Polinomis. Descomposició factorial i signe

Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

1 Introducció

Recordem que anomenàvem *polinomis de coeficients reals amb la indeterminada* x a les expressions del tipus:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \text{ en què } a_k \in \mathbb{R} \text{ i } n \in \mathbb{N}.$$

No concretàvem ni aprofondíem en el significat de la lletra o *indeterminada* x. En el nostre cas ens conformàvem a entendre-la com una variable numèrica sense determinar.
Anomenàvem el valor de n, *grau* del polinomi. Els nombres a_k rebien el nom de coeficients del polinomi, i l'expressió $a_k x^k$ s'anomenava *terme de grau* k. Aquests objectes es podien sumar, sumant els coeficients dels termes de mateix grau.

Exemple 1 *Suma de* $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x - 10$ *i* $q(x) = 5x^3 + x^2 + 2x + 4$.

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (3+0)x^4 + (-2+5)x^3 + (0+1)x^2 + (7+2)x + (-10+4) \\ &= 3x^4 + 3x^3 + x^2 + 9x - 6. \end{aligned}$$

També es podien multiplicar considerant tots els productes possibles entre els termes del polinomi i agrupant-los pel seu grau:

Exemple 2 *Producte de* $p(x) = 5x^3 - 2x + 10$ *i* $q(x) = 2x^2 + 3x - 4$.

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= \big(5\cdot 2\big)x^5 + \big(5\cdot 3\big)x^4 + \big(5\cdot(-4) + (-2)\cdot 2\big)x^3 + \big((-2)\cdot 3 + 10\cdot 2\big)x^2 \\ &\quad + \big((-2)\cdot(-4) + 10\cdot 3\big)x + \big(10\cdot(-4)\big) \\ &= 10x^5 + 15x^4 - 24x^3 + 14x^2 + 38x - 40. \end{aligned}$$

2 Descomposició factorial d'un polinomi

2.1 Divisió entera de polinomis

Donats els polinomis $p(x)$ i $d(x)$ es pot demostrar que existeixen dos polinomis $q(x)$ i $r(x)$ tals que:

$$\begin{array}{ll} 1) & p(x) = d(x)\cdot q(x) + r(x) \\ 2) & 0 \le \text{grau}(r(x)) < \text{grau}(d(x)) \end{array}$$

L'operació d'obtenir els dos polinomis $q(x)$ i $r(x)$ a partir dels polinomis inicials s'anomena *divisió entera* dels polinomis $p(x)$ i $d(x)$. Els polinomis $q(x)$ i $r(x)$ reben, respectivament, els noms de *quocient* i *residu* de la divisió.

Exemple 3 *Divisió entera de* $p(x) = x^4 - 8x^2 + x + 7$ *entre* $d(x) = x^2 - 2x$.

- Càlcul mitjançant la definició:

Observem que el grau del quocient ha de ser $4 - 2 = 2$ i el del residu ha de ser menor que 2. A més, en el quocient el coeficient de grau 2 ha de ser $\frac{1}{1} = 1$. Llavors,

$$x^4 - 8x^2 + x + 7 = (x^2 - 2x)(x^2 + bx + c) + (mx + s) = x^4 + (b-2)x^3 + (c-2b)x^2 + (m-2c)x + s.$$

Per tant, si igualem els coeficients dels termes de mateix grau, obtenim

$$\left.\begin{array}{l} b - 2 = 0 \\ c - 2b = -8 \\ m - 2c = 1 \\ s = 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} b = 2 \\ c = -8 + 2b = -4 \\ m = 1 + 2c = -7 \\ s = 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} q(x) = x^2 + 2x - 4 \\ r(x) = -7x + 7 \end{array}}.$$

- Càlcul mitjançant l'algoritme clàssic:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
x^4 & & & - & 8x^2 & + & x & + & 7 & x^2 - 2x \\ \cline{10-10}
-x^4 & + & 2x^3 & & & & & & & x^2 + 2x - 4 \\ \cline{1-5}
& & 2x^3 & - & 8x^2 & & & & & \\
& - & 2x^3 & + & 4x^2 & & & & & \\ \cline{2-7}
& & & - & 4x^2 & + & x & & & \\
& & & & 4x^2 & - & 8x & & & \\ \cline{4-9}
& & & & & - & 7x & + & 7 &
\end{array}$$

2.2 Regla de Ruffini

Si observem l'algoritme clàssic de divisió notem que allò que importa quan dividim, són les diferents operacions a les quals sotmetem els coeficients. En el cas particular en què el divisor és del tipus $x - a$ podem aconseguir simplificar la manera de portar els càlculs per efectuar la divisió, mitjançant la regla de Ruffini. Observem-ho amb un exemple.

Exemple 4 *Divisió entre* $p(x) = 2x^3 + x^2 - 15x - 10$ *entre* $d(x) = x - 3$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 + & x^2 - & 15x - & 10 & x - 3 \\ \cline{5-5}
-2x^3 + & 6x^2 & & & 2x^2 + 7x + 6 \\ \cline{1-2}
& 7x^2 - & 15x & & \\
& -7x^2 + & 21x & & \\ \cline{2-4}
& & 6x - & 10 & \\
& & -6x + & 18 & \\ \cline{3-4}
& & & 8 &
\end{array}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 1 & -15 & -10 \\
3 & & 6 & 21 & 18 \\ \hline
 & 2 & 7 & 6 & 8
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 1 & -15 & -10 \\
 & & \downarrow + & \downarrow + & \downarrow + \\
3 & & 6 & 21 & 18 \\ \hline
 & 2 & 7 & 6 & 8
\end{array}$$

Un dels casos que ens interessarà estudiar són les divisions $p(x)$ entre $x-a$ que tenen residu 0. Una condició necessària perquè $a \in \mathbb{Z}$ proporcioni residu 0 és què a sigui divisor del coeficient de grau 0 del dividend $p(x)$.

2.3 Arrels d'un polinomi

De cara a aconseguir la descomposició factorial d'un polinomi és de gran importància la relació d'aquesta descomposició amb les arrels del polinomi, junt amb el teorema del residu.

Definició 1 *El nombre $a \in \mathbb{R}$ és arrel del polinomi $p(x)$ ssi $p(a) = 0$.*

Exemple 5 *a) $x = 3$ és arrel del polinomi $p(x) = x^3 - 5x - 12$.*

b) Les arrels de $p(x) = x^2 - x - 12$ són $x = -3$ i $x = 4$.

c) $p(x) = x^4 + x^2 + 16$ no té arrels.

Efectivament,
a) $p(3) = 3^3 - 5 \cdot 3 - 12 = 27 - 15 - 12 = 27 - 27 = 0$.
b) $x^2 - x - 12 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3. \end{cases}$
c) $p(x) \neq 0, \forall x$, perquè $x^4 + x^2 + 16 \geq 0 + 0 + 16 = 16 > 0$.

2.4 Teorema del residu

Aquest teorema permet trobar el residu r de la divisió del polinomi $p(x)$ entre el polinomi $x - a$, sense fer la divisió, amb l'afirmació que $p(a) = r$. En el cas particular en què $a \in \mathbb{R}$ és una arrel del polinomi $p(x)$, llavors el residu és $r = p(a) = 0$ i, per tant, aconseguim una primera descomposició en factors del polinomi $p(x)$. Una justificació d'aquestes afirmacions podria ser:

$$p(x) = q(x) \cdot (x-a) + r \Longrightarrow p(a) = q(a) \cdot 0 + r \Longrightarrow \boxed{p(a) = r}$$
$$a \text{ arrel de } p(x) \Longrightarrow r = p(a) = 0 \Longrightarrow \boxed{p(x) = q(x) \cdot (x-a)}$$

D'aquesta manera per a cada arrel $a \in \mathbb{R}$ aconseguim un factor $x - a$. Es pot demostrar que qualsevol polinomi de coeficients reals es pot descompondre en factors de grau 1 o 2.[1] Un cop aconseguits factors de grau 1 o 2, és possible que aquests últims no tinguin arrels reals i, per tant, no admetin descomposició en factors de grau 1. S'anomenen polinomis primers els polinomis de grau 2 que no tenen arrels reals i els de grau 1.

[1] Aquest resultat és una de les possibles formulacions del *teorema fonamental de l'àlgebra*. Les seva primera formulació va ser feta per Albert Girard (1629) i els primers intents de demostració es produïren en el s. XVIII, de la mà, entre d'altres, de d'Alembert (1746) i Euler (1749). La primera prova satisfactòria l'aconseguí Gauss (1799). Hi va haver intents de negar la veritat del teorema com el que va protagotnizar Leibniz l'any 1702 amb el polinomi $x^4 + a^4$ o Bernoulli (1742) amb el polinomi $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$.

Exemple 6 *Descomposició factorial de* $p(x) = x^3 - 3x^3 + 4x - 12$.

Apliquem la regla de Ruffini, per trobar el primer factor. Recordem que els candidats enters a ser arrels de $p(x)$ i, per tant, a l'obtenció de residu 0, són els divisors del terme independent -12 d'aquest polinomi.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 4 & -12 \\ 3 & & 3 & 0 & 12 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

Una primera descomposició del polinomi és

$$p(x) = (x-3)(x^2+4).$$

El segon factor compleix $p(x) = x^2 + 4 \geq 4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Per tant, no té arrels i $p(x)$ no admet més descomposició.

3 Exercicis

1. Sigui el polinomi $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

a) Trobeu les seves arrels i la seva descomposició factorial.
b) Resoleu la inequació $p(x) \geq 0$, amb l'ajut dels gràfics de rectes i/o paràboles.
c) Obteniu-ne un esquema gràfic.

2. Sigui el polinomi $p(x) = x^5 + 3x^3 - 4x$.

a) Trobeu les seves arrels i la seva descomposició factorial.
b) Resoleu la inequació $p(x) \leq 0$, amb l'ajut dels gràfics de rectes i/o paràboles.
c) Obteniu-ne un esquema gràfic.

3. Donat el polinomi $p(x) = x^4 + 5x^2 - 36$,

a) Trobeu les seves arrels i la seva descomposició factorial.
b) Resoleu la inequació $p(x) \leq 0$, amb l'ajut dels gràfics de rectes i/o paràboles.
c) Obteniu-ne un esquema gràfic.

4. Considereu el polinomi $\quad p(x) = x^4 - 23x^3 + 160x^2 - 300x$.

Trobeu les seves arrels, estudieu-ne el signe i feu-ne un esquema gràfic.

4 Resolució dels exercicis

1. a) Apliquem la regla de Ruffini, per trobar una arrel i els primers factors. Recordem que els candidats enters a ser arrels de $p(x)$ són els divisors del terme independent -6 d'aquest polinomi.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ -1 & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Una arrel del polinomi és $x = -1$ i una primera descomposició és

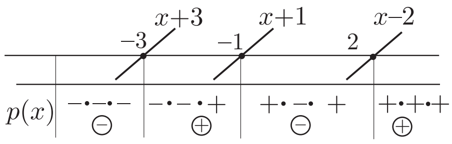
$$p(x) = (x+1)(x^2+x-6).$$

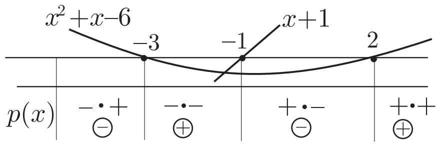
Cerquem les arrels del segon factor, la qual cosa permetrà donar la descomposició final:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \left.\begin{matrix} \nearrow & 2 \\ \searrow & -3 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3).$$

Consegüentment, $\boxed{\text{Arrels: } -3, -1, 2}$ i $\boxed{p(x) = (x+1)(x-2)(x+3)}$.

b) Presentem l'estudi del signe mitjançant l'estudi dels tres factors per separat i, alternativament, dels dos factors de la primera descomposició:





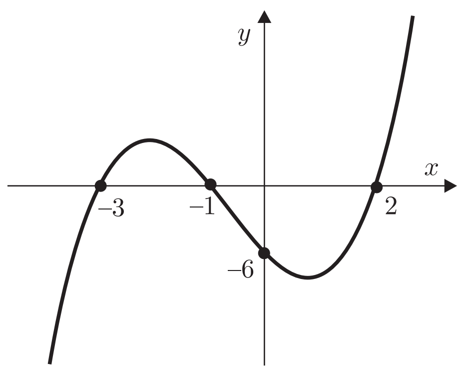
D'aquí en resulta $p(x) \geq 0 \Longleftrightarrow -3 \leq x \leq -1$ o $x \geq 2$, és a dir

$$\boxed{x \in [\,-3, -1\,] \cup [\,2, +\infty\,)}.$$

c) Les arrels del polinomi proporcionen els talls amb l'eix OX. En ser $p(0) = -6$, tenim el tall $(0, 6)$ amb l'eix OY. Observem, també, els resultats de l'estudi del signe del polinomi que situaran el gràfic sobre o sota l'eix OX. A més, el comportament de $p(x)$ quan x pren valors arbitràriament grans en valor absolut és

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty.$$

De tot això en resulta l'esquema adjunt.



2. a) Una primera descomposició és

$$p(x) = x(x^4 + 3x^2 - 4).$$

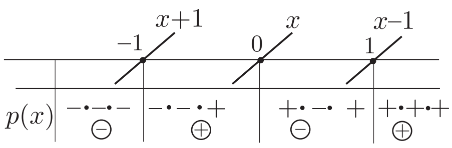
Cerquem les arrels del segon factor, resolent l'equació biquadrada que resulta:

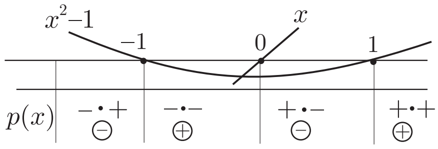
$$x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \left.\begin{matrix} \nearrow & 1 \\ \searrow & -4 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow p(x) = x(x^4 + 3x^2 - 4) = x(x^2-1)(x^2+4).$$

En ser $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ i $x^2 + 4 > 0$, obtenim

$$\boxed{p(x) = x(x-1)(x+1)(x^2+4)} \quad \text{i} \quad \boxed{\text{Arrels: } 0, 1, -1}.$$

b) Sabem que $x^2 + 4 > 0$. Per tant, presentem l'estudi del signe mitjançant l'estudi dels altres factors per separat i, alternativament, dels altres dos factors de la primera descomposició:





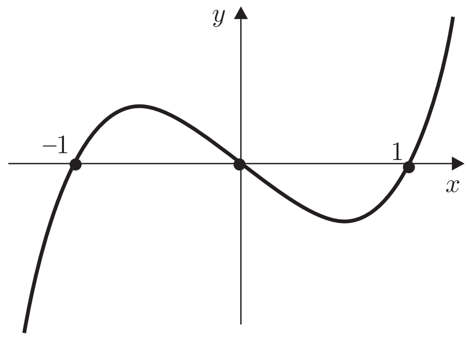
D'aquí en resulta $\qquad p(x) \leq 0 \Longleftrightarrow x \leq -1 \quad \text{o} \quad 0 \leq x \leq 1$, és a dir

$$\boxed{x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]}.$$

c) Les arrels del polinomi proporcionen els talls amb l'eix OX. En ser $p(0) = 0$, tenim el tall $(0, 0)$ amb l'eix OY. Observem el signe i el comportament de $p(x)$ quan x pren valors arbitràriament grans en valor absolut és

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty.$$

De tot això en resulta l'esquema adjunt.



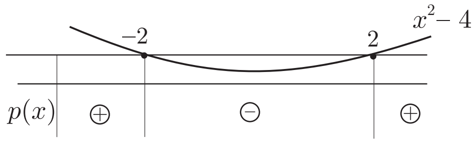
3. a) Cerquem les arrels de $p(x)$, resolent l'equació biquadrada $p(x) = 0$:

$$x^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2} = \left.\begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow -9 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow p(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 9).$$

En ser $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \quad$ i $\quad x^2 + 9 > 0$, obtenim

$$\boxed{p(x) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 9)} \quad \text{i} \quad \boxed{\text{Arrels: } 2, -2}.$$

b) En ser $x^2 + 9 > 0$, només cal efectuar l'estudi de $x^2 - 4 \leq 0$:

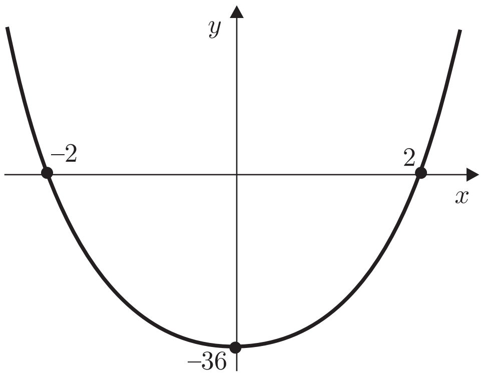


D'aquí en resulta $\qquad p(x) \leq 0 \Longleftrightarrow -2 \leq x \leq 2$, és a dir $\boxed{x \in [-2, 2]}$.

c) Els talls amb els eixos són $(2, 0)$, $(-2, 0)$ i $(0, -36)$. A partir de l'estudi del signe i que

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} p(x) = +\infty.$$

De tot això en resulta l'esquema adjunt.



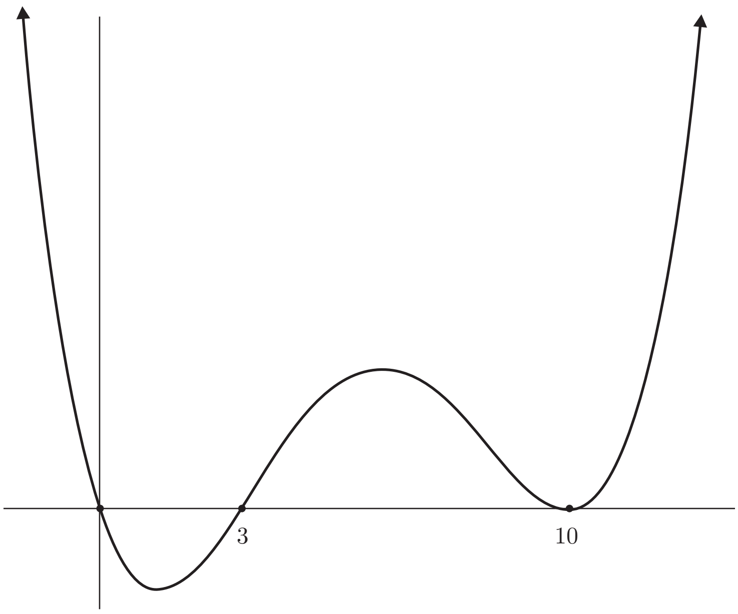
4. a) $p(x) = x^4 - 23x^3 + 160x^2 - 300x = x(x^3 - 23x^2 + 160x - 300)$. Per estudiar el signe trobem la descomposició factorial del segon factor amb l'ajut de la regla de Ruffini, la qual cosa també ens proporcionarà les arrels:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -23 & 160 & -300 \\ 10 & & 10 & -130 & 300 \\ \hline & 1 & -13 & 30 & 0 \\ 3 & & 3 & -30 & \\ \hline & 1 & -10 & 0 & \end{array} \quad \Longrightarrow p(x) = x(x-10)^2(x-3).$$

Conseqüentment, les arrels de $p(x)$ són $\boxed{x=0,\ x=10,\ x=3}$. No detallem l'estudi del signe que resulta ser

$$\boxed{\begin{array}{l} p(x) > 0 \Longleftrightarrow (-\infty, 0) \cup (3, 10) \cup (10, +\infty) \\ p(x) < 0 \Longleftrightarrow (0, 3)\,. \end{array}}$$

És immediat que quan x tendeix a $\pm\infty$, $p(x)$ tendeix a $+\infty$. De tota la informació recollida en resulta el gràfic adjunt.



Índex