Sobre límits de funcions. Continuïtat i asímptotes

Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

1 Introducció

La necessitat d'introduir el concepte de límit apareix en l'estudi dels valors $f(x)$ d'una funció f quan la variable x pren valors en l'entorn d'un punt $x_0 \in \mathbb{R}$ o quan x creix (o decreix) per damunt (o per sota) de qualsevol valor real. Això passa en el tractament, entre d'altres, de problemes que es poden resoldre amb funcions tals que un punt $x_0 \in \mathbb{R}$ no pertany al seu domini, però hi pertanyen els punts que es troben al voltant de x_0 i interessa esbrinar el comportament de la funció en aquests punts.

Exemple 1.1 *Estudi de la funció* $f(x) = \dfrac{|x^3 - 1|}{x - 1}$.

Observem que no existeix $f(1) = \frac{0}{0}$. En canvi podem estudiar el comportament de $f(x)$ quan x pren valors molt pròxims a 1, en unes altres paraules, "quan x tendeix a 1". Utilitzarem la notació

$$\lim_{x \to 1} f(x), \text{ la qual es llegeix } \textit{límit de } f \textit{ de } x \textit{ quan } x \textit{ tendeix a 1}.$$

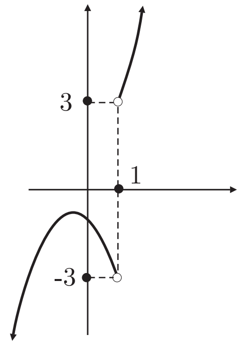
Observem que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{|(x-1)\overbrace{(x^2+x+1)}^{>0}|}{x-1} = \frac{|(x-1)|(x^2+x+1)}{x-1} = \\ &= \begin{cases} \dfrac{-(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} & , x < 1 \\ \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} & , x > 1 \end{cases} = \begin{cases} -(x^2+x+1) & , x < 1 \\ x^2+x+1 & , x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

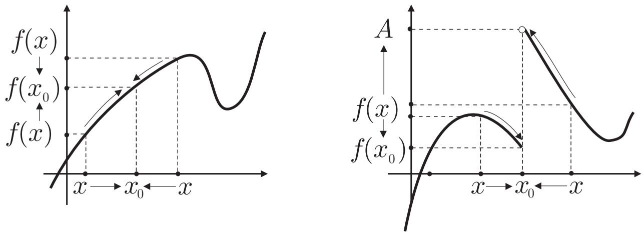
Llavors, si estudiem la "tendència" de $f(x)$ per l'esquerra i dreta de 1, obtenim

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (-x^2 - x - 1) = -1 - 1 - 1 = -3. \\ \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (x^2 + x + 1) = 1 + 1 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Així, tot i no existir $f(1)$, sabem que passa a la vora de 1. Concretament, les imatges s'apropen a -3 i 3, depenent del costat de 1 que consideri. Amb el gràfic dels dos trossos de paràbola que descriuen la funció es visualitza l'estudi fet. En aquest exemple, també trobem una primera aproximació al concepte de continuïtat. Observem que per traçar aquest gràfic no n'hi ha prou amb una sola traçada. L'estudi del límit ens informa que calen dues traçades. O sigui que el gràfic presenta un punt en que es trenca la continuïtat del traç.



Així una funció serà contínua en un punt x_0 si, quan la variable x tendeix a x_0, la seva imatge tendeix a $f(x_0)$. En la figura inferior, trobem una funció contínua en tots els seus punts i una que no ho és en un punt x_0, en no coincidir el límit amb la imatge.



2 Límits de funcions

Formalitzarem el concepte de límit d'una funció i en presentarem algunes propietats. Prèviament, hem de definir el límit d'una successió x_n de nombres reals.

Definició 2.1 *Una successió $x_n \in \mathbb{R}$ tendeix a $A \in \mathbb{R}$, si per a qualsevol entorn de A trobem un nombre infinit de termes de la successió dins de l'entorn i un nombre finit de termes de la successió fora de l'entorn. Això es presenta amb la notació*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

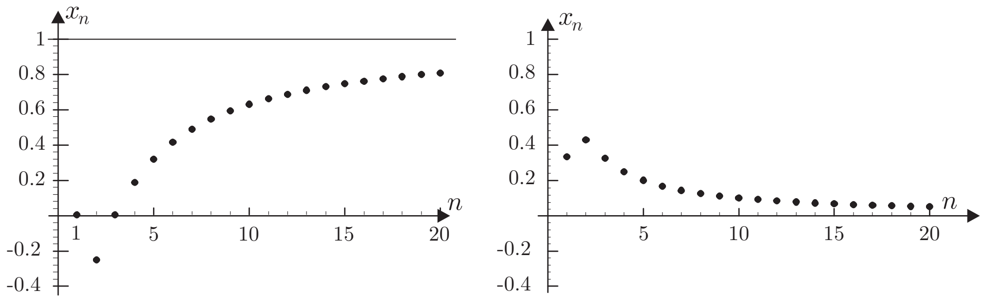
En el cas que per a qualsevol $K \in \mathbb{R}$ trobem infinitat de termes de la successió x_n més grans que K i un nombre finit de termes de la successió més petits que K, diem que la successió té límit igual a més infinit. Es representa,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

D'una manera semblant podem definir el límit igual a menys infinit; només cal intercanviar en la definició anterior les paraules "grans" i "petits".

Exemple 2.1 *Càlcul de $\lim_{n\to\infty} x_n$, per a les successions $x_n = \dfrac{n^2-4n+3}{n^2}$ i $x_n = \dfrac{n^3+1}{n^4+5}$.*

Podem representar les successions en un pla amb uns eixos de coordenades, utilitzant l'eix d'abscisses per representar el lloc n que ocupa el terme x_n en la successió, i l'eix d'ordenades per representar el valor x_n, i observar la tendència dels valors x_n quan n creix.

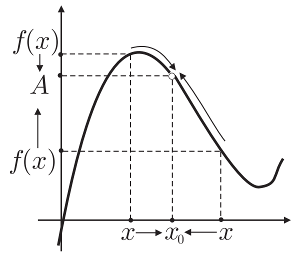


Sembla que, en el primer cas, x_n creix a partir del segon terme, que cada vegada creix més a poc a poc i que tots els seus valors es mantenen per sota del 1 i s'apropen a 1. En el segon cas sembla que la successió x_n tendeix a 0. Fem una comprovació amb l'ajut de l'àlgebra:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-4n+3}{n^2} &= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2} = 1 - 0 + 0 \\
\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^4+5} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3+1}{n^4}}{\frac{n^4+5}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{5}{n^4}} = \frac{0+0}{1+0} = 0.
\end{aligned}$$

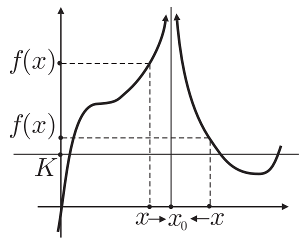
Definició 2.2 *Una funció f té límit $A \in \mathbb{R}$ quan x tendeix a x_0, si per a qualsevol successió de punts x_n que tendeix a x_0 es compleix que la successió de les seves imatges $f(x_n)$ tendeix a A. Això es presenta amb la notació*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

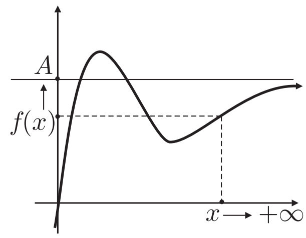


Definició 2.3 *Una funció f té límit $+\infty$ quan x tendeix a x_0, si per a qualsevol successió de punts x_n que tendeix a x_0 i per a qualsevol $K > 0$, es compleix que existeix un terme de la successió de imatges $f(x_n)$ a partir del qual, els que el segueixen, són més grans que K. Això es presenta amb la notació*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$



Les definicions de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, i les de límits de funcions quan x tendeix a $+\infty$ o $-\infty$ s'establirien de manera semblant. A la figura adjunta visualitzem $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.



De la mateixa manera es definirien els límits laterals, —per la dreta o per l'esquerra—, en un punt x_0, amb la introducció de la restricció que els valors de les successions x_n que tendeixen a x_0 només ho fan per un cantó, el dels valors més petits que x_0 o el dels valors més grans. Aquests límits laterals es presenten amb les notacions:

- Límit per la dreta de $f(x)$ en x_0: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.
- Límit per l'esquerra de $f(x)$ en x_0: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

Una primera propietat que es pot deduir d'aquestes definicions és que si els límits laterals, en un punt a, coincideixen, llavors existeix $\lim_{x \to a} f(x)$ i coincideix amb els límits laterals.

2.1 Àlgebra de límits

El teorema següent presenta algunes propietats dels límits, utilitzades en el seu càlcul, les quals no demostrem i es poden percebre intuïtivament donant valors a la variable x.

Teorema 2.1 *Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ i $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B \in \mathbb{R}$, llavors:*

a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$.

b) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$.

c) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)/g(x)) = A/B$, *si* $B \neq 0$.

d) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = A^B$, *si* $A \neq 0$ *o* $B \neq 0$.

Cal tenir en compte que quan A i/o B no satisfan les hipòtesis donades i apliquem les regles anteriors, s'obtenen expressions formals del tipus

$$\frac{0}{0}\,,\ \frac{\infty}{\infty}\,,\ \infty - \infty\,,\ 1^\infty\,,\ 0^0\,,\ \infty^0\,,$$

i el valor del límit, si existeix, és indeterminat. Llavors, cal transformar l'expressió de la funció en una altra d'equivalent per tal d'esbrinar-lo. Representem en les taules següents, les igualtats del teorema 2.1 i d'altres, algunes relacionades amb l'aparició d'indeterminacions. Els casos determinats es poden demostrar a partir de les definicions de límit donades més amunt. Notem d'altra banda que són força intuïtives i que, per tant, no es pretén la seva memorització sinó el seu ús de manera raonada.

Teorema 2.2

$\lim_{x\to a}$ $f(x)$ \ $g(x)$: $+$	$-\infty$	B	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\boxed{\infty-\infty}$
A	$-\infty$	$A+B$	$+\infty$
$+\infty$	$\boxed{\infty-\infty}$	$+\infty$	$+\infty$

$\lim_{x\to a}$ $f(x)$ \ $g(x)$: $\times$	$-\infty$	0	B	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$\boxed{0\cdot\infty}$	$\pm\infty$	$-\infty$
0	$\boxed{0\cdot\infty}$	0	0	$\boxed{0\cdot\infty}$
A	$\pm\infty$	0	$A\cdot B$	$\pm\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$\boxed{0\cdot\infty}$	$\pm\infty$	$+\infty$

$\lim_{x\to a}$ $f(x)$ \ $g(x)$: $\div$	$-\infty$	0	B	$+\infty$
$-\infty$	$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$
0	0	$\boxed{\frac{0}{0}}$	0	0
A	0	$\pm\infty$	$\frac{A}{B}$	0
$+\infty$	$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

$\lim_{x\to a}$ $f(x)$ \ $g(x)$: $f(x)^{g(x)}$	$-\infty$	$B<0$	0	$B>0$	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$+\infty$	$\boxed{0^0}$	0	0
$0<A<1$	$+\infty$	A^B	1	A^B	0
1	$\boxed{1^\infty}$	1	1	1	$\boxed{1^\infty}$
$A>1$	0	A^B	1	A^B	$+\infty$
$+\infty$	0	0	$\boxed{\infty^0}$	$+\infty$	$+\infty$

Exemple 2.2 *Càlcul d'alguns límits*

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^5-x^3+4x^2-8)$ *b)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^2}{2x^3+1}$. *c)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{x^2+x-20}$.

d) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-8x-9}{3-\sqrt{x}}$. *e)* $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x}-1\right)^{\frac{1}{1-x}}$.

---

a) $$\lim_{x\to-\infty}(3x^5-x^3+4x^2-8)=\lim_{x\to-\infty}x^5\left(3-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{8}{x^5}\right)=$$
$$=-\infty\cdot(3-0+0-0)=-\infty\cdot 3=-\infty\,.$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2}{2x^3+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-x^2}{x^3}}{\frac{2x^3+1}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x^3}}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}\,.$$

c) $$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2+x-20}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{x(x-4)}{(x-4)(x+5)}=\lim_{x\to 4}\frac{x}{x+5}=\frac{4}{9}\,.$$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 9}\frac{x^2-8x-9}{3-\sqrt{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(x+1)(3+\sqrt{x})}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}=$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(x+1)(3+\sqrt{x})}{(9-x)}=\lim_{x\to 9}-(x+1)(3+\sqrt{x})=-10\cdot 6=-60\,.$$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x-1}\right)^{\frac{1}{1-x}}=\left(0^+\right)^{\left(\frac{1}{0^-}\right)}=\left(0^+\right)^{-\infty}=+\infty\,.$

□

2.2 Exercicis

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x+1}{x^3+3x^2-x}$ Solució: 0.

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-1}{2x+1}-\frac{2x^2-5}{x+3}$ Solució: 5.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{2x-6}$ Solució: $\frac{7}{2}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{1}{x-2}}$ Solució: No existeix.

e) $\displaystyle\lim_{x\to -a}\frac{x^3+a^3}{x^2-a^2}$ Solució: $-\frac{3a}{2}$.

f) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-}\frac{x}{x-3}$ Solució: $-\infty$.

g) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ Solució: 4.

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{x^2+x}\right)^{\frac{x-1}{x^2}}$ Solució: $+\infty$.

3 Continuïtat en un punt. Tipus de discontinuïtats

3.1 Definició i teoremes

Definició 3.1 – *Una funció f és contínua en un punt $x_0\in\mathbb{R}$ si existeix $f(x_0)$ i es compleix*

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\,.$$

– Una funció f és contínua en un conjunt A si és contínua en tots els punts del conjunt A.

Teorema 3.1 – *La suma, el producte i la composició de funcions contínues és una funció contínua. El quocient de funcions contínues és una funció contínua en tots els punts en què la funció denominador és diferent de 0.*

– Les funcions $f(x)=a$, $f(x)=x$, $f(x)=|x|$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $f(x)=\cos x$ són contínues.

Unes primeres conseqüències d'aquest teorema són:

- Les funcions polinòmiques són contínues.
- Les funcions racionals, és a dir les fraccions de funcions polinòmiques són contínues en tots els punta que no anul·len el denominador.
- La funció $f(x)=\tan x$ és contínua en els punts $x\neq\frac{k\cdot\pi}{2}$, en què $k\in\mathbb{Z}$.
- Si $f(x)$ és contínua, la funció $\psi(x)=|f(x)|$ és contínua.

3.2 Tipus de discontinuïtats

Els casos següents presenten algunes situacions en què no es satisfà la continuïtat en algun punt, en fallar l'existència de límit o de imatge o d'igualtat entre els dos. Llavors, la funció s'anomena *discontínua* en el punt estudiat.

– **Discontinuïtat de salt finit:** Esdevé quan

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = B \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad A \neq B.$$

– **Discontinuïtat evitable:** Esdevé quan

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = K \in \mathbb{R} \quad \text{i la imatge no existeix, o} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

– **Discontinuïtat asimptòtica:** (També, de salt infinit). Esdevé quan algun dels límits laterals en x_0 és $+\infty$ o $-\infty$. En aquest cas es diu que la corba té una *asímptota* d'equació $x = x_0$

Exemple 3.1 *Estudi de les discontinuïtats de les funcions*

a) $f(x) = \dfrac{|x^2 - x|}{x}$ *b)* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ *c)* $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x}$

a) Per tots els resultats anteriors sabem que l'únic punt de discontinuïtat es troba en $x = 0$. Estudiem-ne el tipus:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x^2 - x|}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x||x-1|}{x} = \lim_{x\to 0^-} -|x-1| = -1$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x^2 - x|}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x||x-1|}{x} = \lim_{x\to 0^+} |x-1| = 1.$$

En ser les límits laterals diferents i finits, la discontinuïtat en $x = 1$ és de salt finit.

b) Pels teoremes anteriors, si hi ha discontinuïtat es troba en $x = 0$, perquè és el punt en què la funció canvia de definició:

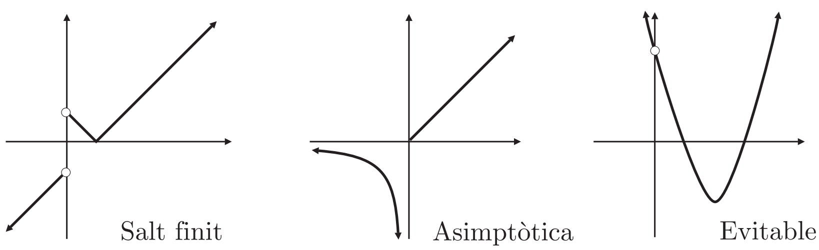
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

En existir un límit lateral igual a $-\infty$, en $x = 0$ hi ha una discontinuïtat asimptòtica.

c) Aquí l'únic punt de discontinuïtat es troba en $x = 0$ perquè $\nexists f(0)$ i

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2 - 4x + 3)}{x} = \lim_{x\to 0}(x^2 - 4x + 3) = 3\,.$$

Per tant, tenim una discontinuïtat evitable en el punt $x = 0$.



□

3.3 Exercicis

Estudieu la continuïtat de les funcions

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}}$. Solució: Discontinuïtat evitable en $x = 1$.

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2+2x}$. Solució: Discontinuïtat evitable en $x = -1$ i asimptòtica en $x = 0$.

c) $f(x) = \dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6}$. Solució: Discontinuïtat de salt finit en $x = 3$ i asimptòtica en $x = 2$.

4 Representació gràfica de funcions

La recerca del domini, dels punts de tall amb els eixos i el comportament quan x tendeix a ∞ proporciona informació de cara a la representació gràfica d'una funció f. La completarem amb l'estudi d'existència d'asímptotes i simetries. Per a un estudi més complet caldrà l'eina del càlcul diferencial que, de moment, no desenvolupem.

4.1 Asímptotes

En una primera aproximació direm que una funció té una asímptota, si té tendència a comportar-se igual que una recta quan alguna de les variables x o y tendeix cap a $+\infty$ o $-\infty$. Aquesta recta rebrà el nom d'asímptota. També es diu que una asímptota és una tangent al gràfic de la funció en el punt de l'infinit. A partir d'aquestes idees i observant el gràfic de l'exemple 4.2 establim les definicions rigoroses de les asímptotes verticals i horitzontals.

Definició 4.1 *$x = a$ és asímptota vertical si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$.*
$y = k$ és asímptota horitzontal si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$.

Exemple 4.1 *Asímptotes de les funcions $f(x) = \dfrac{x^2-9}{(x-2)^2}$ i $g(x) = 2^{-1/x}$.*

$\lim_{x\to 2} f(x) = \left(\dfrac{-5}{0^+}\right) = -\infty$ i $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1 \Longrightarrow x = 2$ i $y = 1$ són asímptotes.

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \left(2^{-1/0^-}\right) = 2^{+\infty} = +\infty$ i $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 2^0 = 1 \Longrightarrow x = 0$ i $y = 1$ són asímptotes.

Exemple 4.2 *Il·lustració gràfica d'asímptotes verticals i horitzontals.*

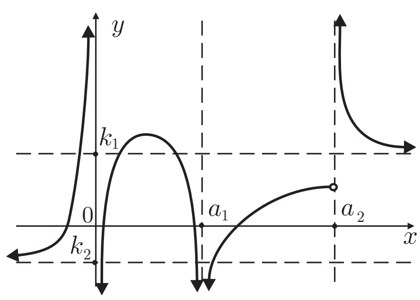
$\lim_{x\to a_2^+} f(x) = +\infty \Longrightarrow x = a_2$ és asímptota vertical.

$\lim_{x\to a_1} f(x) = -\infty \Longrightarrow x = a_1$ és asímptota vertical.

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow x = 0$ és asímptota vertical.

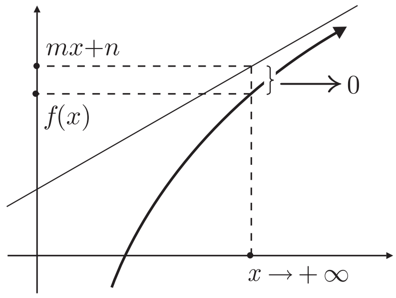
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = k_1 \Longrightarrow y = k_1$ és asímptota horitzontal.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = k_2 \Longrightarrow y = k_2$ és asímptota horitzontal.



□

Quant a les asímptotes oblíqües, tindran una equació del tipus $y = mx + n$, $m \neq 0$. En un llenguatge poc formal, la funció $f(x)$ i l'asímptota "han de ser una mateixa cosa" en l'infinit. Això es pot expressar escrivint en el cas $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - mx - n) = 0$, d'on deduïm:



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - mx - n}{x} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - m\right) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = m.$$

I d'altra banda $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = n$. Això ens du a establir la definició següent.

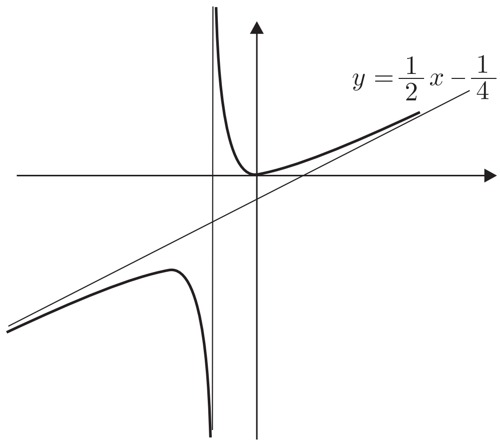
Definició 4.2 *$y = mx + n$ és asímptota oblíqua si*

$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}, \quad n = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - mx) \\ \text{o bé} \\ m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}, \quad n = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - mx). \end{cases}$$

Exemple 4.3 *Asímptota oblíqua de la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$.*

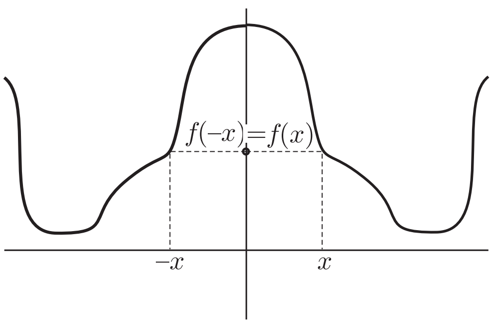
$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{2x+1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2x^2 + x} = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2} \\ n &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2x+1} - \frac{1}{2}x = \frac{2x^2 - 2x^2 - x}{4x+2} = \\ &= \frac{-x}{4x+2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

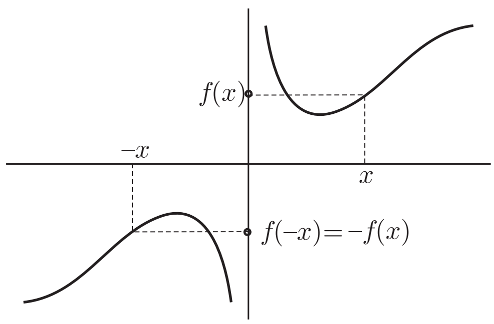
Asímptota oblíqua: $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$.



4.2 Simetries

Estudiarem les simetries respecte de l'eix d'ordenades i de l'origen de coordenades. Després d'observar els gràfics en què s'il·lustren aquestes simetries establim les definicions següents.





Definició 4.3 – *f és simètrica respecte l'eix OY si $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathrm{Dom}\, f$. També es diu que la funció és parell.*

– *f és simètrica respecte l'origen de coordenades si $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathrm{Dom}\, f$. També es diu que la funció és senar.*

Exemple 4.4 $f(x) = x^2 - 4$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 - 9}$, $f(x) = \cos x$, *són funcions parells.* $f(x) = \tan x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = 1/x$, $f(x) = \sin x$, *són funcions senars.*

Efectivament,

$(-x)^2 - 4 = x^2 - 4, \quad \dfrac{(-x)^2}{(-x)^4 - 9} = \dfrac{x^2}{x^4 - 9}, \quad \cos(-x) = \cos x.$

$\tan(-x) = -\tan x, \quad (-x)^3 = -x^3, \quad 1/(-x) = -1/x, \quad \sin(-x) = -\sin x.$ □

Índex