Funcions exponencial i logarítmica

Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

1 Funció exponencial

Sigui $a \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, tal que $a \neq 1$. La funció exponencial $\left\{ \begin{array}{ll} f: & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) = a^x, \end{array} \right.$ queda definida per les condicions següents:

i) $a^0 = 1$.

ii) $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow a^n = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{(n)}$.

iii) $p, q \in \mathbb{N} \Longrightarrow a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

iv) $t \in \mathbb{R} - \mathbb{Q},\ t > 0 \Longrightarrow a^t = \lim\limits_{n\to\infty} a^{t_n}$, on $t_n \in \mathbb{Q}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$.

v) $r \in \mathbb{R},\ r > 0 \Longrightarrow a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

• Propietats

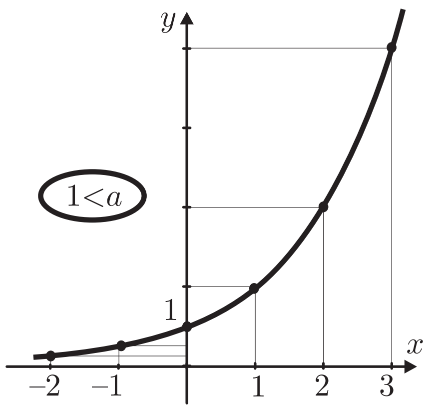
P 1. El seu domini està constituït per tots els nombres reals, i el seu recorregut pels reals positius no nuls.

P 2. $a^{s+t} = a^s \cdot a^t$; $a^{s-t} = \dfrac{a^s}{a^t}$; $(a^s)^t = a^{s \cdot t}$.

P 3. $\left\{ \begin{array}{l} a > 1 \Longrightarrow a^x \text{ és estrictament creixent.} \\ 0 < a < 1 \Longrightarrow a^x \text{ és estrictament decreixent.} \end{array} \right.$

P 4. És contínua i derivable.

P 5. $\left\{ \begin{array}{l} a > 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty \text{ i } \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0. \\ 0 < a < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0 \text{ i } \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty. \end{array} \right.$



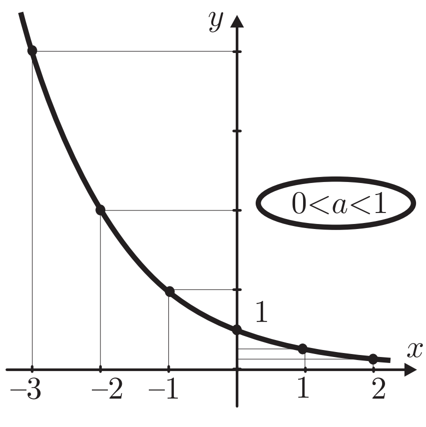
• Exercicis

1. Col·loquem 10000 euros al 5% d'interès compost anual, amb període de capitalització anual.

i) Expresseu el capital resultant en funció del nombre d'anys d'imposició i trobeu quants anys hauran de passar per tal que el capital es dupliqui?

ii) Si el període de capitalització és mensual, expresseu el capital resultant en funció del nombre d'anys d'imposició. Quin capital es tindrà al cap de 3 anys?

iii) Expresseu el capital en funció dels anys d'imposició en el cas de capitalització contínua, —és a dir quan el període de capitalització tendeix a zero—. Quin capital es tindrà, en aquest cas, al cap de 3 anys?



2. Resoleu:

i) $4^{5-2x^2} = 0.25$

ii) $5^{2x^2+3x-2} = 1$

iii) $2^{3x} - 2^{2x+\frac{1}{2}} = 0$

iv) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 30$

v) $9^x - 9 \cdot 3^x - 5832 = 0$

vi) $e^{2x} - e^x > 0$

vii) $4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 < 0$

viii) $\begin{cases} 4^x + 2^y = 34 \\ 2^x \cdot 2^{\frac{y}{2}} = 8 \end{cases}$

3. Considereu les funcions

$$f(x) = \sqrt{2^x - \frac{1}{4}} \qquad \text{i} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2^x + 9}}.$$

Trobeu el domini de f i el recorregut de g.

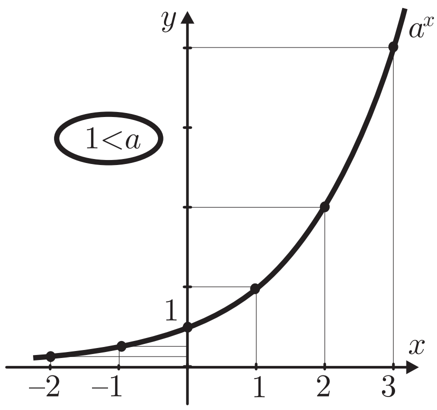
4. Trobeu amb la calculadora els valors de $2^{1.41}$ i $2^{1.42}$. Acoteu l'error que es comet si s'utilitzen per aproximar $2^{\sqrt{2}}$.

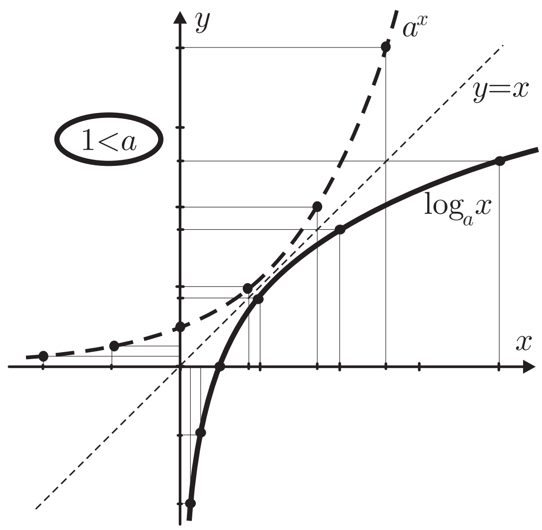
5. Representeu gràficament les funcions

$$y = 2^x, \qquad y = 2^{\frac{x}{4}}, \qquad y = 2^{x+2}, \qquad y = 2^{2x}.$$

2 Funció logarítmica

La funció exponencial té una funció inversa de domini l'interval $(0, +\infty)$ i recorregut tots els nombres reals. Això s'observa molt bé sobre el gràfic de l'exponencial quan li apliquem una simetria d'eix la recta $y = x$, per obtenir el gràfic de la inversa. Aquesta nova funció, inversa de l'exponencial rep el nom de *funció logarítmica*.





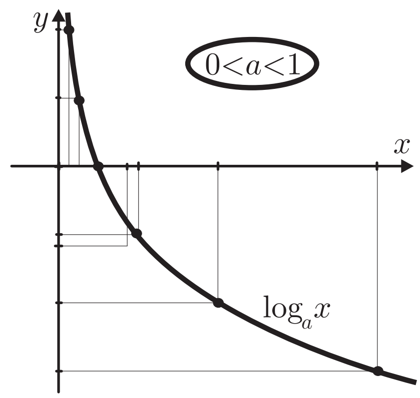
Es representa amb la notació:

$$f(x) = \log_a x, \qquad \text{la qual cosa equival a} \qquad a^{f(x)} = x,$$

en què a rep el nom de *base* del logaritme.

Exemple: $\log_2 32 = 5 \iff 2^5 = 32$. $\log_{10} 0.1 = -1 \iff 10^{-1} = 0.1$.

• Propietats



P 1. El seu domini està constituït per l'interval $(0, +\infty)$ i el seu recorregut és $\mathbb{R}$.

P 2. a) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.
b) $x, y > 0 \Longrightarrow \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
c) $x, y > 0 \Longrightarrow \log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.
d) $x > 0 \Longrightarrow \log_a (x^y) = y \cdot \log_a x$.

P 3. $\begin{cases} a > 1 \Longrightarrow \log_a x \text{ és estrictament creixent.} \\ 0 < a < 1 \Longrightarrow \log_a x \text{ és estrictament decreixent.} \end{cases}$

P 4. És contínua i derivable.

P 5. $\begin{cases} a > 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \text{ i } \lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty. \\ 0 < a < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \text{ i } \lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty. \end{cases}$

• Relació entre logaritmes de bases diferents

En les calculadores de butxaca es poden calcular logaritmes decimals (base 10) i logaritmes neperians (base e), els quals es representen amb les notacions **log** i **ln**. Podem trobar una relació entre logaritmes de bases diferents que permetrà el càlcul del logaritme d'un nombre en qualsevol base. Concretament, demostrarem que

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}\,.$$

Efectivament,

$$\left.\begin{array}{l} \log_a x = y \Longleftrightarrow a^y = x \\ \log_b x = z \Longleftrightarrow b^z = x \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad a^y = b^z \Longrightarrow \log_b a^y = \log_b b^z$$

$$\Longrightarrow \quad y \cdot \log_b a = z \cdot \log_b b \Longrightarrow y = \frac{z}{\log_b a} \Longrightarrow \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Exemple: Càlcul de $\log_2 10$.

$$\log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} \underset{(*)}{=} \frac{1}{0.301030} = 3.321928.$$

$(*)$ La calculadora proporciona el resultat $\log 2 = 0.301030$.

- **Exercicis**

1. Col·loquem un capital al 8% d'interès compost anual, amb període de capitalització anual. Utilitzeu el càlcul de logaritmes per calcular el temps que tardarà a triplicar-se. Resoleu la mateixa qüestió si l'interès és continu.

2. Trobeu el domini de les funcions:

a) $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2-1}{x+2}\right)$ b) $g(x) = \sqrt{\log\left(x^2-9\right)}$ c) $h(x) = \log(x-3) + \log(x-1)$

3. Si sabem que $\log 2 = 0.301030$ trobeu sense calculadora el valor de $\log(0.125)$ i $\log 5$.

4. Si sabem que $\log_a\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{4}$, calculeu el valor d'$a$.

5. Resoleu:

i) $\log(3x+2) - \log(2x-1) = 2 - \log 2$

ii) $\log_x(8-2x) = 2$

iii) $\log_x(4-3x) = 2$

iv) $2\log x + \log(x-3) = 2 - \log 2$

v) $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

vi) $\begin{cases} \log_{x+2}(y) = 2 \\ \log_y(8x+4) = 1 \end{cases}$

vii) $e^{3x+5} = 48$.

6. Calculeu el valor de $\log_6 4327$.

7. Trobeu la funció inversa de $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x+5}{x-1}\right)$.

• Solucions als exercicis

Sobre funció exponencial

1. Recordem la fórmula que proporciona l'evolució d'un capital sotmès a interès compost amb diferents períodes de capitalització i la que resulta quan la capitalització és contínua.

$$C(t) = C(0)\left(1+\frac{i}{n}\right)^{n\cdot t}, \qquad C(t) = C(0)\cdot e^{i\cdot t}.$$

i) $20000 = C(t) = 10000\cdot 1.05^t \Longrightarrow 1.05^t = 2$. Si substituïm valors obtenim

$$C(14)\approx 19799, \quad C(15)\approx 20789 \Longrightarrow \boxed{\text{Caldrà que passin 15 anys}}.$$

Si l'equació es resol amb l'ajut de la funció logaritme obtenim

$$t = \log_{1.05} 2 = \frac{\log 2}{\log 1.05} = 14.2067 \Longrightarrow \boxed{\text{Caldrà que passin 15 anys}}.$$

ii) $C(t) = 10000\left(1+\dfrac{0.05}{12}\right)^{12t} = 1000\left(\dfrac{12.05}{12}\right)^{12t} \approx 10000\cdot 1.0041667^{12t}$.

Llavors $C(3) = 10000\cdot 1.0041667^{36} \approx \boxed{11614.72\,€}$.

iii) $C(t) = 10000\cdot e^{0.05t} \Longrightarrow C(3) = 10000\cdot e^{0.15} \approx \boxed{11618.34\,€}$.

2. i) $x=\pm\sqrt{3}$ ii) $x=\frac{1}{2}$ o $x=-2$ iii) $x=\frac{1}{2}$ iv) $x=2$ v) $x=4$ vi) $x>0$ vii) $x\in(1,3)$ viii) $x=\frac{1}{2}$, $y=5$; $x=\frac{5}{2}$, $y=1$

3. $[-2,+\infty)$; $\left(0,\frac{1}{3}\right)$

4. $2.6573716, 2.6758551, 1.85\cdot 10^{-2}$

Sobre funció logarítmica

1. En 15 anys (14.2749) s'haurà triplicat amb una mica d'excés. Si l'interès és continu, n'hi ha prou amb 14 anys (13.7327).

2. a) $(-2,-1)\cup(1,+\infty)$ b) $(-\infty,-\sqrt{10})\cup(\sqrt{10},+\infty)$ c) $(3,+\infty)$

3. $\log(0.125) = \log\left(\frac{1}{8}\right) = \log 1 - \log 2^3 = 0-3\cdot 0.301030 = -0.903090$; $\log 5 = 1-0.301030 = 0.698970$

4. $a=81$

5. i) $\frac{52}{97}$ ii) $x=2$ iii) $\nexists x$ iv) $x=5$ v) $x=10\sqrt{10}$, $y=\sqrt{10}$ vi) $x=0$, $y=4$; $x=4$; $y=36$ vii) $x = frac\ln 48 - 53 \approx -0.3763$

6. 4.67285

7. $f^{-1}(x) = \dfrac{e^x+5}{e^x-3}$