbinom{6}{3} = 20 \\ \text{4 dosos i 2 }\times \longrightarrow \dbinom{6}{4} = 15 \\ \text{5 dosos i 1 }\times \longrightarrow \dbinom{6}{5} = 6 \\ \text{6 dosos} \longrightarrow \dbinom{6}{6} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow c(\Omega) = 20 + 15 + 6 + 1 = 42 \Longrightarrow P(S) = \frac{1}{42} \approx 0.0238\,.$$

5 . Tenim dos jocs de pòquer iguals i sense comodins. Traiem una carta de cada joc.
1) Calculeu la probabilitat que les dues siguin:

a) Asos de cors. b) Iguals. c) Del mateix pal.

2) Repetiu l'estudi si ajunteu els dos jocs i traieu les dues cartes sense reposició.

1) $\Omega = \big\{(1_\heartsuit, 1_\heartsuit), (1_\heartsuit, 2_\heartsuit), (2_\heartsuit, 1_\heartsuit), \ldots, (1_\spadesuit, 1_\spadesuit), \ldots, (1_\diamondsuit, 1_\diamondsuit), \ldots, (6_\clubsuit, 6_\clubsuit)\big\} \Longrightarrow c(\Omega) = 52^2$

Aquests esdeveniments elementals, formats per parelles ordenades, són equiprobables. Per tant,

a) $P(1_\heartsuit, 1_\heartsuit) = \dfrac{1}{52^2} = \dfrac{1}{2704} \approx 3.7 \cdot 10^{-4}\,.$

b) $P(x,x)=\dfrac{52}{52^2}=\dfrac{1}{52}\approx 0.0192\,.$

c) $P\big(\{(x_\heartsuit,y_\heartsuit)\}\cup\{(x_\spadesuit,y_\spadesuit)\}\cup\{(x_\diamondsuit,y_\diamondsuit)\}\cup\{(x_\clubsuit,y_\clubsuit)\}\big)=4\cdot\dfrac{\mathrm{VR}^2_{13}}{52^2}=4\cdot\dfrac{1}{4^2}=\dfrac{1}{4}=0.25\,.$

2) $\Omega=\{$parelles no ordenades de dues cartes triades entre 106$\}$ constitueix un conjunt d'esdeveniments elementals equiprobables i $c(\Omega)=\dfrac{104\cdot 103}{2}$.

Per estudiar aquest problema podeu marcar les cartes amb els subíndexs 1 o 2, segons siguin d'un joc o un altre. Així es veu que, per exemple:

- l'esdeveniment "treure dos asos de cors" està format, —igual que en l'estudi anterior—, per un esdeveniment elemental, $<1_{\heartsuit 1},1_{\heartsuit 2}>$, .
- l'esdeveniment "treure 1 de cors i 4 de trèvols" està format per quatre esdeveniments elementals, $<1_{\heartsuit 1},4_{\clubsuit 1}>$, $<1_{\heartsuit 1},4_{\clubsuit 2}>$, $<1_{\heartsuit 2},4_{\clubsuit 1}>$, $<1_{\heartsuit 2},4_{\clubsuit 2}>$, mentre que en l'estudi anterior només estava format per dos, $(1_\heartsuit,4_\clubsuit)$, $(4_\clubsuit,1_\heartsuit)$.

Si utilitzem la fórmula de Laplace obtenim:

a) $\dfrac{1}{\dfrac{104\cdot 103}{2}}=\dfrac{1}{52\cdot 103}=\dfrac{1}{5356}$ b) $\dfrac{52}{\dfrac{104\cdot 103}{2}}=\dfrac{1}{103}$ c) $4\cdot\dfrac{\dfrac{26\cdot 25}{2}}{\dfrac{104\cdot 103}{2}}=\dfrac{25}{103}$

6 . Es fa una aposta de 6 números a la loteria primitiva. Quina és la probabilitat de:

a) Encertar els sis resultats.

b) Encertar cinc resultats i no sis.

c) Encertar tres resultats com a mínim.

$\Omega=\{$apostes de 6 nombres$\}\Longrightarrow c(\Omega)=\dbinom{49}{6}$, perquè els esdeveniments elementals equiprobables són col·leccions no ordenades de 6 nombres no repetits.

Anomenem S_k l'esdeveniment "treure k i només k encerts".

a) En no haver-hi més que un cas favorable a l'esdeveniment $S_6=\{$treure 6 encerts$\}$, tenim

$$P(S_6)=\frac{1}{\dbinom{49}{6}}=\frac{1}{13983816}\approx= 7.15\cdot 10^{-8}\,.$$

b) Les col·leccions que conformen l'esdeveniment $S_5=\{$treure 5 encerts$\}$, són les formades per:

$$\begin{cases}\text{5 nombres de l'aposta feta },\ \left[\dbinom{6}{5}\text{ possibilitats}\right],\\ \text{i 1 nombre dels 43 no apostats.}\end{cases}\qquad \text{És a dir, } c(S_5)=\binom{6}{5}\cdot 43$$

$$P(S_5)=\frac{\dbinom{6}{5}\cdot 43}{\dbinom{49}{6}}=\frac{258}{13983816}\approx 1.845\cdot 10^{-5}\,.$$

c) Utilitzant raonaments i notacions similars, en ser S_3, S_4, S_5 i S_6 incompatibles, tenim

$$P(3 \text{ encerts com a mínim}) = P(S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6) = P(S_3) + P(S_4) + P(S_5) + P(S_6)$$

$$= \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3} + \binom{6}{4}\binom{43}{2} + \binom{6}{5}\binom{43}{1} + 1}{\binom{49}{6}} = \frac{260624}{13983816} \approx 0.01864\,.$$

7. Tenim un dau, —amb les cares marcades amb 1, 2, 3, 4, 5 i 6—, tal que la probabilitat que en tirar-lo surti una cara determinada és proporcional al número inscrit en aquesta cara. Calculeu la probabilitat que en tirar-lo el resultat sigui un nombre parell.

Si $P(1) = k$, llavors $\quad 1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^{6} = k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 21k \Longrightarrow k = \dfrac{1}{21}\,.$

Per tant, $P\big(\{2,4,6\}\big) = \dfrac{2}{21} + \dfrac{4}{21} + \dfrac{6}{21} = \dfrac{12}{21} = \dfrac{4}{7} \approx 0.5714$

8. Vuit persones s'ordenen de manera aleatòria i se suposa que les ordenacions són equiprobables. Calculeu la probabilitat que dues persones determinades estiguin de costat si l'ordenació ha sigut:

a) En fila.

b) En cercle.

a) $\Omega = \{\text{col·leccions ordenades de 8 persones en fila}\} \Longrightarrow c(\Omega) = P_8 = 8!$.

Sigui F l'esdeveniment "estar dues persones determinades juntes en fila". Aquestes persones poden estar en 7 parelles de places contigües i, en cada parella de places, poden intercanviar-se. En total, poden estar juntes de $2 \cdot 7 = 14$ maneres. Per cadascuna de les maneres d'estar juntes, les altres 6 persones es poden col·locar ordenadament de $P_6 = 6!$ maneres. Llavors

$$c(D) = 14 \cdot 6! \Longrightarrow P(D) = \frac{14 \cdot 6!}{8!} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25\,.$$

b) La disposició en cercle implica que les ordenacions possibles en fila de l'apartat anterior s'identifiquin de 8 en 8 perquè, en moure's totes les persones una posició en la mateixa direcció, les seves posicions relatives no varien. D'altra banda, a les ordenacions favorables en fila s'ha d'afegir aquelles en què un element de la parella és l'últim i l'altre el primer. Llavors, també s'identifiquen de 8 en 8. Per tant, si anomenem C l'esdeveniment "estar dues persones determinades juntes en cercle",

$$P(C) = \frac{\dfrac{2 \cdot 8 \cdot 6!}{8}}{\dfrac{8!}{8}} = \frac{2 \cdot 6!}{7!} = \frac{2}{7} = 0.2857\,.$$

9. Escollim un nombre a l'atzar de l'1 al 4000. Quina és la probabilitat que sigui múltiple de 2 o múltiple de 3 o múltiple de 5

Consideracions prèvies:

- Recordem que $P(AUB) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. D'aquí és relativament fàcil demostrar que

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)\,.$$

- També és bastant immediat comprovar que si, en $\Omega = \{1, 2, \ldots, 4000\}$, anomenem

$$D = \{\text{múltiples de } 2\}\,,\ T = \{\text{múltiples de } 3\}\ \text{ i }\ C = \{\text{múltiples de } 5\}\,,$$

llavors $\begin{cases} c(D) = 2000,\ c(T) = 1333,\ c(C) = 800, \\ c(D\cap T) = 666,\ c(D\cap C) = 400,\ c(T\cap C) = 266\ \text{ i }\ c(D\cap T\cap C) = 133. \end{cases}$

Conseqüentment,

$$P(D\cup T\cup C) = \frac{2000 + 1333 + 800 - 666 - 400 - 266 + 133}{4000} = \frac{2934}{4000} = 0.7335$$

10. Assistim a un examen sobre 100 temes. El tribunal n'escull tres a l'atzar i nosaltres, un cop vistos els temes, n'hem de triar un entre els tres i contestar-lo. Si hem preparat 60 temes de manera que els sabem contestar bé, calculeu la probabilitat que tenim de contestar bé l'examen.

Anomenem S l'esdeveniment contestar bé l'examen. Aquest esdeveniment consisteix en què sabem contestar bé algun dels tres temes que tria el tribunal. L'esdeveniment contrari $\overline{S}$ consisteix en què no sabem cap dels tres temes. La probabilitat d'aquest últim és més senzilla de calcular. Per tant, calcularem $P\left(\overline{S}\right)$ i després utilitzarem la propietat $P(S) = 1 - P\left(\overline{S}\right)$.

- El nombre de col·leccions de tres temes que no sabem contestar bé és $\binom{40}{3}$, (no importa l'ordre de la tria del tribunal i no es poden repetir els temes).
- El nombre de possibles tries del tribunal és $\binom{100}{3}$.

Per tant,

$$P\left(\overline{S}\right) = \frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}} \Longrightarrow P(S) = 1 - \frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}} = 1 - \frac{40\cdot 39\cdot 38}{100\cdot 99\cdot 98} = \frac{7591}{8085} \approx 0.9389\,.$$

11. Si es contesta a l'atzar un test de 10 preguntes amb dues opcions de resposta obligada (veritat-fals), quina és la probabilitat de contestar 5 preguntes i només 5 bé ? I la de contestar-ne com a mínim 5 de bé ?

Els esdeveniments elementals estan formats per col·leccions ordenades de 10 elements construïdes amb els símbols V,F (veritat-fals), de repetició no fixada. Les col·leccions favorables són, entre les anteriors, les que tenen 5 respostes bones entre 10. Això equival a escollir cinc posicions (no ordenadament) entre 10. Per tant,

$$P(\text{“5 bones”}) = \frac{\binom{10}{5}}{2^{10}} = \frac{10!}{5!\,5!\,2^{10}} = \frac{252}{2048} \approx 0.2769\,.$$

Si raonem de manera similar tenim, per a la segona pregunta,

$$P(\text{“5 o 6 o ... o 10 bones”}) = \frac{\sum_{n=5}^{10}\binom{10}{n}}{2^{10}} = \frac{638}{1024} = \frac{319}{512} \approx 0.623\,.$$

12 . Calculeu la probabilitat que en una classe de 33 alumnes n'hi hagi com a mínim 2 que facin l'aniversari el mateix dia. (Considereu l'any de 365 dies.)

Sigui S l'esdeveniment de l'enunciat. Calcularem la probabilitat de l'esdeveniment contrari $\overline{S}$, és a dir que tots els alumnes facin l'aniversari en dies diferents.

- Els dies de naixement dels 33 alumnes formen col·leccions ordenades de 33 elements escollits entre 365 i que, a més, es poden repetir.
- L'esdeveniment fer l'aniversari en dies diferents conté totes les col·leccions de 33 elements triats entre 365 i que no es poden repetir.

Per tant,

$$P(S) = 1 - P(\overline{S}) = 1 - \frac{\mathrm{V}_{365}^{33}}{\mathrm{VR}_{365}^{33}} \approx 0.77497$$

13 . Traiem tres cartes d'un joc de 40 (10 per pal). Calculeu la probabilitat que siguin del mateix pal.

Sigui P_i l'esdeveniment “les tres cartes pertanyen al pal **i**”. En ser esdeveniments incompatibles, tenim

$$P(P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4) = \sum_{i=1}^{4} P(P_i) = 4 \cdot \frac{\binom{10}{3}}{\binom{40}{3}} = 4 \cdot \frac{\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{40\cdot 39\cdot 38}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{12}{247} \approx 0.04858\,.$$

14 . Llancem un dau tres vegades. Quina és la probabilitat que surtin tres números consecutius.

Els esdeveniments elementals equiprobables són col·leccions ordenades de tres números que es poden repetir. Els casos favorables són els del conjunt $S = \{(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6)\}$.Per tant,

$$P(S) = \frac{4}{\mathrm{VR}_6^3} = \frac{4}{216} = \frac{1}{54} \approx 0.0185\,.$$

15 . En una urna hi ha 15 boles blanques, 10 negres i 12 vermelles. Traiem 2 boles sense reposició. Calculeu la probabilitat que:

a) Sigui vermella la segona si sabem que ho ha sigut la primera.

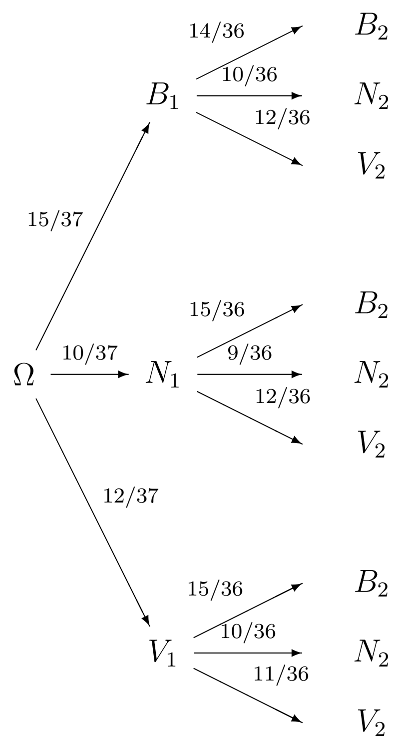
b) Les dues siguin vermelles.

c) Les dues siguin de diferent color.

d) Sigui vermella la segona.

e) Hagi sigut vermella la primera si sabem que ho ha sigut la segona.

Amb l'ajut del diagrama d'arbre adjunt contestem les preguntes.



a) $P(V_2/V_1) = \dfrac{11}{36}$.

b) $P(V_1 \cap V_2) = P(V_2/V_1) \cdot P(V_1) = \dfrac{11}{36} \cdot \dfrac{12}{37} = \dfrac{11}{111} \approx 0.0991$.

c) $P\big((B_1 \cap (N_2 \cup V_2)) \cup (N_1 \cap (B_2 \cup V_2)) \cup (V_1 \cap (B_2 \cup N_2))\big)$

$$= \frac{22}{36} \cdot \frac{15}{37} + \frac{27}{36} \cdot \frac{10}{37} + \frac{25}{36} = \frac{900}{36 \cdot 37} = \frac{25}{37} \approx 0.6757\,.$$

d) $P(V_2) = P\big((B_1 \cap V_2) \cup (N_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap V_2)\big)$

$$= \frac{12}{36} \cdot \frac{15}{37} + \frac{12}{36} \cdot \frac{10}{37} + \frac{11}{36} \cdot \frac{12}{37} = \frac{12}{37} \approx 0.3243\,.$$

e) $P(V_1/V_2) = \dfrac{P(V_1 \cap V_2)}{P(V_2)} = \dfrac{P(V_2/V_1) \cdot P(V_1)}{P(V_2)} = \dfrac{\frac{11}{111}}{\frac{12}{37}}$

$$= \frac{11}{36} \approx 0.3056\,.$$

16 . En una enquesta pública s'observa que davant d'unes eleccions en què hi ha quatre candidats A, B, C i D, s'han observat les probabilitats de guanyar de cada candidat que presentem:

$$P(A) = 0.4,\ P(B) = 0.3,\ P(C) = 0.2 \text{ i } P(D) = 0.1\,.$$

Si el candidat C es retira, calculeu la probabilitat de guanyar dels altres si els votants de C no es passen a cap altre candidat.

$$\begin{aligned}
P(A/\overline{C}) &= \frac{P(A \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(\overline{C}/A) \cdot P(A)}{P(\overline{C})} = \frac{1 \cdot 0.4}{0.8} = \frac{1}{2} = 0.5 \\
P(B/\overline{C}) &= \frac{P(B \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(\overline{C}/B) \cdot P(B)}{P(\overline{C})} = \frac{1 \cdot 0.3}{0.8} = \frac{3}{8} = 0.375 \\
P(D/\overline{C}) &= \frac{P(D \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(\overline{C}/D) \cdot P(D)}{P(\overline{C})} = \frac{1 \cdot 0.1}{0.8} = \frac{1}{8} = 0.125
\end{aligned}$$

17 . Una secretària ha de posar quatre cartes personalitzades en els seus respectius sobres. Decideix fer-ho a l'atzar. Calculeu la probabilitat que tothom rebi la carta destinada a un altre.

Anomenem A_i, $1 \leq i \leq 4$, l'esdeveniment "la persona A_i rep la carta que li correspon". Hem de calcular la probabilitat de l'esdeveniment $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$. (Lleis de Morgan.)

Recordem que $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$. De la mateixa manera

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\
&\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\,. \\
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{1 \leq i,j \leq 4} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i,j,k \leq 4} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\
&\quad - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\,.
\end{aligned}$$

A partir d'això podem resoldre el problema.

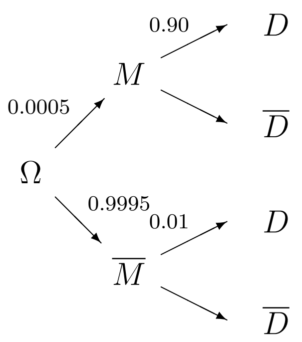
$$\begin{aligned}
P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4) &= P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \\
&= 1 - \left(4 \cdot \frac{1}{4} - \binom{4}{2} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \binom{4}{3} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{24}\right) = 1 - \frac{5}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}.
\end{aligned}$$

18 . Una màquina de rajos X, per detectar la tuberculosi, verifica:

- Dóna positiu un 90% de les vegades que una persona està realment malalta.
- Dóna positiu un 1% de les vegades que s'aplica a una persona sana.

Si la tuberculosi afecta a un 5 per 10000 de la població, calculeu la probabilitat que estigui realment malalta una persona a la qual la màquina ha donat positiu.

Anomenem els esdeveniments $\begin{cases} M = \text{"Estar malalta de tuberculosi una persona"}. \\ D = \text{"Donar positiu la màquina"}. \end{cases}$



Fórmula de Bayes:

$$\begin{aligned}
P(M/D) &= \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D/M) \cdot P(M)}{P(D)} \\
&= \frac{P(D/M) \cdot P(M)}{P(D/M) \cdot P(M) + P(D/\overline{M}) \cdot P(\overline{M})} \\
&= \frac{0.9 \cdot 0.0005}{0.9 \cdot 0.0005 + 0.01 \cdot 0.9995} = \frac{9}{2089} \approx 0.0431
\end{aligned}$$

Cal comentar que la màquina no dóna gaires indicacions que una persona estigui realment malalta si ha donat positiu. (Encerta al voltant de 4 de cada 100 casos).